义务教育教科书

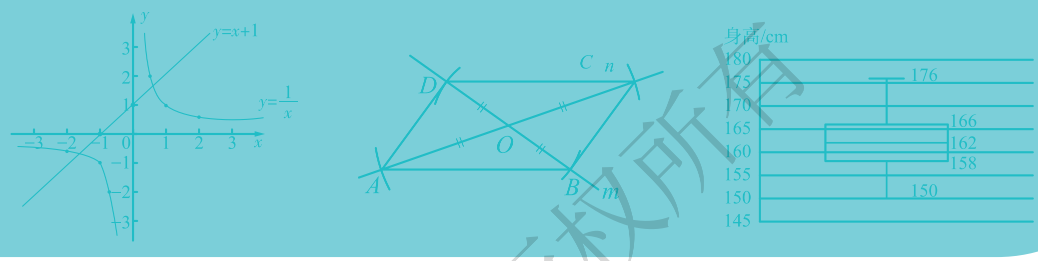
国家教材委员会专家委员会审核通过 2024

数学

八年级

下册

华东师范大学出版社



义务教育教科书

数学

八年级
下册

华东师范大学出版社
·上海·

主　编：王建磐
副主编：王继延
本册编写人员：唐复苏　李文革　李　俊　李　宏
吴中才　沈　加　张海营　孙孝武

义务教育教科书

数　学

八年级　下册

责任编辑　平　萍　周　鸿
责任校对　江小华
装帧设计　刘怡霖　卢晓红
插图绘制　上海翔绘网络科技有限公司

出　　版　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电　　话　021－60821666　行政传真 021－62572105
客服电话　021－62865537

印 刷 者　上海新华印刷有限公司
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张　13
字　　数　215 千字
版　　次　2025 年 12 月第 1 版
印　　次　2025 年 12 月第 1 次
书　　号　ISBN 978－7－5760－6515－2
定　　价　15. 00 元

出 版 人　王　焰

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话 021－62865537 联系）

致亲爱的同学

欢迎你进入新学期，我们的小伙伴.

现在放在你面前的是初中阶段六册数学教科书中的第四本，请你打开这本书，与我们一起继续漫游数学世界，探索发现更多、更具魅力的数学奥秘.

代数式是你早就结识的朋友，前面你已经熟悉了整式及其运算，它们已经在解方程和解不等式中派上了用场，帮助你顺利地解决了不少实际问题．**“分式”**是解决问题时碰到的又一种代数式，同样需要我们认识分式的性质和运算．分式与分数在许多方面有着惊人的相似，你可以类比分数，发现研究分式的方法.

我们生活的世界，处在不停的运动变化之中．例如，人的身高随着年龄的增长在不断变化，气温随着时间的推移而变化……为了刻画现实世界的运动变化，在数学中引进了“变量”和“函数”，使数学发生了根本的转折．**“函数及其图象”**将把你领入一个新的数学世界，提供解决许多实际问题的工具和方法，使你在数学王国里更加自由地翱翔.

实际生活中充满着各种各样的奇妙图形，你见过学校、工厂等单位的伸缩大门吗？那里有许多你熟悉的几何图形．**“平行四边形”**和**“矩形、菱形与正方形”**这两章将陪伴你会见一些小学里已经认识的老朋友，你也将结识一些新朋友．你将通过探索、思考，对它们的面貌特征有更深刻的理解，进一步学会演绎推理，并将解决一些有关图形的度量问题.

“数据的分析”将帮助你学会整理与初步处理数据，合理使用平均数、中位数、众数和方差分析数据，并将学习描述数据分布的一种新方法.

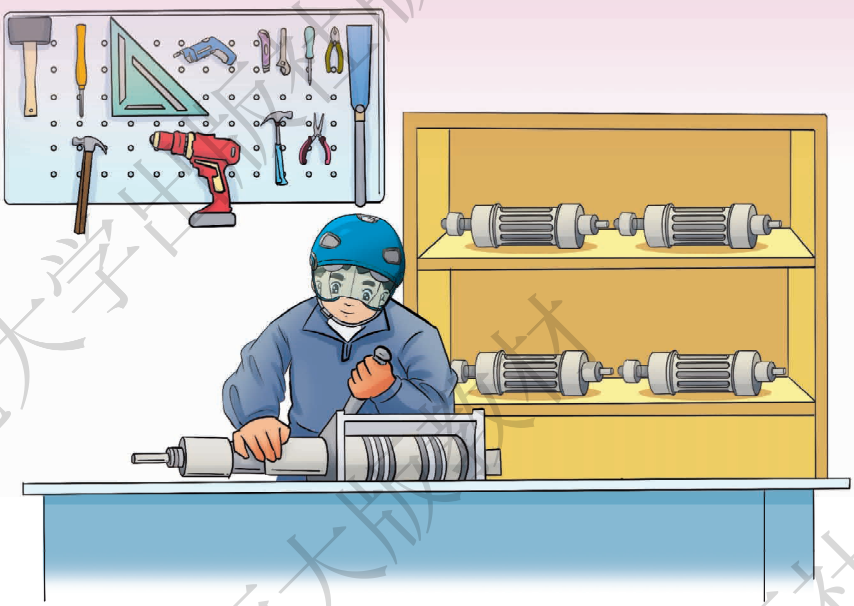
“项目学习”将带你经历综合运用数学和其他学科的知识与方法，在实际情境中发现问题，并将其转化为合理的数学问题的全过程.

我们相信，这本书一定能继续帮助你在丰富多彩的数学世界里漫游、探索，充分发挥你的想象力与创造力，解决各种各样的问题.

数学世界继续欢迎你，为你打开一道道神秘的大门.

目录

第 15 章　分式



要装配 30 台机器，在装配好 6 台后，采用了新的技术，工作效率提高了一倍，结果总共只用 3 天就完成了任务．原来每天能装配机器多少台？

设原来每天能装配机器 x 台，可列出方程：

$$\frac{6}{x}+\frac{30-6}{2x}=3.$$

这个方程左边的式子已不再是整式，涉及分式与分式方程的问题．

★　本章将类比分数，学习关于分式和分式方程的一些初步知识，并应用这些知识解决一些实际问题．

15.1　分式及其基本性质

1. 分式

做一做

(1) 面积为 $2\,\text{m}^2$ 的长方形的长为 $3\,\text{m}$，则它的宽为________m;

(2) 面积为 $S\,\text{m}^2$ 的长方形的长为 $a\,\text{m}$，则它的宽为________m;

(3) 一箱苹果售价 p 元，总重 $m\,\text{kg}$，箱重 $n\,\text{kg}$，则每千克苹果的售价为________元.

形如$\dfrac{A}{B}$(A、B 是整式，且 B 中含有字母)的式子，叫做**分式**(fraction). 其中 A 叫做分式的**分子**(numerator)，B 叫做分式的**分母**(denominator).

整式和分式统称为**有理式**(rational expression)，即

$$\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\\\text{分式}\end{cases}$$

例 1　下列有理式中，哪些是整式？哪些是分式？

$$\frac{1}{x},\quad \frac{x}{2},\quad \frac{2xy}{x+y},\quad \frac{2x-y}{3}.$$

解　$\dfrac{x}{2}$ 和 $\dfrac{2x-y}{3}$ 是整式，$\dfrac{1}{x}$ 和 $\dfrac{2xy}{x+y}$ 是分式.

注意　在分式中，分母的值不能为 0．如果分母的值为 0，则分式没有意义．例如，在分式 $\frac{1}{x}$ 中，$x \neq 0$；在分式$\frac{2xy}{x+y}$中，$x+y \neq 0$.

▶ **例 2**　当 x 取什么值时，下列分式有意义？

（1）$\frac{x}{x-1}$；　　（2）$\frac{x-2}{2x+3}$.

分析　要使分式有意义，必须且只需分母的值不等于 0．

解　（1）分母 $x-1 \neq 0$，即 $x \neq 1$.

所以，当 $x \neq 1$ 时，分式 $\frac{x}{x-1}$ 有意义.

（2）分母 $2x+3 \neq 0$，即 $x \neq -\frac{3}{2}$.

所以，当 $x \neq -\frac{3}{2}$ 时，分式 $\frac{x-2}{2x+3}$ 有意义.

2. 分式的基本性质

在进行分数的化简与运算时，常常要进行约分和通分，其主要依据是分数的基本性质．类似地，分式有如下基本性质：

回顾一下：分数有什么基本性质?

分式的分子和分母都乘以（或都除以）同一个不等于 0 的整式，分式的值不变.

与分数类似，根据分式的基本性质，可以对分式进行约分和通分.

▶ **例 3**　约分：

（1）$\frac{-16x^2y^3}{20xy^4}$；　　（2）$\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$.

分析　分式的约分，即把分子与分母的公因式约去．为此，首先要找出分子与分母的公因式.

解 (1) $\dfrac{-16x^2y^3}{20xy^4}=-\dfrac{4xy^3\cdot 4x}{4xy^3\cdot 5y}=-\dfrac{4x}{5y}$.

(2) $\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2}=\dfrac{x+2}{x-2}$.

试用分式的基本性质说明这里是怎样进行约分的.

约分后，分子与分母不再有公因式．分子与分母没有公因式的分式称为**最简分式**.

▶ **例 4** 通分：

(1) $\dfrac{1}{a^2b}$, $\dfrac{1}{ab^2}$; (2) $\dfrac{1}{x-y}$, $\dfrac{1}{x+y}$; (3) $\dfrac{1}{x^2-y^2}$, $\dfrac{1}{x^2+xy}$.

分析 分式的通分，即把几个异分母的分式分别化为与原来的分式相等的同分母的分式．通分的关键是确定几个分式的公分母，通常取各分母所有因式的最高次幂的积作为公分母(叫做最简公分母)．例如小题(1)中的两个分式$\dfrac{1}{a^2b}$和$\dfrac{1}{ab^2}$，它们的最简公分母是a^2b^2.

解 (1) $\dfrac{1}{a^2b}$与$\dfrac{1}{ab^2}$的最简公分母为a^2b^2，所以

$$\frac{1}{a^2b}=\frac{1\cdot b}{a^2b\cdot b}=\frac{b}{a^2b^2},$$

$$\frac{1}{ab^2}=\frac{1\cdot a}{ab^2\cdot a}=\frac{a}{a^2b^2}.$$

试用分式的基本性质说明这里是怎样进行通分的.

(2) $\dfrac{1}{x-y}$与$\dfrac{1}{x+y}$的最简公分母为$(x-y)(x+y)$，即x^2-y^2，所以

$$\frac{1}{x-y}=\frac{1\cdot(x+y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{x+y}{x^2-y^2},$$

$$\frac{1}{x+y}=\frac{1\cdot(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{x-y}{x^2-y^2}.$$

(3) 因为 $x^2-y^2=$ ____________,

$x^2+xy=$ ____________,

所以 $\frac{1}{x^2-y^2}$ 与 $\frac{1}{x^2+xy}$ 的最简公分母为 ____________,

因此, $\frac{1}{x^2-y^2}=$ ______________________________,

$\frac{1}{x^2+xy}=$ ______________________________.

为确定最简公分母，通常先将各分母分解因式.

练习

1. 军训期间，小华打靶的成绩是 m 发 9 环和 n 发 7 环，小华的平均成绩是每发多少环?

(第 1 题)

2. 约分:

(1) $\frac{2ax^2y}{3axy^2}$;

(2) $\frac{2xy}{xy+2y}$;

(3) $\frac{2ab-2a^2}{3ab-3b^2}$.

3. 通分:

(1) $\frac{1}{3x^2}$, $\frac{5}{12xy}$;

(2) $\frac{1}{x^2+x}$, $\frac{1}{x^2-x}$.

习题15.1

A 组

1. 填空：

(1) 已知操场环形跑道一圈长400 m，甲、乙两人同时同地出发，沿跑道同向跑步，甲的速度为a m/s，乙的速度为b m/s($a>b$)，甲跑步超过乙一圈需________s；

(2) 巧克力糖的单价为每千克a元，奶糖的单价为每千克b元，将m kg巧克力糖和n kg奶糖混合，这样得到的混合糖的平均单价是每千克________元.

2. 下列有理式中，哪些是整式？哪些是分式？

$$\frac{1}{x},\quad \frac{1}{2}(x+y),\quad \frac{x}{3},\quad \frac{2}{m-x},\quad \frac{x}{x-3},\quad \frac{4x+9y}{13}.$$

3. 当x取什么值时，下列分式有意义？

(1) $\frac{1}{2x}$；　(2) $\frac{x-2}{x+2}$；　(3) $\frac{x+2}{4x+1}$；　(4) $\frac{4x}{3x-5}$.

4. 约分：

(1) $\frac{(a-x)^2}{(x-a)^3}$；　(2) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$.

5. 通分：

(1) $\frac{c}{ab}$，$\frac{a}{bc}$，$\frac{b}{ac}$；　(2) $\frac{1}{x^2+x}$，$\frac{-1}{x^2+2x+1}$.

B 组

6. 若a、b均不为0，将下列分式中的a和b都变为原来的2倍，分式值保持不变的有哪些？

(1) $\frac{a-b}{a+b}$；　(2) $\frac{a-b+1}{a+b-1}$；

(3) $\frac{a^2-b^2}{a^2+ab+b^2}$；　(4) $\frac{2a-3b}{a^2+b^2}$.

（第7题）

7. 某机械厂生产某种零件，第一道工序需要将每根长$10a$ cm、横截面直径为d cm的圆钢锻造为横截面直径为a cm的圆钢．锻造后的圆钢长多少厘米？

15.2　分式的运算

1. 分式的乘除

试一试

计算：

(1) $\dfrac{a^2}{b^3}\cdot\dfrac{2b^2}{3a}$；　　(2) $\dfrac{a^2}{b^3}\div\dfrac{a}{2b}$.

回想分数的乘除法，如何计算 $\dfrac{5}{6}\times\dfrac{9}{10}$ 和 $\dfrac{5}{6}\div\dfrac{3}{4}$？从中可得到什么启示？

解　(1) $\dfrac{a^2}{b^3}\cdot\dfrac{2b^2}{3a}=\dfrac{a^2\cdot 2b^2}{b^3\cdot 3a}=\dfrac{2a}{3b}$.

(2) $\dfrac{a^2}{b^3}\div\dfrac{a}{2b}=\dfrac{a^2}{b^3}\cdot\dfrac{2b}{a}=\dfrac{a^2\cdot 2b}{b^3\cdot a}=\dfrac{2a}{b^2}$.

概括　分式乘以分式，用分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母. 如果得到的不是最简分式，应该通过约分进行化简.

分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘.

▶ **例 1**　计算：

(1) $\dfrac{a^2x}{by^2}\cdot\dfrac{ay^2}{b^2x}$；

(2) $\dfrac{a^2xy}{b^2z^2}\div\dfrac{a^2yz}{b^2x^2}$.

解　(1) $\dfrac{a^2x}{by^2}\cdot\dfrac{ay^2}{b^2x}=\dfrac{a^2x\cdot ay^2}{by^2\cdot b^2x}=\dfrac{a^3}{b^3}$.

(2) $\dfrac{a^2xy}{b^2z^2}\div\dfrac{a^2yz}{b^2x^2}=\dfrac{a^2xy}{b^2z^2}\cdot\dfrac{b^2x^2}{a^2yz}=\dfrac{x^3}{z^3}$.

例 2 计算：$\dfrac{x-2}{x+3}\cdot\dfrac{x^2-9}{x^2-4}$.

解 原式$=\dfrac{x-2}{x+3}\cdot\dfrac{(x+3)(x-3)}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{x-3}{x+2}$.

将分子、分母分别分解因式，并及时约分.

思考 怎样进行分式的乘方呢？试计算：

① $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$；

② $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$（$n$ 为整数，且 $n\geqslant 2$）.

解 ① $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b}$

$=$ ________.

② $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{b}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a}{b}}_{n个}=\dfrac{\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n个}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}_{n个}}$

$=$ ________.

观察所得的结果，试总结出分式的乘方法则.

练习

1. 计算：

（1）$\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{c}$；

（2）$\dfrac{x^2-4y^2}{3xy^2}\cdot\dfrac{xy}{x+2y}$；

（3）$\dfrac{3y}{10x}\div\dfrac{6y^2}{5x^2}$；

（4）$\dfrac{x}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2+x}{x^2}$.

2. 计算：

（1）$\left(\dfrac{y}{-2x}\right)^2$；

（2）$\left(\dfrac{-2a}{c^2}\right)^3$.

2. 分式的加减

试一试

计算：

（1）$\dfrac{b}{a}+\dfrac{2}{a}$；

（2）$\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{3}{ab}$.

解 （1）$\dfrac{b}{a}+\dfrac{2}{a}=\dfrac{b+2}{a}$.

（2）$\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{3}{ab}=\dfrac{2b}{a^2b}-\dfrac{3a}{a^2b}=\dfrac{2b-3a}{a^2b}$.

概括 同分母的分式相加减，分母不变，分子相加减；异分母的分式相加减，先通分，变为同分母的分式，然后再加减.

▶ **例 3** 计算：$\dfrac{(x+y)^2}{xy}-\dfrac{(x-y)^2}{xy}$.

解

$$\begin{aligned}&\frac{(x+y)^2}{xy}-\frac{(x-y)^2}{xy}\\=&\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy}\\=&\frac{(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)}{xy}\\=&\frac{4xy}{xy}\\=&4.\end{aligned}$$

如果所得结果不是最简分式，应该通过约分进行化简.

▶ **例 4** 计算：$\frac{3}{x-4}-\frac{24}{x^2-16}$.

分析 这里两个分式的分母不同，要先通分．为此，先找出它们的最简公分母．注意到 $x^2-16=(x+4)(x-4)$，所以最简公分母是 $(x+4)(x-4)$.

解
$$\begin{aligned}
&\frac{3}{x-4}-\frac{24}{x^2-16}\\
=&\frac{3}{x-4}-\frac{24}{(x+4)(x-4)}\\
=&\frac{3(x+4)}{(x+4)(x-4)}-\frac{24}{(x+4)(x-4)}\\
=&\frac{3(x+4)-24}{(x+4)(x-4)}\\
=&\frac{3x-12}{(x+4)(x-4)}\\
=&\frac{3(x-4)}{(x+4)(x-4)}\\
=&\frac{3}{x+4}.
\end{aligned}$$

练习

1. 计算：

(1) $\frac{1}{a}+\frac{2}{a}$; (2) $\frac{10}{ab}-\frac{6}{ab}$;

(3) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}$; (4) $\frac{b}{a-b}+\frac{a}{b-a}$.

2. 计算：

(1) $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}$; (2) $\frac{b}{a}-\frac{b}{4a^2}$;

(3) $\frac{4}{a^2-1}-\frac{2}{a^2+a}$; (4) $\frac{4}{a+2}+a-2$.

阅读材料

类　　比

鲁班由小茅草割破手发明了锯，维也纳医生奥恩布鲁格由父亲敲击酒桶判断酒的多少发明了叩诊法，仿生学利用生物的结构和功能原理来研制机械或各种新技术．这些平凡而伟大的创意都源自类比．

什么是类比呢？数学家、数学教育家波利亚（Pólya George，1887—1985）说过：“类比就是一种相似．”具体地说，**类比是一种推理形式，当已经建立两个对象在某些性质上的类似之处以后，可能（并非必定）推出它们在其他某些性质上的类似．**

这种推理形式的结构可以表示如下：

对象 A　有性质　P，Q，R，$\cdots$，X
对象 B　有性质　P，Q，R，$\cdots$

推测（猜想）：　B 可能也有性质 X

学习分式时，我们可以将分式与分数进行类比，通过回忆分数的有关知识来探索发现，建立分式的新知识．

从表示形式和意义来看，分数的形式是 $\frac{a}{b}$，它表示两个整数的商；分式的形式是$\frac{A}{B}$，它表示两个整式的商．

从基本性质来看，分数的分子和分母都乘以同一个不等于 0 的数，分数的大小不变，它是分数约分和通分的依据；分式也有类似的基本性质，它是分式约分和通分的依据．

其他方面，从约分、通分到运算，甚至是最简分式与最简分数（既约分数）的概念，分式与分数都十分相似！

类比是我们学习数学的一种有效方法，我们还可以举出许多例子．如学习整式时，常常可以与整数类比．两个整数的和、差、积仍是整数，但两个整数的商却未必是整数，从而需要引进分数；类似地，两个整式的和、差、积仍是整式，

但两个整式的商未必是整式，从而需要引进分式．整式的因式分解可以与整数的因数分解类比，等等．

类比能揭示自然界的奥秘，它是数学发现的重要方法．但类比不具有证明的力量．由类比得到的结论可能成立，也可能不成立，需要进一步研究，加以证明或反驳．

科学家将火星与地球作了类比，发现火星有很多与地球类似之处：火星是行星，围绕太阳运行，绕轴自转；火星上有大气层，与地球上的空气成分很类似，一年中有四季的变更；火星上有水，大部分时间的温度适合地球上某些已知生物的生存．地球上有生命存在，科学家推测：火星上也可能有生命存在！但事实究竟怎样，还需进一步地科学考证．

在数学学习时理解这一点也很重要．例如，学习一元一次不等式后会发现，它的解法、步骤与解一元一次方程非常相似．不等式与等式的性质也有类似的地方，但是不能全盘照搬，特别是不等式的两边都乘以同一个负数时，不等号的方向要改变，在运用类比时应该引起注意．

习题15.2

A 组

1. 计算：

(1) $\dfrac{ny}{mx}\cdot\dfrac{my}{nx}$； (2) $\dfrac{12x}{7y}\div 8x^2y$；

(3) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}\div\dfrac{x-1}{x^2+x}$； (4) $\left(-\dfrac{3b}{2a}\right)^2$．

2. 计算：

(1) $\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{b+c}{a}$； (2) $\dfrac{c}{a}-\dfrac{c}{b}$；

(3) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{1-x}$； (4) $\dfrac{x^2}{x-1}-x-1$．

3. 计算：

（1）$\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\cdot x^3$；

（2）$\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+y}\cdot\left(\frac{x+y}{2x}-x-y\right)$.

4. 林林家与学校的距离为 a km，林林骑自行车从家到学校需要 b min．某天，林林从家骑自行车出发 c min 后，爸爸才从家骑自行车出发，结果爸爸与林林同时到达学校．爸爸每分钟比林林多骑多少千米？

5. 周末，小颖跟妈妈到水果批发市场去买苹果．那里有两种苹果，甲种苹果每箱净重 m kg，售价 a 元；乙种苹果每箱净重 n kg，售价 b 元．请问：甲种苹果的单价是乙种苹果的多少倍？

B 组

6. 先化简，再求值：$\left(1-\frac{x}{2y}\right)^2\div\left(-\frac{x}{2y}+\frac{2y}{x}\right)^2$，其中 $x=4$，$y=1$.

7. 设 n 是正整数，比较 $\frac{n}{n+1}$ 与 $\frac{n+1}{n+2}$ 的大小.

15.3 可化为一元一次方程的分式方程

问题 轮船在顺水中航行 80 km 所需的时间和在逆水中航行 60 km 所需的时间相同．已知水流的速度是 3 km/h，求轮船在静水中的速度.

分析 设轮船在静水中的速度为 x km/h，根据题意，得

$$\frac{80}{x+3}=\frac{60}{x-3}. \quad ①$$

概括 方程①中含有分式，并且分母中含有未知数，像这样的方程叫做**分式方程**.

思考 怎样解分式方程呢？有没有办法去掉分式方程中的分母，把分式方程转化为整式方程呢？试动手解上页列出的方程①.

回顾一下解一元一次方程时是怎样去分母的，从中能否得到一点启发？

解 方程两边都乘以 $(x+3)(x-3)$，约去分母，得

$$80(x-3)=60(x+3).$$

解这个整式方程，得

$$x=21.$$

由此可得问题的答案：轮船在静水中的速度为 21 km/h.

概括 上述解分式方程的过程，实质上是将方程的两边都乘以同一个整式，约去分母，把分式方程转化为整式方程来解. 所乘的整式通常取方程中出现的各分式的最简公分母.

▶ **例1** 解方程：$\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{x^2-1}$.

解 方程两边都乘以 (x^2-1)，约去分母，得

$$x+1=2.$$

解这个整式方程，得

$$x=1.$$

解到这儿，我们能不能说 $x=1$ 就是原分式方程的解(或根)呢？细心的同学可能会发现，当 $x=1$ 时，原分式方程左边和右边的分母 $(x-1)$ 和 (x^2-1) 都是 0，方程中出现的两个分式都没有意义，因此，$x=1$ 不是原分式方程的解，应当舍去. 所以原分式方程无解.

我们看到，在将分式方程变形为整式方程时，方程两边都乘以同一个含有未知数的整式，并约去了分母，有时可能产生不适合原分式方程的解(或根)，这种根通常称为**增根**. 因此，在解分式方程时必须进行检验.

解分式方程进行检验的关键是看所求得的整式方程的根是否使原分式方程中分式的分母为 0. 有时为了简便起见，也可将它代入所乘的整式(即最简公分母)，看它的值是否为 0. 如果为 0，即为增根. 如例 1 中，把 $x=1$ 代入 x^2-1，其值为 0，可知 $x=1$ 是原分式方程的增根.

有了上面的经验，我们再来完整地解一个分式方程.

▶ **例 2** 解方程：$\dfrac{100}{x}=\dfrac{30}{x-7}$.

解 方程两边都乘以 $x(x-7)$，约去分母，得

$$100(x-7)=30x.$$

解这个整式方程，得

$$x=10.$$

检验：把 $x=10$ 代入 $x(x-7)$，得

$$10\times(10-7)\neq 0.$$

所以，$x=10$ 是原方程的解.

也可代入原方程的每一个分母进行检验，试试看.

▶ **例 3** 用计算机处理数据时，为了防止数据输入出错，某研究室安排两位程序操作员各输入一遍，比较两人的输入是否一致. 两人各输入 2 640 个数据，已知甲的输入速度是乙的 2 倍，结果甲比乙少用 2 小时输完. 这两个操作员每分钟各能输入多少个数据?

解 设乙每分钟能输入 x 个数据，则甲每分钟能输入 $2x$ 个数据. 根据题意，得

$$\frac{2\,640}{2x}=\frac{2\,640}{x}-2\times 60,$$

解得 $x=11$.

经检验，$x=11$ 是原方程的解. 并且，当 $x=11$ 时，$2x=2\times 11=22$，所以乙用了 240 min，甲用了 120 min，甲比乙少用了 120 min，符合题意.

答：甲每分钟能输入 22 个数据，乙每分钟能输入 11 个数据.

练习

1. 解方程：

（1）$\frac{4}{x-1}=1$；　　（2）$\frac{3}{x+1}=\frac{5}{x+3}$.

2. 解方程：

（1）$\frac{2}{x-1}=\frac{3}{2x+1}$；　　（2）$\frac{1}{x-2}+3=\frac{1-x}{2-x}$.

3. A 市与甲、乙两地的距离分别为 400 km 和 350 km，从 A 市开往甲地列车的速度比从 A 市开往乙地列车的速度快 15 km/h，结果从 A 市到甲、乙两地所需时间相同. 求从 A 市开往甲、乙两地列车的速度.

4. 试解决本章导图中提出的问题.

习题15.3

A 组

1. 解方程：

（1）$\frac{2}{x}=\frac{3}{x+1}$；　　（2）$\frac{x-1}{x-2}=\frac{1}{x-2}$；

（3）$\frac{x}{x-6}=\frac{x-2}{x-3}$；　　（4）$\frac{2x}{2x+5}+\frac{5}{5x-2}=1$.

2. 不解方程，判断方程 $\frac{x^2-x+2}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$ 是否可能有增根，并说明理由.

3. 某工厂生产 A、B 两种型号的扫地机器人．B 型机器人比 A 型机器人每小时的清扫面积多 40%；清扫 $100\,m^2$ 所用的时间 A 型机器人比 B 型机器人多用 20 min．两种型号的扫地机器人每小时分别清扫多少面积？

4. 甲、乙两地之间的高速公路全长 200 km，比原来国道的长度减少了 20 km．高速公路通车后，某长途汽车的行驶速度提高了 45 km/h，从甲地到乙地的行驶时间缩短了一半．求该长途汽车在原来国道上行驶的速度．

B 组

5. 若关于 x 的方程 $\dfrac{2x-a}{x+1}=1$ 有解，求实数 a 的取值范围．

6. 若关于 x 的方程 $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x+a}{x^2-1}$ 无解，求实数 a 的值．

15.4　零指数幂与负整数指数幂

1．零指数幂与负整数指数幂

问题　在 11.1 节中介绍同底数幂的除法公式 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 时，有一个附加条件：$m > n$，即被除数的指数大于除数的指数．当被除数的指数不大于除数的指数，即 $m = n$ 或 $m < n$ 时，情况怎样呢？

探索　先考察被除数的指数等于除数的指数的情况．例如下列算式：

为什么约定 $a \neq 0$？

$$5^2 \div 5^2,\quad 10^3 \div 10^3,\quad a^5 \div a^5 (a \neq 0).$$

一方面，如果仿照同底数幂的除法公式来计算，出现

$$5^2 \div 5^2 = 5^{2-2} = 5^0,$$
$$10^3 \div 10^3 = 10^{3-3} = 10^0,$$
$$a^5 \div a^5 = a^{5-5} = a^0 (a \neq 0).$$

另一方面，由于这几个式子的被除式等于除式，由除法的意义可知，所得的商都等于 1.

概括

由此启发，我们规定：

$$a^0 = 1 (a \neq 0).$$

这就是说：**任何不等于 0 的数的 0 次幂都等于 1.**

0 的 0 次幂没有意义.

探索

我们再来考察被除数的指数小于除数的指数的情况，例如下列算式：

$$5^2 \div 5^5,\quad 10^3 \div 10^7.$$

一方面，如果仿照同底数幂的除法公式来计算，出现

$$5^2 \div 5^5 = 5^{2-5} = 5^{-3},$$
$$10^3 \div 10^7 = 10^{3-7} = 10^{-4}.$$

另一方面，我们可以利用约分，直接算出这两个式子的结果：

$$5^2 \div 5^5 = \frac{5^2}{5^5} = \frac{5^2}{5^2 \times 5^3} = \frac{1}{5^3},$$
$$10^3 \div 10^7 = \frac{10^3}{10^7} = \frac{10^3}{10^3 \times 10^4} = \frac{1}{10^4}.$$

概括

由此启发，我们规定：

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3},\quad 10^{-4} = \frac{1}{10^4}.$$

一般地，我们规定

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}(a\neq 0,\ n\text{ 是正整数}).$$

这就是说，任何不等于 **0** 的数的 $-n$（n 是正整数）次幂，等于这个数的 n 次幂的倒数.

▶ **例 1** 计算：

（1）3^{-2}； （2）$\left(\frac{1}{3}\right)^0\times 10^{-1}$.

解 （1）$3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$.

（2）$\left(\frac{1}{3}\right)^0\times 10^{-1}=1\times\frac{1}{10^1}=\frac{1}{10}$.

▶ **例 2** 用小数表示下列各数：

（1）10^{-4}；

（2）2.1×10^{-5}.

解 （1）$10^{-4}=\frac{1}{10^4}=0.0001$.

（2）$2.1\times 10^{-5}=2.1\times\frac{1}{10^5}$

$=2.1\times 0.00001$

$=0.000021$.

我们知道，正整数指数幂有如下运算性质（11.1 节）：

（1）$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；

（2）$a^m\div a^n=a^{m-n}(a\neq 0)$；

（3）$(a^m)^n=a^{mn}$；

（4）$(ab)^n=a^n\cdot b^n$.

上述各式中，m、n 都是正整数，在性质（2）中还要求 $m>n$.

探索 我们已经引进零指数幂和负整数指数幂，指数的范围扩大到了全体整数，上述幂的运算性质是否还成立呢？也就是说，以上这些性质

中，原来的限制是否可以取消，只要 m、n 是整数就可以了呢？

我们不妨取 m、n 的一些特殊值，来检验一下上述性质是否成立.

例如，取 $m=2$，$n=-3$，我们来检验性质(1)：

$$a^m \cdot a^n = a^2 \cdot a^{-3} = a^2 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a},$$

而
$$a^{m+n} = a^{2+(-3)} = a^{-1} = \frac{1}{a},$$

所以，这时性质(1)成立.

再取几个 m、n 的值（其中至少有一个是负整数或0）试一试.

类似地，我们可以检验幂的其他运算性质的正确性. 请同学们自己试一试.

2. 科学记数法

在 1.11 节中，我们曾用科学记数法表示一些绝对值较大的数，即利用 10 的正整数指数幂，把一个绝对值较大的数表示成 $a\times10^n$ 的形式，其中 n 是正整数，$1\leqslant|a|<10$. 例如，864 000 可以写成 8.64×10^5.

类似地，我们可以利用 10 的负整数指数幂，用科学记数法表示一些绝对值较小的数，即将它们表示成 $a\times10^{-n}$ 的形式，其中 n 是正整数，$1\leqslant|a|<10$. 例如，0.000 021 可以写成 2.1×10^{-5}.

练习

1. 计算：

(1) $(-0.1)^0$；　(2) $\left(\frac{1}{2012}\right)^0$；　(3) 2^{-2}；　(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

2. 用 10 的负整数指数幂填空：

(1) 1 s 是 1 μs① 的 1 000 000 倍，1 μs = ________ s；

(2) 1 mg = ________ kg；

(3) 1 μm② = ________ m；

① μs 是单位“微秒”的符号.
② μm 是单位“微米”的符号.

(4) 1 nm① = ________ μm;

(5) 1 cm^2 = ________ m^2;

(6) 1 mL = ________ m^3.

3. 用科学记数法表示下列各数:

(1) 0.000 03; (2) −0.000 006 4; (3) 0.000 031 4; (4) 2 013 000.

4. 计算下列各式,并把结果化为只含有正整数指数幂的形式:

(1) $(a^{-3})^2(ab^2)^{-3}$; (2) $(2mn^2)^{-2}(m^{-2}n^{-1})^{-3}$.

阅读材料

光 年 和 纳 米

在阅读报纸、杂志或科技书刊时,有时我们会看到“光年”“纳米”这两个名称,你知道它们的含义吗?

光年(light year)是天文学中使用的长度单位,其符号为 l. y.,主要用于计量天体之间的距离. 1 光年是指光在真空中一年时间所走的距离,它可由速度(光速)和时间(1 年)算出来:

真空中的光速为 $c = 299\,792.458$ km/s,

$$1\text{ a}^{②} \approx 60 \times 60 \times 24 \times 365.25\text{ s},$$

因此 $1\text{ l. y.} \approx 299\,792.458 \times 60 \times 60 \times 24 \times 365.25\text{ km} \approx 9.46 \times 10^{12}\text{ km}$.

这就是说,1 l. y. 约等于 9.46 万亿千米.

离太阳最近的恒星(半人马座比邻星)与太阳的距离约为 4.22 l. y.,银河系的直径约为 10 万光年,人类所观测的宇宙深度已达到 150 亿光年. 你能算出这些距离等于多少千米吗?从中体会到用光年作单位的优越性.

① nm 是单位“纳米”的符号,见本页“阅读材料”.

② a 是单位“年”的符号.

光年用来计量非常大的距离，而纳米(nanometer)则是表示微小距离的单位，其符号为 nm． $1\ \mathrm{nm}=10^{-9}\ \mathrm{m}$(即$\frac{1}{10^9}$m)．由于 $1\ \mathrm{m}=10^3\ \mathrm{mm}$，所以可以算出 $1\ \mathrm{nm}=10^{-6}\ \mathrm{mm}$，它相当于 1 mm 的一百万分之一．而 1 mm 相当于我们通常使用的刻度尺上的一小格，可想而知，1 nm 是多么地小．

当粒子的大小处在 1～100 nm 范围内，可称为纳米粒子．纳米粒子的尺寸小，表面积大，具有高度的活性．因此，利用纳米粒子可制备活性极高的催化剂，在火箭固体燃料中掺入铝的纳米微粒，可提高燃烧效率．利用铁磁纳米材料可制成磁性信用卡、磁性钥匙以及高性能录像带等．利用纳米材料等离子共振频率的可调性可制成隐形飞机的涂料．纳米材料的表面积大，对外界环境(物理的和化学的)十分敏感，在制造传感器方面是有前途的材料，目前已开发出测量温度、热辐射和检测各种特定气体的传感器．纳米材料在生物学和医学工程中也有重要应用．

在国际单位制中，为满足超大数据的表达需求，引入了 ronna 和 quetta 这两个词头，分别表示 10^{27} 倍和 10^{30} 倍，用符号 R 和 Q 表示．例如，地球质量约为 6×10^{27} g，可描述为约 6 ronna 克(ronnagram)，记作 6 Rg；太阳质量约为 2×10^{33} g，可描述为约 2 000 quetta 克(quettagram)，记作 2×10^{3} Qg．

为满足极小数据的表达需求，引入了 ronto 和 quecto 这两个词头，分别表示 10^{-27} 倍和 10^{-30} 倍，用符号 r 和 q 表示．例如，一个电子的质量约为 1×10^{-27} g，可描述为1 ronto 克(rontogram)，记作 1 rg；一个中微子的质量约为 1×10^{-35} g，可描述为 1×10^{-5} quecto 克(quectogram)，记作 1×10^{-5}qg．

习题15.4

A 组

1. 计算：

(1) $5^{10}\div25^{4}$；　　(2) $(-117)^{0}$；　　(3) 4^{-2}；　　(4) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$.

2. 计算下列各式，要求在结果中不出现负整数指数幂：

(1) $(x^{-3}yz^{-2})^{2}$；

(2) $(a^{3}b^{-1})^{-2}(a^{-2}b^{2})^{2}$；

(3) $(2m^{2}n^{-3})^{3}(-mn^{-2})^{-2}$.

3. 已知空气的单位体积质量是 0.001 29 g/cm^3，试用科学记数法表示该数．（单位仍用"g/cm^3"）

4. 牛顿（Isaac Newton，1643—1727）发现了万有引力定律，其中万有引力常数约为 0.000 000 000 066 7 N · m^2/kg^2，试用科学记数法表示该数．（单位仍用"N · m^2/kg^2"）

B 组

5. 比较下列各组数的大小：

(1) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$ 与 $(-3)^{2}$；

(2) $-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$ 与 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$.

6. 若代数式 $\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)^{-3}$ 有意义，求实数 x 的取值范围.

数学活动

质量百分比浓度问题

溶液由溶质和溶剂组成，溶液的质量百分比浓度 $=\dfrac{\text{溶质质量}}{\text{溶液质量}}\times 100\%$. 例如，糖水是一种溶液，它由糖和水组成，其中糖为溶质，水为溶剂．10 g 糖溶于 90 g 水，得到的糖水的质量百分比浓度为 10%.

设某种溶液的溶质质量为 a g，溶剂质量为 b g，溶液的质量百分比浓度为 p，假设溶质在溶剂中都能完全溶解．请研究以下问题：

（1）若溶剂的质量不变，则随着溶质质量 a 的增大，溶液的质量百分比浓度 p 如何变化？

（2）若溶质的质量不变，则随着溶剂质量 b 的增大，溶液的质量百分比浓度 p 如何变化？

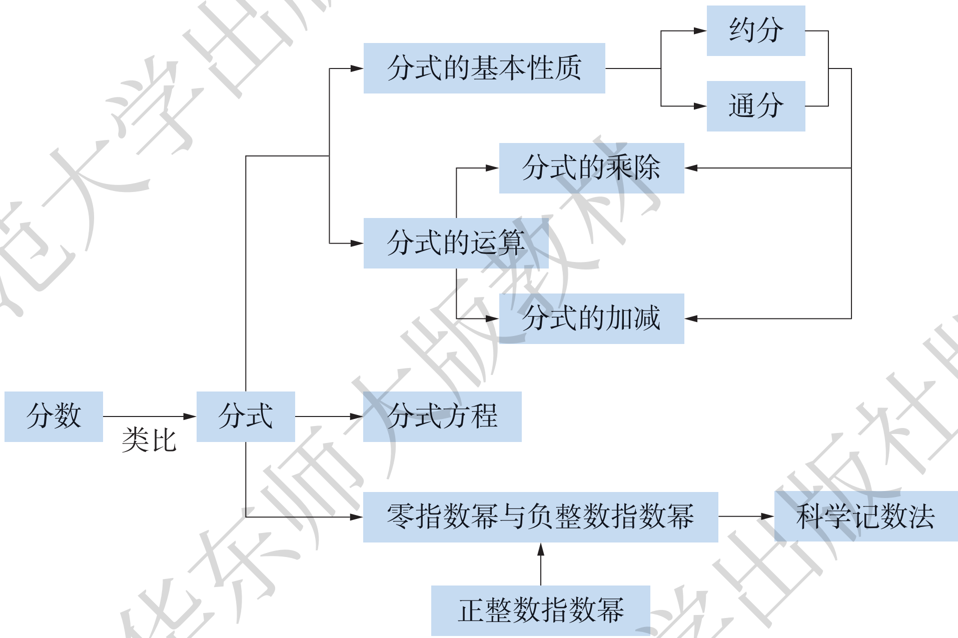
（3）两杯质量百分比浓度分别为 p_1 和 p_2、溶液质量分别为 c_1 和 c_2 的这两种溶液混合在一起，得到的溶液的质量百分比浓度 p 与 p_1、p_2 的大小关系如何？

（4）两杯溶质质量均为 a g、质量百分比浓度分别为 p_1 和 p_2 的这两种溶液混合在一起，得到的溶液的质量百分比浓度 p 与 p_1、p_2 的大小关系如何？

（5）还有很多量也是用比值来定义的，例如物体运动时间 $t=\dfrac{\text{路程}\ s}{\text{速度}\ v}$，物质的密度 $\rho=\dfrac{\text{质量}\ m}{\text{体积}\ V}$. 你能仿照上面的问题进行研究吗？

小结

一、知识结构



二、要点

1. 分式的基本性质及分式的运算与分数类似，在学习分式时，要注意与分数进行类比.

2. 解分式方程的基本思想是把含有未知数的分母去掉，将分式方程转化为整式方程来解. 这时可能会出现增根，必须进行检验. 要理解增根产生的原因，体会检验的必要性，并会进行检验.

3. 引进零指数幂与负整数指数幂后，幂的概念和运算性质扩充到了整数指数幂的范围. 有了负整数指数幂，绝对值较小的数也可以用科学记数法来表示.

复习题

A 组

1. 填空：

（1）面积为 $m\ \mathrm{m}^2$ 的某梨园产梨 n kg，平均每平方米产梨________kg；

（2）某工厂原计划 a 天完成 b 件产品，现在需要提前 n 天完成，每天要比原来多生产产品________件；

（3）德国著名物理学家普朗克发现：能量子 = h × 频率．这里的 h 被称为普朗克常数，约为0.000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 662 6 J·s①，用科学记数法可简洁地记为 __________ J·s；

（4）一种微粒的半径是 4×10^{-5} m，若用小数表示，则为 ________ m；

（5）一个纳米粒子的直径是 35 nm，若用科学记数法表示，则为________ m．

2. 计算：

（1）$\left(-1\dfrac{1}{7}\right)^0$；　（2）$0.01^{-1}$；　（3）$5^{-2}$；　（4）$(-0.1)^{-2}$．

3. 用科学记数法表示下列各数：

（1）100 000；　（2）0.000 01；　（3）－112 000；　（4）－0.000 112．

4. 下列各式中，哪些是分式？

$$\frac{1}{x^2},\quad \frac{1}{5}(x+y),\quad \frac{3}{-x},\quad 0,\quad \frac{a}{3},\quad \frac{ab}{2}+\frac{1}{c},\quad \frac{x}{2}+y.$$

5. 写出下列各等式中未知的分子或分母：

（1）$\dfrac{1-x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{?}{x+1}$；　（2）$\dfrac{?}{c^2+7c}=\dfrac{1}{c+7}$；

（3）$\dfrac{a-2}{?}=\dfrac{1}{2a+7}$；　（4）$\dfrac{3x}{2x+3}=\dfrac{9x^2-6x}{?}$．

① J·s 是单位“焦·秒”的符号．

6. 约分:

(1) $\frac{ab}{2a^2}$;　　(2) $\frac{-3x^2y}{9xyz}$;

(3) $\frac{x^2-3}{2x^3-6x}$;　　(4) $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$.

7. 通分:

(1) $\frac{1}{ax}$, $\frac{1}{bx}$;　　(2) $\frac{b}{a-x}$, $\frac{c}{ay-xy}$;

(3) $\frac{2}{x+1}$, $\frac{3}{x+2}$;　　(4) $\frac{1}{2x+5}$, $\frac{2}{4x^2-25}$.

8. 计算:

(1) $\frac{xy(x+y)}{(x-y)^2}\cdot\frac{x-y}{xy+y^2}$;　　(2) $\left(\frac{y}{6x^2}\right)^2\div\left(-\frac{y^2}{4x}\right)^2$;

(3) $\frac{(a-b)^2}{ab}-\frac{a^2-b^2}{ab}$;　　(4) $\frac{3}{a-1}-\frac{2}{2-a}$.

9. 解下列分式方程:

(1) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$;

(2) $\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x-2}$;

(3) $\frac{1}{x^2+5x-6}=\frac{1}{x^2+x+6}$.

10. 某校 n 名学生参加市法律知识竞赛，他们的成绩分别为 a_1，a_2，…，a_n，这 n 名学生的平均成绩为多少?

11. 甲、乙两辆汽车分别从 A、B 两城同时沿高速公路驶向 C 城. 已知 A、C 两城间的路程为 450 km，B、C 两城间的路程为 400 km，甲车比乙车的速度快 10 km/h，结果两辆车同时到达 C 城. 求两车的速度.

B 组

12. 计算：

（1）$\dfrac{a^2}{a-b}-a-b$；

（2）$\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)^2 \div \dfrac{x-1}{x+1}$；

（3）$\dfrac{2ab}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{2bc}{(a-b)(c-a)}$；

（4）$\left(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}\right) \div \dfrac{xy}{x^2-y^2}$.

13. 某服装制造厂要在开学前赶制 3 000 套校服，为了尽快完成任务，厂领导合理调配，加强第一线人力，使每天完成的校服比原计划多了 20%，结果提前 4 天完成任务．问：原计划每天完成多少套校服？

14. 随着我国科技事业的不断发展，国产无人机大量进入快递行业．现有 A、B 两种型号的无人机都被用来运送快件，A 型机比 B 型机平均每小时多运送 30 件，A 型机运送 800 件所用时间与 B 型机运送 600 件所用时间相同．这两种无人机平均每小时分别运送多少快件？

15. 一辆货车送货上山，并按原路下山．上山速度为 a km/h，下山速度为 b km/h．求货车上山、下山的平均速度．

C 组

16. （1）已知 $a+\dfrac{1}{a}=2$，求 $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ 的值；

（2）已知 $a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{3}{2}$，求 $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ 的值．

17. 观察下面依次排列的一串单项式：

$$x,\ -2x^2,\ 4x^3,\ -8x^4,\ 16x^5,\ \cdots$$

（1）从第 2 个单项式起，计算每一个单项式与它前面的单项式的商，你有什么发现？

（2）如果按你发现的规律继续写下去，第 10 个单项式是什么？

第 16 章　函数及其图象

世界处在不停的运动变化中，如何研究这些运动变化规律呢？数学上常用变量与函数来刻画各种运动变化.

★　本章将学习有关函数及其图象的初步知识，重点研究两类常见的函数——一次函数和反比例函数，并利用它们研究一些数学问题和实际问题，从中体会函数在解决运动变化问题中的重要作用.

16.1　变量与函数

问题 1　图 16.1.1 是某地一天内的气温变化图.

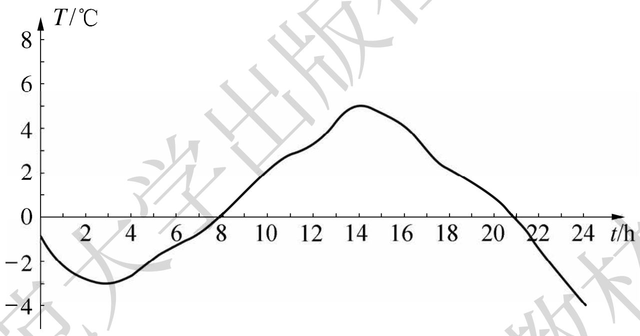


图16.1.1

这张图告诉我们哪些信息?

看图回答:

(1) 这天的 6 时、10 时和 14 时的气温分别是多少? 任意给出这天中的某一时刻, 说出这一时刻的气温.

(2) 这一天中, 最高气温是多少? 最低气温是多少?

(3) 这一天中, 哪些时段的气温在逐渐升高? 哪些时段的气温在逐渐降低?

从图中我们可以看到, 随着时间 t(h)的变化, 气温 T(℃)也随之变化.

问题 2　小蕾在过 14 岁生日的时候, 看到了爸爸为她记录的各周岁时的体重, 如下表:

周岁	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
体重/kg	7.9	12.2	15.6	18.4	20.7	23.0	25.6	28.5	31.2	34.0	37.6	41.2	44.9

观察上表, 说一说随着年龄的增长, 小蕾的体重是如何变化的? 在哪一段时间内体重增加较快?

问题 3 收音机刻度盘上的波长和频率分别是用米(m)和千赫兹(kHz)为单位标刻的．下面是一些对应的数值：

波长 λ/m	300	500	600	1 000	1 500
频率 f/kHz	1 000	600	500	300	200

细心的同学可能会发现：每一列 λ 与 f 的对应值的乘积是一个定值，即

$$\lambda f = 300\,000,$$

或者说

$$f = \frac{300\,000}{\lambda}.$$

可以看出：波长 λ 越大，频率 f 就________.

问题 4 圆的面积随着半径的增大而增大．如果用 r 表示圆的半径，用 S 表示圆的面积，则 S 与 r 之间满足下列关系：

$$S = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

利用这个关系式，试求出半径为 1 cm、1.5 cm、2 cm、2.6 cm、3.2 cm 时圆的面积，并将结果填入下表：

半径 r/cm	1	1.5	2	2.6	3.2	…
圆面积 S/cm^2						…

概括 在上面的问题中，我们研究了一些数量关系，它们都刻画了某些变化规律．这里出现了各种各样的量，特别值得注意的是出现了一些数值会发生变化的量．例如问题 1 中，刻画气温变化规律的量是时间 t 和气温 T，气温 T 随着时间 t 的变化而变化，它们可以取不同的数值．像这样，在某一变化过程中，可以取不同数值的量，叫做**变量**(variable)．

在其他三个问题中，有哪些变量?

上面各个问题中，都出现了两个变量，它们互相依赖，密切相关．一般地，如果在一个变化过程中，有两个变量，例如 x 和 y，对于 x 的每一个值，y 都有唯一的值与之对应，我们就说 x 是自变量（independent variable），y 是因变量（dependent variable），此时也称 y 是 x 的函数（function）．

试说出上面四个问题中的自变量与因变量．

表示函数关系的方法通常有三种：

（1）解析法．如问题 3 中的 $f=\dfrac{300\ 000}{\lambda}$，问题 4 中的 $S=\pi r^2$，函数关系是用表达式表示的，它们又称函数关系式．

（2）列表法．如问题 2 中小蕾的体重表，问题 3 中波长与频率的关系表．

（3）图象法．如图 16.1.1 所示的气温曲线图．

在问题的研究过程中，还有一种量，它的取值始终保持不变，我们称之为常量（constant）．如问题 3 中的 300 000，问题 4 中的 π 等都是常量．

在研究函数时，必须注意自变量的取值范围．实际问题中，自变量的取值必须符合实际意义．例如，上述问题 4 中，自变量 r 表示圆的半径，所以不能为负数和 0，即它的取值范围是一切正实数．

练习

1. 举出 3 个日常生活中遇到的变量与函数的例子．
2. 下表是某市 2021 年统计的中小学男学生各年龄组的平均身高：

年龄组/岁	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
平均身高/cm	124	130	135	141	145	151	159	165	168	170	171	172

观察此表，回答下列问题：

（1）该市 14 岁男学生的平均身高是多少？

（2）该市男学生的平均身高从哪一岁开始增加特别迅速？

（3）这里反映了哪些变量之间的函数关系？其中哪个是自变量？哪个是因变量？

3. 写出下列各问题中的函数关系式，并指出自变量的取值范围：

（1）圆的周长 C 是半径 r 的函数；

（2）火车以 60 km/h 的速度行驶，它驶过的路程 s(km) 是所用时间 t(h) 的函数；

（3）n 边形内角和的度数 S 是边数 n 的函数．

试一试

1. 填写如图 16.1.2 所示的 10 以内正整数的加法表，然后把所有填有 10 的格子涂黑，你能发现什么？

2. 把这些涂黑的格子横向的加数用 x 表示，纵向的加数用 y 表示，试写出 y 与 x 之间的函数关系式．

3. 当涂黑的格子横向的加数为 3 时，纵向的加数是多少？当纵向的加数为 6 时，横向的加数是多少？

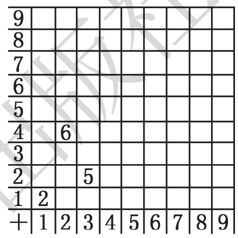


图16.1.2

例 1 等腰三角形顶角的度数 y 是底角度数 x 的函数，试写出这个函数关系式，并求出自变量 x 的取值范围．

解 根据等腰三角形的性质和三角形内角和定理，可知

$$2x + y = 180,$$

得

$$y = 180 - 2x.$$

由于等腰三角形的底角只能是锐角，所以自变量 x 的取值范围是 $0 < x < 90$.

▶ **例 2** 如图 16.1.3，已知等腰直角三角形 ABC 的直角边长与正方形 $MNPQ$ 的边长均为 10 cm，CA 与 MN 在同一条直线上，开始时点 A 与点 M 重合，让△ABC 向右移动，最后点 A 与点 N 重合.

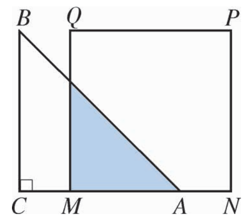


图16.1.3

（1）试写出两图形重叠部分的面积 $y(\text{cm}^2)$ 与线段 MA 的长度 $x(\text{cm})$ 之间的函数关系式.

（2）当点 A 从点 M 开始向右移动 1 cm 时，重叠部分的面积是多少？

解 （1）重叠部分的面积 y 与线段 MA 的长度 x 之间的函数关系式为

$$y=\frac{1}{2}x^2.$$

> 这里自变量 x 的取值范围是什么？

（2）点 A 从点 M 开始向右移动 1 cm，即 $MA=1$，$x=1$．当 $x=1$ 时，$y=\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}$.

> 可以这样说：当自变量 $x=1$ 时，函数值 $y=\frac{1}{2}$.

所以当点 A 从点 M 开始向右移动 1 cm 时，重叠部分的面积是 $\frac{1}{2}\text{ cm}^2$.

练习

1. 当 $x=-2$ 和 $x=3$ 时，分别求出下列函数的函数值：

（1）$y=\frac{5x+7}{2}$；

（2）$y=x^2-x-2$.

2. 写出下列各问题中的函数关系式及自变量的取值范围：

（1）某地民用水费基础标准（每月每户用水不超过 18 t）为每吨 2.91 元，在这个范围内，水费 y（元）是用水吨数 x 的函数；

（2）已知等腰三角形的面积为 20 cm^2，设它的底边长为 x cm，底边上的高为 y cm，y 是 x 的函数；

（3）在一个半径为 10 cm 的圆形纸片中剪去一个半径为 r cm 的同心圆，得到一个圆环，设圆环的面积为 S cm^2，S 是 r 的函数.

3. 一架雪橇沿一斜坡滑下，经过时间 t(s) 滑下的路程 s(m) 由下式给出：$s = 10t + 2t^2$. 假如从坡顶滑到坡底的时间为 8 s，试问：坡长为多少？

习题16.1

A 组

1. 写出下列各问题中的函数关系式，并指出自变量的取值范围：

（1）三角形的一边长为 5 cm，它的面积 S(cm^2) 是这边上的高 h(cm) 的函数；

（2）设直角三角形中一个锐角的度数为 α，另一个锐角的度数 β 是 α 的函数；

（3）某种报纸的单价为 1.50 元，购买这种报纸 x 份的总价 y(元) 是 x 的函数.

2. 分别写出下列各问题中的函数关系式，并指出自变量的取值范围：

（1）一个正方形的边长为 3 cm，它的边长减少 x cm 后，得到的新正方形周长为 y cm，y 是 x 的函数；

（2）寄一封质量在 20 g 以内的市内平信，需邮资 0.80 元，寄 n 封这样的信所需邮资为 y 元，y 是 n 的函数；

（3）长方形的周长为 12 cm，它的面积 S(cm^2) 是它的一条边长 x(cm) 的函数.

3. 当 $x = 2$ 和 $x = -3$ 时，分别求出下列函数的函数值：

（1）$y = (x + 1)(x - 2)$；

（2）$y = 2x^2 - 3x + 2$；

（3）$y = \dfrac{x + 2}{x - 1}$.

B 组

4. 填写如图所示乘数为 10 以内正整数的乘法表，然后把所有填有 24 的格子涂黑. 若用 x 表示涂黑的格子横向的乘数，y 表示涂黑的格子纵向的乘数，试写出 y 与 x 之间的函数关系式.

9									
8									
7									
6									
5									
4									
3		6							
2				8					
1									
×	1	2	3	4	5	6	7	8	9

（第 4 题）

5. 已知等腰三角形的周长为 12 cm，底边长 y(cm)是腰长 x(cm)的函数.

（1）写出这个函数关系式；

（2）求自变量 x 的取值范围.

16.2　函数的图象

由 16.1 节的问题 1，我们知道，气温变化图可以直观地表示不同时刻的气温，反映气温变化的规律.

一般地，函数常常可以用它的图象来表示，利用函数的图象，可以帮助我们直观地研究函数. 那么，什么是函数的图象？怎样画出函数的图象呢？这一节我们将对此作一些初步的研究. 为此，先学习一个非常有用的工具——平面直角坐标系.

1. 平面直角坐标系

你去过电影院吗？还记得在电影院里是怎样找座位的吗？

如图 16.2.1，因为电影票上都标有“×排×座”的字样，所以找座位时，先找到第几排，再找到这一排的第几座就可以了. 也就是说，电影院里的座位完全可以依次由两个数确定下来.

图16.2.1

在数学中，我们可以用一对有序实数来确定平面上点的位置．为此，在平面上画两条互相垂直且具有公共原点的数轴(图 16.2.2)，这就建立了**平面直角坐标系**①(rectangular coordinates system)．通常把其中水平的数轴叫做 x 轴或横轴，取向右为正方向；竖直的数轴叫做 y 轴或纵轴，取向上为正方向；两条数轴的交点 O(即公共的原点)叫做平面直角坐标系的原点．

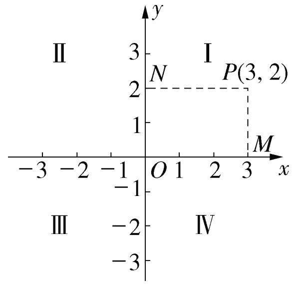


图16.2.2

在平面直角坐标系中，任意一点都可以用一对有序实数来表示．例如，图 16.2.2 中的点 P，从点 P 分别向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足分别为点 M 和点 N．这时，点 M 在 x 轴上对应的数为3，称为点 P 的**横坐标**(abscissa)；点 N 在 y 轴上对应的数为2，称为点 P 的**纵坐标**(ordinate)．依次写出点 P 的横坐标和纵坐标，得到一对有序实数(3，2)，称为点 P 的**坐标**(coordinate)．这时点 P 可记作 $P(3，2)$．

在平面直角坐标系中，两条坐标轴把平面分成如图 16.2.2 所示的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四个区域，分别称为第一、二、三、四象限．坐标轴上的点不属于任何一个象限．

试一试

1. 在图 16.2.2 中分别描出坐标是(2，3)、(－2，3)、(3，－2)的点 Q、S、R，$Q(2，3)$ 与 $P(3，2)$ 是同一个点吗？$S(－2，3)$ 与 $R(3，－2)$ 是同一个点吗？

2. 分别写出图 16.2.3 中的点 A、B、C、D、E、F 的坐标．观察你所写出的这些点的坐标，思考：

(1) 在四个象限内的点的坐标各有什么特征？

(2) 两条坐标轴上的点的坐标各有什么特征？

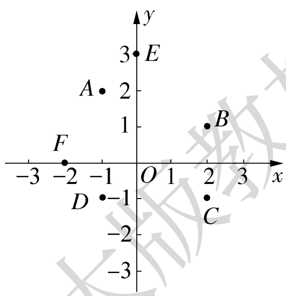


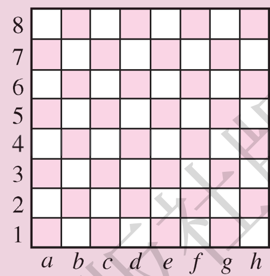
图16.2.3

① 为了纪念法国数学家笛卡儿，也称为“笛卡儿直角坐标系”．

思考 我们知道，数轴上的点和全体实数是一一对应的．上面的“试一试”也给我们这样的启发：平面直角坐标系中的点和有序实数对也是一一对应的．你能说出这句话的含义吗？

练习

1. 在平面直角坐标系中描出点 $A(2,\ -3)$，分别找出它关于 x 轴、y 轴及原点的对称点，并写出这些点的坐标．
2. 观察你在第 1 题中写出的各点的坐标，关于 x 轴对称的两点的坐标之间有什么关系？关于 y 轴对称的两点的坐标之间有什么关系？关于原点对称的两点的坐标之间又有什么关系？
3. 在如图所示的国际象棋棋盘中，双方四只马的位置分别是点 $A(b,\ 3)$、$B(d,\ 5)$、$C(f,\ 7)$、$D(h,\ 2)$，请在图中描出它们的位置．



（第 3 题）

4. 你用过计算机中的画图软件吗？当鼠标在空白的工作区移动时，状态栏上就会显示两个变化的数字，这实际上就是鼠标的“坐标”．你能举出一些日常生活中的坐标的例子吗？

2. 函数的图象

在 16.1 节的问题 1 中，我们曾经从图 16.1.1 的气温曲线上获得许多信息，回答了一些问题．现在让我们来作一些理性的思考．先考虑一个简单的问题：你是如何在图中找到各个时刻的气温的？

图 16.1.1 中，有一个平面直角坐标系，它的横轴是 t 轴，表示时间；它的纵轴是 T 轴，表示气温．这一气温曲线实际上给出了某日的气温 T(°C) 与时间 t(h)之间的函数关系．例如，上午 10 时的气温是 2 °C，表现在气温曲线上，就是可以找到这样的对应

“早上 6 点的气温是零下 1 °C”，在图中体现在哪里？

点，它的坐标是(10，2)．实质上也就是说，当 $t=10$ 时，对应的函数值 $T=2$．气温曲线上每一个点的坐标$(t，T)$，表示时间为 t(h)时的气温是 T(℃)．

气温曲线是用图象表示函数关系的一个实际例子．那么，什么是函数的图象呢？

概括 一般来说，函数的图象是由平面直角坐标系中一系列的点组成的．图象上每一点的坐标$(x，y)$表示函数的一对对应值，它的横坐标 x 表示自变量的某一个值，纵坐标 y 表示与该自变量对应的函数值．

▶ **例 1** 画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象．

分析 要画出一个函数的图象，关键是要画出图象上的一些点，为此，首先在自变量的取值范围内，适当取一些自变量的值，并求出对应的函数值．

解 取自变量 x 的一些值，例如 $x=\cdots，-3，-2，-1，0，1，2，3，\cdots$，计算出对应的函数值．为表达方便，可列表如下：

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	…

由这一系列的对应值，可以得到一系列的有序实数对：

…，(−3，4.5)，(−2，2)，(−1，0.5)，(0，0)，(1，0.5)，(2，2)，(3，4.5)，….

在平面直角坐标系中，描出这些有序实数对(坐标)的对应点，如图 16.2.4 所示．

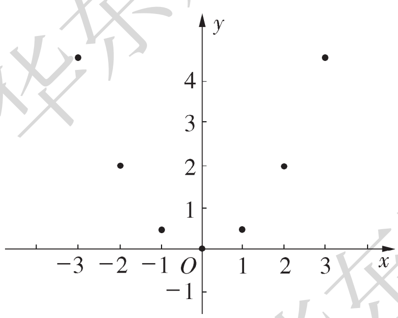


图16.2.4

通常，用光滑曲线依次把这些点连起来，便可得到这个函数的图象，如图16.2.5所示.

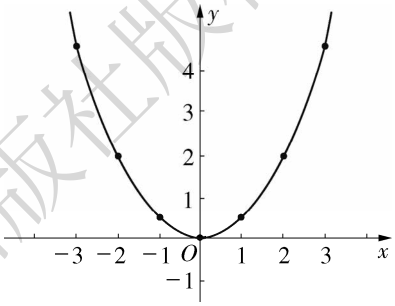


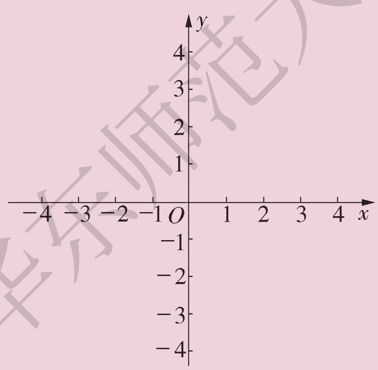
图16.2.5

这里画函数图象的方法，可以概括为列表、描点、连线三步，通常称为描点法.

练习

1. 在所给的平面直角坐标系中画出函数 $y=\frac{1}{2}x$ 的图象.（先填写下表，再描点、连线）

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…								…



（第1题）

2. 画出函数 $y=-\frac{6}{x}$ 的图象.

▶ **例 2** 爷爷和小强经常一起进行早锻炼，主要活动是爬山．有一天，小强让爷爷先上山，然后追赶爷爷，两人都爬上了山顶．图 16.2.6 中的两条线段分别表示小强和爷爷离开山脚的距离 y(m)与爬山所用时间 x(min)之间的函数关系(从小强开始爬山时计时)．

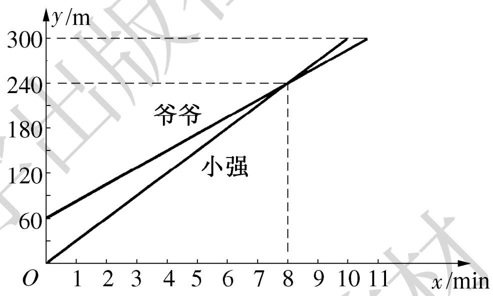


图16.2.6

为了表达的方便，这里平面直角坐标系的横轴和纵轴上取的单位长度不一致，这不影响对问题的表达和理解．

看图回答下列问题：

(1) 小强让爷爷先上山多少米？

(2) 山顶离山脚的距离有多少米？谁先爬上山顶？

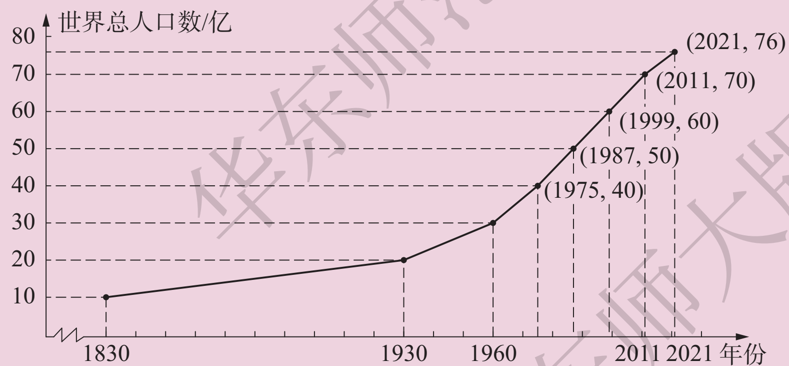
(3) 小强何时赶上爷爷？这时距山脚的距离是多少？

练习

1. 下图为世界总人口数的变化图．根据图象回答：

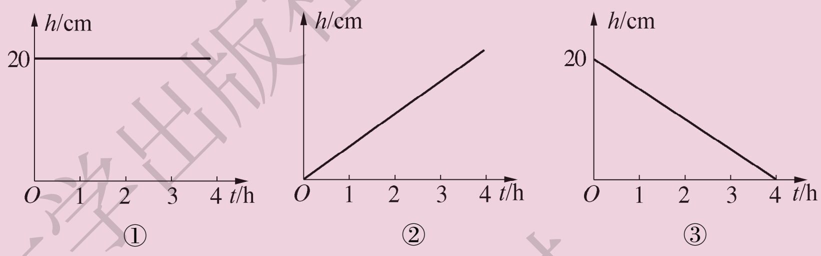
(1) 从 1830 年到 2021 年，世界总人口数呈怎样的变化趋势？

(2) 哪一段时间世界总人口数变化较快？



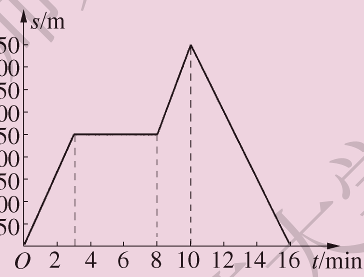
(第 1 题)

2. 一支蜡烛长 20 cm，点燃后每小时燃烧掉 5 cm，下列 3 幅图象中，哪幅能大致刻画出这支蜡烛点燃后剩下的长度 h(cm)与点燃时间 t(h)之间的函数关系？



（第 2 题）

3. 小明从家里出发，外出散步，到一个公共阅报栏前看了一会儿报后，继续散步了一段时间，然后回家．下图描述了小明在散步过程中离家的距离 s(m)与散步所用时间 t(min)之间的函数关系．你能根据图象说出小明散步过程中的一些具体信息吗？



（第 3 题）

试一试

画出 16.1 节例 2(1)(第 34 页)中函数的图象，并结合图象指出重叠部分面积的最大值．

阅读材料

笛卡儿的故事

平面直角坐标系，也称为笛卡儿(René Descartes，1596—1650)直角坐标系，这是以法国哲学家、数学家和物理学家笛卡儿的名字命名的.

笛卡儿从小就喜爱沉思默想，寻根问底．他的父亲很懂得儿童教育法，针对这一特点，常让笛卡儿随自己的心意去学习，不加任何限制.

1612 年，笛卡儿以优异的成绩从中学毕业，同年秋天，来到普瓦捷大学攻读法律．四年以后，他又以优异的成绩获得学位和律师资格．当时，他对学校所学知识的贫乏已经感到极不耐烦，于是，他决定迈开双脚，去阅读世界这本大书，开始了他的军旅生活.

笛卡儿首先来到荷兰．有一天，他看见许多人正盯着城墙上的一块告示牌议论纷纷．笛卡儿请身旁的一位长者把告示牌上的荷兰文译成法文或拉丁文．原来，这是一道数学难题，谁要是答出来，就可以得到一笔奖金，还将被授予“布雷达数学家”的荣誉称号．两天以后，笛卡儿带来了正确的解答，使那位长者大为惊讶．在交谈中，笛卡儿才知道，这位长者是当时颇有名气的多特大学校长艾萨克·贝克曼(Isaac Beeckman，1588—1637)．从此，他俩一起讨论科学问题，贝克曼向笛卡儿介绍数学的最新进展，给了他许多有待研究的问题．笛卡儿从这次成功中看到了自己的数学才能，激起了钻研数学的兴趣.

笛卡儿 1621 年回到巴黎，1628 年为避开俗事而移居荷兰，专心从事研究和写作，1649 年应瑞典女王克里斯蒂娜(Drottning Kristina，1626—1689)的邀请来到瑞典皇宫教她哲学，次年因病逝世.

笛卡儿首先导入运动着的点的坐标概念，使用代数的方法研究几何，创立了解析几何，使数学发生了划时代的变化．“笛卡儿的变数”被革命导师恩格斯誉为“数学中的转折点”．他还是西方现代哲学思想的奠基人之一，他的哲学思想深深影响了之后的几代欧洲人.

由于笛卡儿的哲学和数学思想影响日益深远，法国政府在 1767 年将他的骨灰迎回国内，在他的墓碑上镌刻：笛卡儿，欧洲文艺复兴以来，第一个为人类争取并保证理性权利的人.

习题16.2

A 组

1. 判断下列说法是否正确：

（1）点(2，3)和点(3，2)表示同一个点；

（2）点 (－4， 1) 与点(4， －1) 关于原点对称；

（3）坐标轴上的点的横坐标和纵坐标至少有一个为 0；

（4）第一象限内的点的横坐标和纵坐标均为正数.

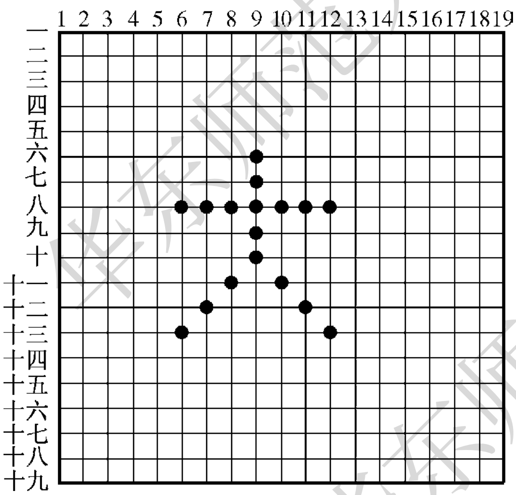
2. 在平面直角坐标系中描出下列各点，顺次用线段将这些点连起来，并将最后一个点与第一个点连起来，看看得到的是什么图形？

$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$，$\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$，$\left(-3\frac{1}{2},\ 1\right)$，$\left(-1\frac{1}{2},\ 3\right)$，$\left(-2\frac{1}{2},\ 3\right)$，

$\left(-\frac{1}{2},\ 6\right)$，$(-1,\ 6)$，$(0,\ 8)$，$(1,\ 6)$，$\left(\frac{1}{2},\ 6\right)$，

$\left(2\frac{1}{2},\ 3\right)$，$\left(1\frac{1}{2},\ 3\right)$，$\left(3\frac{1}{2},\ 1\right)$，$\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$，$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$.

3. 如图是一个围棋棋盘，我们可以用类似于平面直角坐标系的方法表示各个棋子的位置．例如，图中右下角那个棋子的位置可以表示为(12，十三)．请选择图中的几个棋子并写出它们的“位置”（至少写出四个）.



（第 3 题）

4. 画出下列函数的图象，并判断大括号内的各点是否在该函数的图象上：

(1) $y=3x-1$，$\{(0,\ -1),\ (-2,\ -7),\ (1,\ -2),\ (2.5,\ 6.5)\}$；

(2) $y=\dfrac{2}{x+1}\ (x\geqslant 0)$，$\left\{(0,\ 2),\ \left(2,\ \dfrac{2}{3}\right),\ (3,\ 1)\right\}$.

B 组

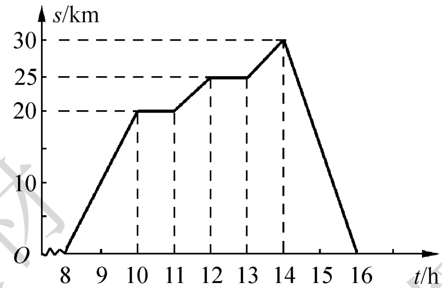
5. 周末，小亮 8 时骑自行车从家里出发，到野外郊游，16 时回到家里．他离家的距离 s(km) 与时间 t(h) 之间的函数关系可以用图中的折线表示．根据图象回答下列问题：

(1) 小亮何时到达离家最远的地方？

(2) 小亮何时第一次休息？

(3) 11 时到 12 时，小亮骑了多少千米？

(4) 返回时，小亮的平均车速是多少？



(第 5 题)

6. 将一个边长为 2 的正方形放在平面直角坐标系中，使它的两条对称轴分别与坐标轴重合，求这个正方形四个顶点的坐标．

16.3 一次函数

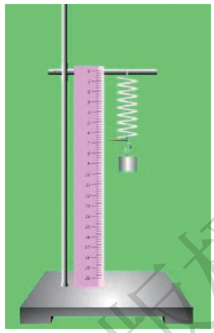
1. 一次函数

问题 1 暑假里小明的爸爸带领全家去北京自驾游．汽车驶上 A 地的高速公路后，小明发现汽车匀速行驶的速度是 95 km/h．已知 A 地直达北京的高速公路全程为 285 km，小明想知道汽车从 A 地驶出后，距北京的路程和汽车在高速公路上行驶的时间有什么关系，以便根据时间估计自己距北京的路程．

分析 汽车距北京的路程随着行车时间的变化而变化．要想找出这两个变化着的量之间的关系，并据此得出相应的值，显然，应该探究这两个变量之间的函数关系式．为此，我们设汽车在高速公路上匀速行驶的时间为 t h，汽车距北京的路程为 s km，则不难得到 s 与 t 之间的函数关系式：

$$s = 285 - 95t. \qquad ①$$

问题 2 弹簧下端悬挂重物，弹簧会伸长．弹簧的长度 y(cm)是所挂重物质量 x(kg)的函数．已知一根弹簧在不挂重物时长 6 cm．在一定的弹性限度内，每挂 1 kg 重物弹簧伸长 0.3 cm．求这个函数关系式．



解 因为每挂 1 kg 重物弹簧伸长 0.3 cm，所以挂 x kg 重物时弹簧伸长 $0.3x$ cm．又因为不挂重物时弹簧的长度为 6 cm，所以挂 x kg 重物时弹簧的长度为 $(0.3x + 6)$ cm，即有

$$y = 0.3x + 6. \qquad ②$$

这就是所求的函数关系式．（其中自变量 x 的取值范围由问题的"弹性限度"确定）

问题 1、问题 2 中得到的两个函数关系式①和②有什么共同点？

概括 上述函数关系式都是用自变量的一次整式表示的，我们称它们为**一次函数**(linear function)．

一次函数通常可以表示为 $y = kx + b$ 的形式，其中 k、b 是常数，$k \neq 0$.

特别地，当 $b = 0$ 时，一次函数 $y = kx$（常数 $k \neq 0$）也叫做**正比例函数**(direct proportional function)．

问题 1、问题 2 中得到的函数，都是一次函数．

思考 前两节(16.1 节和 16.2 节)所出现的函数中，哪些是一次函数？

练习

1. 仓库内原有粉笔 400 盒．如果每个星期领出 36 盒，求仓库内余下的粉笔盒数 Q 与星期数 t 之间的函数关系式．
2. 今年植树节，同学们种的树苗高约 1.80 m．据介绍，这种树苗在 10 年内每年长高约 0.35 m．求树高(m)与年数之间的函数关系式，并算一算 4 年后这些树约有多高．

（第 2 题）

3. 小敏的爸爸为小敏存了一份教育储蓄．首次存入 1 万元，以后每个月存入 500 元，存满 3 万元为止．试用函数关系式刻画存款增长的规律，并求经过多少个月可存满全额．
4. 以上 3 道题中的函数都是一次函数吗？为什么？

2．一次函数的图象

前面，我们已经学习了用描点法画函数的图象，也知道通常可以结合图象研究函数的性质和应用．我们先研究一次函数的图象．

做一做

在同一个平面直角坐标系中画出下列函数的图象：

（1）$y=\frac{1}{2}x$；　　（2）$y=\frac{1}{2}x+2$；

（3）$y=3x$；　　（4）$y=3x+2$．

观察所画出的这些一次函数的图象，你能发现什么？

概括 一次函数 $y=kx+b\ (k\neq 0)$ 的图象是一条直线，通常也称为直线 $y=kx+b$. 特别地，正比例函数 $y=kx\ (k\neq 0)$ 的图象是经过原点 $O(0,0)$ 的一条直线.

几个点可以确定一条直线？画一次函数的图象时，只需要取几个点？

思考 观察上页“做一做”中画出的四个一次函数的图象，比较下列各对一次函数的图象有什么共同点和不同点：

① $y=3x$ 与 $y=3x+2$；

② $y=\frac{1}{2}x$ 与 $y=\frac{1}{2}x+2$；

③ $y=3x+2$ 与 $y=\frac{1}{2}x+2$.

你能否从中发现一些规律？对于直线 $y=kx+b$（k、b 是常数，$k\neq 0$），常数 k 和 b 的取值对于直线的位置各有什么影响？

我们可以发现，两个一次函数，当系数 k 相同、b 不相同时（如 $y=3x$ 与 $y=3x+2$），有

共同点：____________________________________；

不同点：____________________________________.

而当 b 相同、k 不相同时 $\left(\text{如 } y=3x+2 \text{ 与 } y=\frac{1}{2}x+2\right)$，有

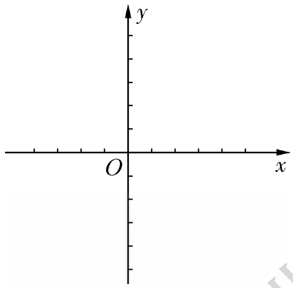
共同点：____________________________________；

不同点：____________________________________.

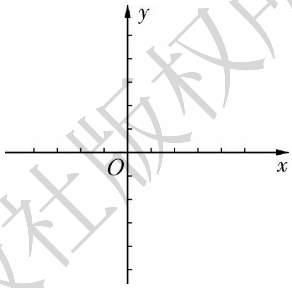
▶ **例1** 分别在同一个平面直角坐标系中（图 16.3.1）画出下列函数的图象：

（1）$y=2x$ 与 $y=2x+3$；

（2）$y=2x+1$ 与 $y=\frac{1}{2}x+1$.



（1）



（2）

图16.3.1

画一次函数的图象时，你取的是哪两个点？怎样取比较简便？

练习

1. 在同一个平面直角坐标系中画出下列函数的图象，并说出它们之间的关系：

（1）$y=-2x$；　　（2）$y=-2x-4$.

2. 填空：

（1）将直线 $y=3x$ 向下平移 2 个单位长度，得到直线____________；

（2）将直线 $y=-x-5$ 向上平移 5 个单位长度，得到直线____________.

▶ **例 2**　求直线 $y=-2x-3$ 与 x 轴和 y 轴的交点，并画出这条直线.

解　x 轴上的点的纵坐标等于 0，y 轴上的点的横坐标等于 0．交点同时在直线 $y=-2x-3$ 上，它的坐标$(x,\ y)$应满足 $y=-2x-3$. 于是，由 $y=0$ 可求得 $x=-1.5$，点$(-1.5,\ 0)$就是直线 $y=-2x-3$ 与 x 轴的交点；由 $x=0$ 可求得 $y=-3$，点$(0,\ -3)$就是直线 $y=-2x-3$ 与 y 轴的交点.

如图 16.3.2，过点$(-1.5,\ 0)$和点$(0,\ -3)$作直线，就是所求的直线 $y=-2x-3$.

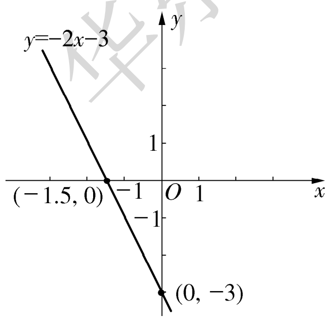


图16.3.2

这里是取哪两个特殊点来作直线的？这样取点有什么好处？

▶ **例 3**　本节问题 1 中，汽车距北京的路程 s(km)与汽车在高速公路上行驶的时间 t(h)之间的函数关系式是 $s = 285 - 95t$，试画出这个函数的图象.

分析　在实际问题中，我们可以在表示时间的 t 轴和表示路程的 s 轴上分别选取适当的单位长度，画出平面直角坐标系，如图 16.3.3 所示.

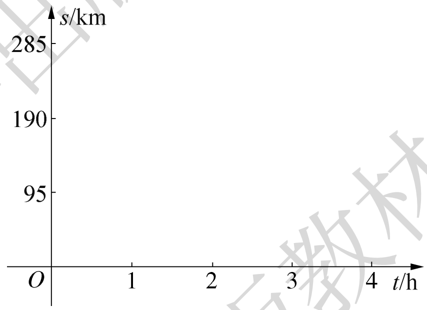


图16.3.3

画出这个函数的图象，并讨论：

这里自变量 t 的取值范围是什么？函数的图象是怎样的图形？

这里的图象是直线的一部分（一条线段），线段的两个端点反映了怎样的实际情境？

练习

1. 求下列直线与 x 轴和 y 轴的交点，并在同一个平面直角坐标系中画出它们的图象：
   (1) $y = 4x - 1$；
   (2) $y = -\frac{2}{3}x + 2$.
2. 利用本节问题 1 中函数的图象，求汽车在高速公路上行驶 2 h 后，小明距北京的路程.

3. 一次函数的性质

我们知道，函数反映了现实世界中量的变化规律，那么一次函数有什么性质呢？

如图 16.3.4，在函数 $y=\dfrac{2}{3}x+1$ 的图象中，我们看到：当一个点在直线上从左向右移动(自变量 x 从小到大变化)时，它的位置也在逐步从低到高变化(函数 y 的值也从小到大变化)．

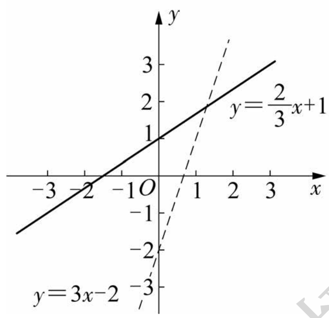


图16.3.4

这就是说，函数值 y 随自变量 x 的增大而________．

函数 $y=3x-2$ 的图象(图 16.3.4 中的虚线)是否也有这种现象呢？

探索 如图 16.3.5，再观察函数 $y=-x+2$ 和 $y=-\dfrac{3}{2}x-1$ 的图象，作类似的研究．

这两个函数有什么共同性质？它与前两个函数有什么不同？

从对以上四个函数的研究结果中，你能否概括出关于一次函数性质的一般结论？

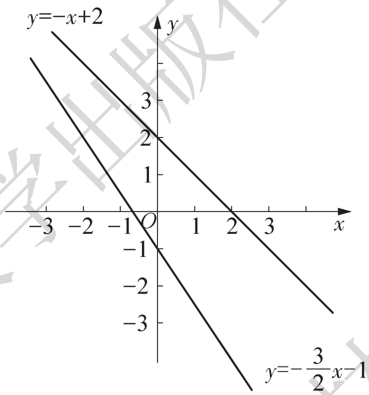


图16.3.5

概括 一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ 有下列性质：

(1) 若 $k>0$，y 随 x 的增大而增大，这时函数的图象从左到右上升；

(2) 若 $k<0$，y 随 x 的增大而________，这时函数的图象从左到右________．

这些性质在本节问题 1 和问题 2 中，反映了怎样的实际意义？

你能证明这些性质吗？

做一做

画出函数 $y=-2x+2$ 的图象，结合图象回答：在这个函数中，随着自变量 x 的增大，函数值 y 是增大还是减小？它的图象从左到右怎样变化？

练习

1. 已知函数 $y=(m-3)x-\dfrac{2}{3}$（m 是常数），回答下列问题：

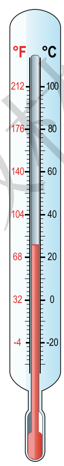
（1）当 m 取何值时，y 随 x 的增大而增大？

（2）当 m 取何值时，y 随 x 的增大而减小？

2. 已知点 $(-1,\ a)$ 和点 $\left(\dfrac{1}{2},\ b\right)$ 都在直线 $y=\dfrac{2}{3}x+3$ 上，试比较 a 与 b 的大小．你能想出几种判断方法？

4．求一次函数的表达式

▶ **例 4** 世界大部分国家都采用摄氏温标预报天气，但美国、英国等国家则采用华氏温标．在研究性学习活动中，某小组同学查阅到以下资料：



在 1 标准大气压下，把冰水混合物的温度规定为 0 摄氏度，记作 0 ℃；把沸水的温度规定为 100 摄氏度，记作 100 ℃．

在 1 标准大气压下，把冰水混合物的温度规定为 32 华氏度，记作 32 ℉；把沸水的温度规定为 212 华氏度，记作 212 ℉．

设某一时刻温度计上的华氏温度为 y(℉)，摄氏温度为 x(℃)，已知 y 是 x 的一次函数，试写出这个一次函数的表达式．

分析 已知 y 是 x 的一次函数，函数的表达式可写成 $y=kx+b\,(k\neq 0)$ 的形

式，问题就转化为求 k 和 b 的值.

资料显示，在 1 标准大气压下，冰水混合物的摄氏温度为 0 ℃，华氏温度为 32 ℉；沸水的摄氏温度为 100 ℃，华氏温度为 212 ℉．这实际上给出了 x 和 y 的两组对应值：当 $x=0$ 时，$y=32$；当 $x=100$ 时，$y=212$. 分别将它们代入函数的表达式 $y=kx+b$，得到关于 k 和 b 的二元一次方程组，进而求出 k 和 b 的值.

解 设所求一次函数的表达式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，根据题意，得

$$\begin{cases}0\cdot k+b=32,\\100k+b=212.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}k=1.8,\\b=32.\end{cases}$$

所以，所求一次函数的表达式为

$$y=1.8x+32.$$

这种先设待求函数的表达式(其中含有待定系数)，再根据条件列出方程或方程组，求出待定系数，从而得到所求结果的方法，叫做**待定系数法**(method of undetermined coefficient).

想一想：式中的一次项系数 1.8 和常数项 32 有怎样的实际意义？

在求得的函数的表达式中，一次项系数 1.8 表示摄氏温度 x 每增加 1 摄氏度时华氏温度增加的度数，常数项 32 表示摄氏温度为 0 摄氏度时所对应的华氏温度的度数.

做一做

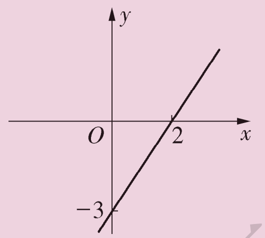
已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点$(-1,\ 1)$和点$(1,\ -5)$，求当 $x=5$ 时的函数值.

讨论 （1）在上页的“做一做”中，已知条件是一次函数图象上两个点的坐标，它反映了自变量 x 与因变量 y 的值之间怎样的对应关系？

（2）题目中并没有要求写出函数的表达式，解题时却通常首先求出函数的表达式，它在这里起了什么作用？

练习

1. 已知一次函数的图象如图所示，写出这个函数的表达式.



（第 1 题）

2. 写出两个一次函数，使它们的图象都经过点$(-2,\ 3)$.

3. 温度计是利用水银（或酒精）热胀冷缩的原理制作的，温度计中水银（或酒精）柱的高度 y(cm) 是温度 x(°C) 的一次函数．某种型号的实验用水银温度计能测量 -20 °C 至 100 °C 的温度，已知 10 °C 时水银柱高 10 cm，50 °C 时水银柱高 18 cm．求这个函数的表达式.

阅读材料

小明算得正确吗

爸爸准备为小明买一双新运动鞋，但要小明自己算出穿几码的鞋．小明回家量了一下妈妈 36 码的鞋子长 23 cm，爸爸 41 码的鞋子长 25.5 cm．那么自己穿的 21.5 cm 长的鞋子是几码呢？

想了一下，小明动笔了：

设鞋长是 x cm，鞋子的码数是 y，那么 y 与 x 之间的函数关系式可能是

$$y = kx + b\ (k \neq 0).$$

这里有两个待定系数——k 和 b．小明把妈妈和爸爸所穿鞋子的长度和码数两组对应值分别代入上式，得

$$\begin{cases}23k+b=36,\\25.5k+b=41.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}k=2,\\b=-10.\end{cases}$$

所以 y 与 x 之间的函数关系式可能是

$$y=2x-10.$$

小明想了想，又去隔壁问了小东哥哥，了解到他所穿的 38 码的鞋子长 24 cm，回来后代入检验，恰好适合所得到的函数关系式，他高兴地说："对了，对了！"很快，他算出了自己鞋子的码数：

$$2\times21.5-10=33.$$

小明的假设和计算是否正确呢？

习题16.3

A 组

1. 已知等腰三角形的周长是 18 cm，腰长 y(cm)是底边长 x(cm)的函数，试写出这个函数关系式，并写出自变量的取值范围.

2. 某市出租车计费标准如下：行程不超过 3 km，收费 10 元；超过 3 km 部分，按 2.3 元/km 计算．求车费 P(元)与行驶路程 s(km)之间的函数关系式，并分别求出当路程为 2.5 km 和 7 km 时应付的车费.

3. 填空：

(1) 直线 $y=4x-3$ 经过点(____, 0)、(0, ____)；

(2) 直线 $y=-\frac{1}{3}x+2$ 经过点(____, 0)、(0, ____).

4. 分别在同一个平面直角坐标系中画出下列一次函数的图象，并指出每小题中两条直线的位置关系：

（1）$y=-x+2$ 与 $y=-x-1$；

（2）$y=3x-2$ 与 $y=\frac{2}{3}x-2$.

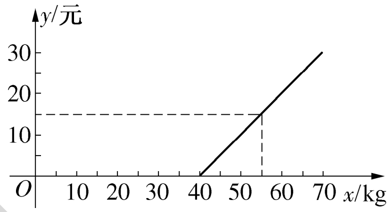
5. 画出直线 $y=-2x+3$，并借助图象找出：

（1）直线上横坐标是 2 的点；

（2）直线上纵坐标是−3 的点；

（3）直线上到 y 轴的距离等于 2 的点.

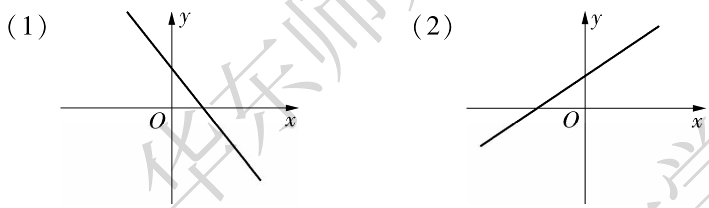
6. 如图是某长途汽车站旅客携带行李收费示意图．试说明其收费方法，并写出行李费 y(元)与行李质量 x(kg)之间的函数关系式.



（第 6 题）

B 组

7. 一次函数 $y=kx+b$ 的图象位置大致如图所示，试分别确定 k、b 的正负号，并说出函数的性质.



（第 7 题）

8. 根据下列条件求出相应函数的表达式：

（1）直线 $y=kx+5$ 经过点$(-2,\ -1)$；

（2）一次函数中，当 $x=1$ 时，$y=3$；当 $x=-1$ 时，$y=7$.

9. 小华暑假去某地旅游，导游要求大家上山时多带一件衣服，并在介绍当地山区地理环境时说，海拔每增加 100 m，气温下降 0.6 ℃．小华在山脚下看了一下随身带的温度计，气温为 34 ℃．试写出山上气温 T(℃)与该处距山脚垂直高度 h(m)之间的函数关系式．当小华乘缆车到达山顶时，发现温度为 29.8 ℃，求山高.

（第 9 题）

16.4 反比例函数

1. 反比例函数

问题1 甲、乙两地相距 120 km，汽车从甲地匀速驶往乙地．显然，汽车的行驶时间由行驶速度确定，时间是速度的函数，试写出这个函数关系式．

分析 和其他实际问题一样，要探求两个变量之间的关系，应先选用适当的符号表示变量，再根据题意列出相应的函数关系式．

设汽车行驶的速度是 v km/h，从甲地到乙地的行驶时间是 t h．因为在匀速运动中，时间 = 路程 ÷ 速度，所以

$$t = \_\_\_\_\_\_\_\_. \quad ①$$

问题2 学校课外生物小组的同学准备自己动手，用旧围栏建一个面积为 24 m^2 的长方形饲养场．设它的一边长为 x(m)，求另一边的长 y(m) 与 x 之间的函数关系式．

分析 根据长方形的面积公式，可知

$$xy = 24,$$

所以

$$y = \_\_\_\_\_\_\_\_. \quad ②$$

①和②这两个函数关系式有什么共同点?

概括

上述函数关系式都具有 $y=\frac{k}{x}$ 的形式．一般地，形如 $y=\frac{k}{x}$(k 是常数，$k \neq 0$) 的函数叫做**反比例函数**(inverse proportional function)．反比例函数中，自变量的取值范围是不等于 0 的一切实数．

问题 1 和问题 2 中得到的函数，都是反比例函数．

练习

1. 写出下列各问题中的函数关系式，并指出它们是什么函数：

 (1) 三角形的面积 $S(\mathrm{cm}^2)$ 是常数时，它的某一边的长 $y(\mathrm{cm})$ 是该边上的高 $x(\mathrm{cm})$ 的函数；

 (2) 百米赛跑中，某运动员的平均速度 $v(\mathrm{m/s})$ 是他的成绩 $t(\mathrm{s})$（跑完全程的时间）的函数.

2. 试用描点作图法画出上页问题 2 中函数的图象.

2. 反比例函数的图象和性质

在上面练习第 2 题中，我们画出了上页问题 2 中函数 $y=\frac{24}{x}$ 的图象，发现它并不是直线. 那么它是怎样的曲线呢？现在我们来考察反比例函数的图象，探究它有什么性质.

▶ **例 1** 画出函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象.

解 这个函数中，自变量 x 的取值范围是不等于 0 的一切实数，列出 x 与 y 的对应值表：

x	…	−6	−3	−2	−1	…	1	2	3	6	…
y	…	−1	−2	−3	−6	…	6	3	2	1	…

由这些有序实数对，先在平面直角坐标系中描出相应的点 $(-6,\ -1)$、$(-3,\ -2)$、$(-2,\ -3)$ 等，再用光滑曲线分别将第一象限和第三象限内的各

为什么不能将所有这些点用一条曲线连起来?

点依次连起来，就得到反比例函数的图象，如图16.4.1 所示.

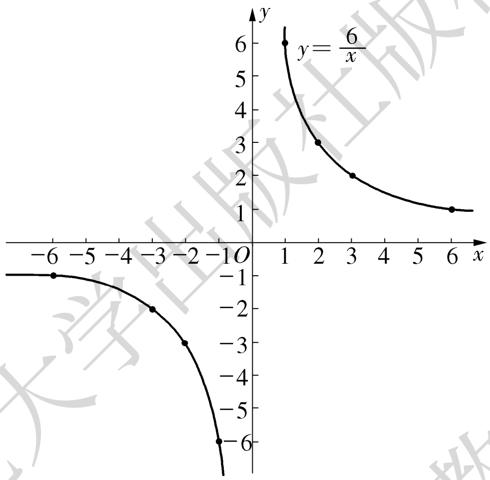
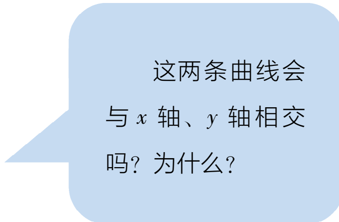


图16.4.1



这个函数的图象有两支，通常称为**双曲线**(hyperbola).

试一试

画出函数 $y=-\frac{6}{x}$ 的图象.

探索

(1) 函数 $y=-\frac{6}{x}$ 的图象在哪两个象限？与函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象有什么不同？

(2) 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在哪两个象限由什么确定？

(3) 试由所画出的两个函数的图象，总结一下反比例函数的变化规律：随着自变量 x 的增大，函数值 y 将怎样变化？

概括

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 有下列性质：

（1）若 $k>0$，函数的图象在第________、________象限，在每个象限内，曲线从左向右下降，也就是说，当 $x>0$（或 $x<0$）时，y 随 x 的增大而________；

（2）若 $k<0$，函数的图象在第________、________象限，在每个象限内，曲线从左向右上升，也就是说，当 $x>0$（或 $x<0$）时，y 随 x 的增大而________.

这一性质在本节问题 1 和问题 2 中反映了怎样的实际意义？

思考

这里与一次函数不同，强调了“在每个象限内”，应该怎么理解？

▶ **例 2** 已知 y 是 x 的反比例函数，当 $x=2$ 时，$y=\frac{2}{3}$，求这个反比例函数的表达式.

分析 我们在学习一次函数时，已经学会了应用待定系数法求一次函数的表达式. 同样，我们可以用待定系数法求这个反比例函数的表达式.

解 设这个反比例函数的表达式为____________（其中 k 为待定系数）.

已知当 $x=2$ 时，$y=\frac{2}{3}$，可得______________.

可以求得 $k=$________.

所以这个反比例函数的表达式是______________.

练习

1. 写出下列各问题中两个变量间的函数关系式，指出哪些是正比例函数，哪些是反比例函数，哪些既不是正比例函数也不是反比例函数：

（1）小红 1 min 可以制作 2 朵花，x min 可以制作 y 朵花；

（2）体积为 $100\ \text{cm}^3$ 的长方体，高为 h cm 时，底面积为 $S\ \text{cm}^2$；

（3）用一根长 50 cm 的铁丝弯成一个长方形，一边长为 x cm 时，面积为 $y\ \text{cm}^2$；

（4）小李接到一项检修管道的任务，已知管道长 100 m，每天能检修 10 m，x 天后剩下的未检修管道长为 y m．

2. 在同一个平面直角坐标系中画出函数 $y=\frac{3}{x}$ 与 $y=-\frac{3}{x}$ 的图象.

习题16.4

A 组

1. 试举出两个实际生活中运用到反比例函数的例子.

2. 由下列条件求反比例函数的表达式：

（1）当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$y=\frac{4}{3}$；

（2）图象经过点（－3，2）.

3. 画出下列函数的图象：

（1）$y=\frac{1}{x}$；

（2）$y=-\frac{10}{x}$.

4. 已知 y 是 x 的反比例函数，且当 $x=3$ 时，$y=8$.

（1）求这个函数的表达式；

（2）求当 $x=2\frac{2}{3}$ 时，y 的值；

（3）当 x 取何值时，$y=\frac{3}{2}$？

5. 已知一个一次函数的图象与 y 轴交点的纵坐标是 5，与另一个反比例函数的图象交于点（－3，2），求这两个函数的表达式.

B 组

6. 已知反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象与一次函数 $y=-3x$ 的图象的一个交点的横坐标是 1.

（1）求反比例函数的表达式.

（2）两函数图象是否有其他交点？如果有，求出它的坐标.

7. 画出反比例函数 $y=\dfrac{4}{x}$ 的图象，结合图象，解答下列问题：

（1）当 $-4\leqslant x\leqslant -1$ 时，求函数 y 的最大值和最小值；

（2）当 x 分别取 -4 到 0 和 0 到 1 之间的实数时，描述函数值的变化趋势.

16.5 实践与探索

问题 1 某单位准备印制一批证书．当地有甲、乙两个印刷厂，它们的印制质量都很好．甲厂收费分为制版费和印刷费两部分；乙厂不收制版费，直接按印刷数量收费，当印刷证书超过 2 千本时单价有优惠．甲、乙两厂的收费 y(千元)关于印制的证书数量 x(千本)的函数图象如图 16.5.1 所示.

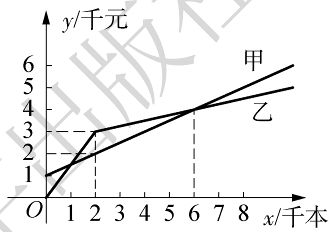


图16.5.1

（1）根据图象回答：

① 甲厂的制版费及印刷费单价各是多少？

② 印制证书多少本时，两厂实际收费相同？

③ 当印制证书 8 千本时，选择哪个印刷厂比较划算？

（2）如果甲厂想把 8 千本证书印制的订单争取到手，在不降低制版费的前提下，印刷费部分的单价至少应降低多少？

思考

（1）“收费相同”在图象上怎样反映出来？

（2）如何在图象上看出收费的多少？

我们看到，两个一次函数图象的交点处，自变量和对应的函数值同时满足两个函数关系式. 而这两个函数关系式可以看成关于 x、y 的两个方程，所以交点的坐标就是这两个方程组成的方程组的解.

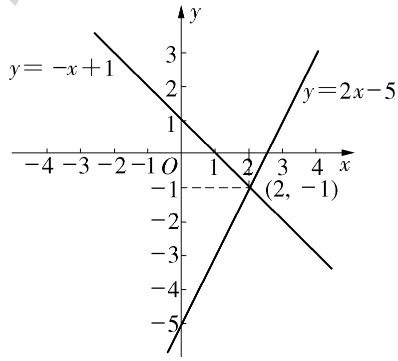


图16.5.2

例如，图 16.5.2 中的两条直线 $y=2x-5$ 和 $y=-x+1$，它们的交点坐标（2，－1）就是方程组 $\begin{cases} y=2x-5, \\ y=-x+1 \end{cases}$ 的解 $\begin{cases} x=2, \\ y=-1. \end{cases}$

▶ **例** 利用一次函数的图象，求二元一次方程组 $\begin{cases} y=x+5, \\ x+2y=-2 \end{cases}$ 的解.

分析 方程组中第一个方程已经是一次函数的形式，第二个方程可变形为一次函数的形式：$y=-\dfrac{1}{2}x-1$.

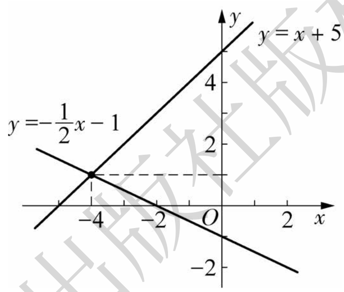


图16.5.3

如图 16.5.3，分别作出一次函数 $y=x+5$ 和 $y=-\dfrac{1}{2}x-1$ 的图象，得到它们的交点坐标$(-4, 1)$，即方程组的解为 $\begin{cases} x=-4, \\ y=1. \end{cases}$

练习

1. 在 16.3 节问题 1 中，已知小明由 A 地乘车前往北京，汽车距北京的路程与行驶时间之间的函数关系式为 $s=285-95t$，若另有小亮同时从北京乘车沿同一路线回 A 地，其函数关系式为 $s=105t$. 这里 t(h)表示汽车行驶的时间，s(km)表示汽车距北京的路程. 在同一个平面直角坐标系中画出这两个函数的图象，并说明交点的实际意义.

2. 利用图象解下列方程组：

（1）$\begin{cases} y=-2x-1, \\ y=\dfrac{1}{2}x+4; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2x-y=2, \\ x+y=-5. \end{cases}$

问题 2 画出函数 $y=\frac{3}{2}x+3$ 的图象，根据图象，说明：

(1) x 取什么值时，函数值 y 等于 0？

(2) x 取什么值时，函数值 y 大于 0？

思考

由问题 2，想一想：一元一次方程 $\frac{3}{2}x+3=0$ 的解、不等式 $\frac{3}{2}x+3>0$ 的解集与函数 $y=\frac{3}{2}x+3$ 的图象有什么关系？

练习

1. 不等式 $\frac{3}{2}x+3\leqslant 0$ 的解集与函数 $y=\frac{3}{2}x+3$ 的图象有什么关系？
2. 一次函数 $y=(a-2)x-3+a$ 的图象经过第一、三、四象限，求 a 的取值范围．
3. 编制一道相关的练习题，继续探究一次函数与一元一次方程、一元一次不等式的关系．

问题 3 为了研究某合金材料的体积 $V(\text{cm}^3)$ 随温度 $t(°\text{C})$ 变化的规律，对一个用这种合金制成的圆球测得相关数据如下：

$t/°\text{C}$	-40	-20	-10	0	10	20	40	60
V/cm^3	998.3	999.2	999.6	1 000	1 000.3	1 000.7	1 001.6	1 002.3

能否据此寻求 V 与 t 之间的函数关系式？

分析 在平面直角坐标系中描出各对数值所对应的点，我们发现，这些点大致位于同一条直线上，可知 V 与 t 之间近似地符合一次函数关系．我们可以用一条直线去尽可能地与这些点相贴近，求出近似的函数关系式．如图 16.5.4 所示的就是一条这样的直线，较接近的点可考虑取（10，1 000.3）和（60，1 002.3）．你也可以将直线稍稍挪动一下，换上

试一试，求出近似的函数关系式．

其他适当的两点，试一试.

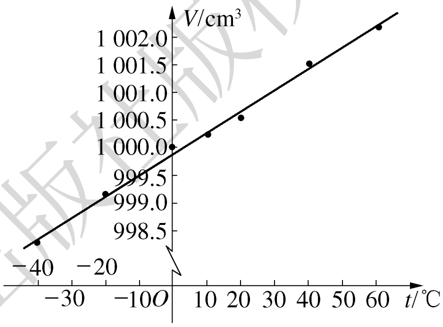


图16.5.4

概括 我们曾采用待定系数法求得一次函数和反比例函数的表达式．但是现实生活中的数量关系是错综复杂的，在实践中得到的一些变量的对应值，有时很难精确地判断它们有怎样的函数关系，需要我们根据经验分析，进行近似计算和修正，列出比较接近的函数关系式.

练习

小刚观察了学校新添置的一批课桌椅，发现它们可以根据人的身高调节高度．他测量了一套课桌椅上的四档高度，得到如下数据：

椅面高 x/cm	37	40	42	45
桌高 y/cm	70	75	78	82.5

请你和同学一起讨论，研究 y 与 x 可能满足什么函数关系.

信息技术应用

借助计算器预测合金球的大小

在第 16.5 节问题 3 中，我们研究了某合金球的体积随着温度变化而变化的规律．结合这些数据，你能预测一下，当温度为 200 °C 时，该合金球的体积有多大吗？（已知该合金的熔点为 1 000 °C）

为了方便，我们把这些数对进行分组编号：

组别	1	2	3	4	5	6	7	8
t/°C	−40	−20	−10	0	10	20	40	60
V/cm^3	998.3	999.2	999.6	1 000	1 000.3	1 000.7	1 001.6	1 002.3

通过在平面直角坐标系中描点发现，过某两点的直线似乎与这些点较为贴近．例如选取第 5 组和第 8 组这两组数对，我们可以得到贴近直线对应的一次函数关系式为

$$y = 0.04x + 999.9,$$

令 $x = 200$，得 $y = 1\,007.9$．

由此我们预测，当温度为 200 °C 时，该合金球的体积大约为 1 007.9 cm^3．

当然也有同学感到另两组数对较为合适，得到的贴近直线对应的一次函数关系式不一样，那么，预测结果是不是相差很大呢？

哪条直线会“最贴近”这些数对所对应的点呢？

我们可以采用科学的方法找到那条“最贴近”这些数对所对应的点的直线．

下面我们借助计算器找到那条我们所需要的直线，计算器内部运用的就是这样一种科学方法，即“回归分析”．

具体操作步骤如下：

（1）按，打开计算器；

（2）按打开主屏幕，按方向键选中“统计”应用图标后，按 OK 进入“统计”应用，再按 OK 启动“双变量统计”计算功能；

（3）按(−)④⓪EXE(−)②⓪EXE(−)①⓪EXE⓪EXE①⓪EXE②⓪EXE④⓪EXE⑥⓪EXE依次输入 x 的数据，按 > ∨ 将光标移动到 y 列的第一行，类似地依次输入 y 的数据，每输入完一个数据按EXE确认输入，如图 1 所示；

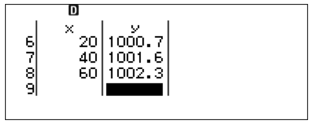


图 1

（4）按 OK 打开数据处理菜单，按 ∨ OK 打开回归计算结果菜单，按 OK 得到回归直线方程 $y=ax+b$ 的相关数据，如图 2 所示．

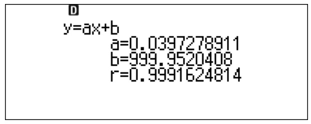


图 2

其中，a 和 b 分别为一次函数 $y=ax+b$ 的系数，r 是相关系数，$|r|$ 越接近 1，表示 y 与 x 的线性相关性越强．

因此，贴近直线对应的一次函数关系式近似为 $y = 0.039\,727\,891\,1x + 999.952\,040\,8$．令 $x=200$，得 $y \approx 1\,007.897\,619\,02$，即预测当温度为 200 °C 时，该合金球的体积大约为 $1\,007.897\,619\,02\ \text{cm}^3$．

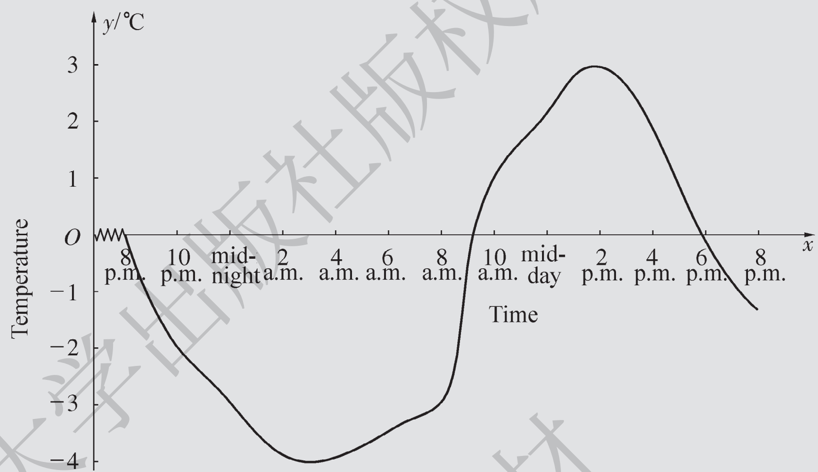
这个结果与前面的预测结果十分接近．与你的预测结果也很接近吗？

阅读材料

The Graph of a Function

A function is a rule that assigns exactly one output value to each input value. A function can be presented by its graph, which, by definition, is obtained by drawing the input-output pairs in a coordinate plane as the input varies. Thus, one can read from the graph the output value of the function once the input value is given. In many cases, some other properties of the function can also be seen directly from the graph.

For example, the following graph shows the air temperature as a function of the time in some place during 24 hours in January. That is, the time is regarded as the input, and the air temperature at the given time as the corresponding output of the function.



Can you tell me:

(a) What was the temperature at 4 p.m.?

(b) When was the temperature -3℃?

(c) What was the lowest temperature?

(d) When was it warmest?

(e) When was the temperature zero?

(f) For how long was the temperature below -2℃?

习题16.5

A 组

1. 联系一次函数的图象，回答下列问题：

（1）当 $k>0$ 时，函数 $y=kx$ 的图象经过哪几个象限？当 $k<0$ 时呢？

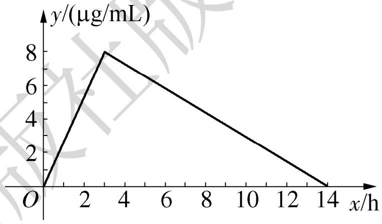
（2）当 $k>0$，$b>0$ 时，函数 $y=kx+b$ 的图象不经过哪个象限？当 $k>0$，$b<0$ 时呢？

2. 已知直线 $y=2x+1$ 和 $y=3x+b$ 的交点在第三象限，写出常数 b 可能的两个取值.

3. 当 x 取何值时，函数 $y=4x-3$ 的图象在第四象限？

4. 利用一次函数的图象，求二元一次方程组 $\begin{cases} y=3x-6, \\ x+y=4 \end{cases}$ 的解.

5. 药品研究所开发一种抗菌新药．经多年动物实验，首次用于临床人体试验．测得成人服药后血液中药物浓度 y(μg/mL)与服药后时间 x(h)之间的函数关系如图所示．



（第 5 题）

（1）根据图象说出服药后多长时间血液中药物浓度最高；

（2）根据图象分别求出血液中药物浓度上升阶段和下降阶段 y 与 x 之间的函数关系式．

B 组

6. 已知一个一次函数的图象与一个反比例函数的图象交于点 $P(-2,\ 1)$、$Q(1,\ m)$．

（1）分别求出这两个函数的表达式．

（2）在同一个平面直角坐标系中画出这两个函数的图象，根据图象回答：当 x 取何值时，一次函数的值大于反比例函数的值？

7. 学校准备去春游．甲、乙两家旅行社原价都是每人 60 元，且都表示对学生优惠．甲旅行社表示：全部 8 折收费；乙旅行社表示：若人数不超过 30 人则全部按 9 折收费，若超过 30 人则全部按 7 折收费．

（1）试分别写出甲、乙两家旅行社实际收取的总费用 y(元)与参加春游的学生人数 x 之间的函数关系式(其中对乙旅行社应按人数是否超过 30 人分两种情况列出)；

（2）讨论选择哪家旅行社较合算；

（3）试在同一个平面直角坐标系中画出小题(1)中写出的两个函数的图象，并根据图象解释小题(2)讨论的结果．

数学活动

探索函数增减性的证明

在研究一次函数的性质时，我们通过观察它的图象发现：当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小. 它们分别对应于函数的图象从左向右上升，或者从左向右下降. 我们可以证明这一性质的正确性.

我们知道，要比较 a、b 两个数的大小，可以先求出它们的差 $a-b$. 若 $a-b<0$，则 $a<b$；若 $a-b=0$，则 $a=b$；若 $a-b>0$，则 $a>b$. 反之也正确. 根据这一事实，可以证明上述结论.

设一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$，当自变量 x 分别取 x_1、 x_2，且 $x_1<x_2$ 时，对应的函数值分别为 $y_1=kx_1+b$， $y_2=kx_2+b$. 它们的差为

$$y_2-y_1=(kx_2+b)-(kx_1+b)=kx_2-kx_1=k(x_2-x_1).$$

由假设 $x_1<x_2$ 可知，$x_2-x_1>0$，这样，我们就得到如下结论：

（1）当 $k>0$ 时，$k(x_2-x_1)>0$，即 $y_2-y_1>0$，亦即 $y_2>y_1$. 也就是说，y 随 x 的增大而增大.

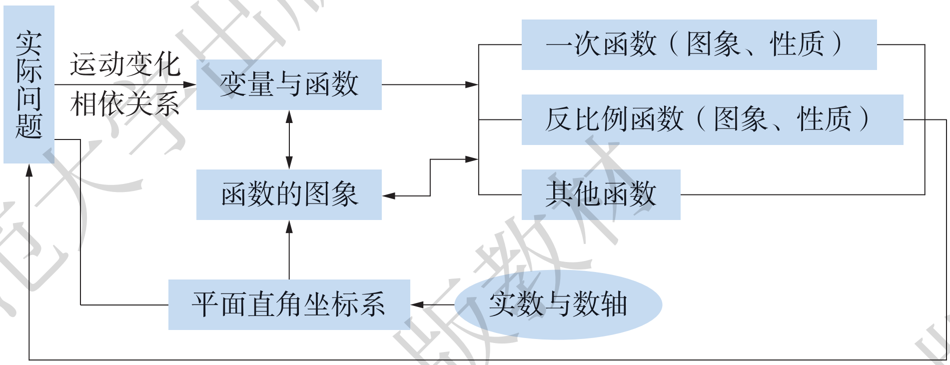
（2）当 $k<0$ 时，$k(x_2-x_1)<0$，即 $y_2-y_1<0$，亦即 $y_2<y_1$. 也就是说，y 随 x 的增大而减小.

这就是一次函数的增减性.

试用类似的方法证明反比例函数的增减性.

小结

一、知识结构



二、要点

1. 现实世界处在不停地运动变化中．我们通过一些实际问题，引进了变量的概念，并从变量之间的对应来刻画运动变化，建立函数的概念．同时，通过实例，理解常用的函数表示法．

2. 与数轴建立了直线上的点与实数之间的对应一样，平面直角坐标系建立了平面上的点与有序实数对(点的坐标)之间的对应，它们是数形结合的基础．

“函数的图象”是平面直角坐标系在本章中的一个应用．用图象表示函数——图象上每一点的坐标表示函数的自变量和因变量的一对对应值．图象的直观性，可以帮助我们探索和研究函数的性质．例如，一个函数的图象，如果从左到右是上升(或下降)的，则它反映了这个函数的性质——当自变量增大时，函数值随之增大(或减小)．

3. 本章重点研究一次函数(包括正比例函数)和反比例函数．这是两种常见的函数，它们刻画了现实世界中两类常见的运动变化规律．例如一次函数，又称线性函数，它刻画了一种均匀变化的规律．

我们经历了对这两种函数研究的全过程：从实际问题开始，考察一些运动现象(例如匀速运动、弹簧的伸长等)，找出反映运动变化的变量，并用符号表

示(例如时间 t、路程 s 等)；分析运动现象中的数量关系，列出函数关系式；分析所列函数关系式的特点，抽象出一次函数和反比例函数的概念；用描点法画出函数(举数字系数的例子)的图象，并通过观察图象，概括出一次函数和反比例函数的性质；函数的应用．这样，我们不仅理解了这两种函数的意义、图象和性质，而且感受到研究函数的常见方法．

4．实际问题中，通常采用待定系数法，根据一定条件确定一次函数和反比例函数的表达式，这是一种重要的数学方法，以后还会有更多的应用．

5．数学知识之间有着密切的联系．本章探讨了一次函数与一次方程、一次不等式之间的联系，加深了我们对有关知识的理解，提高了我们的综合应用能力．

复习题

A 组

1. 选择题

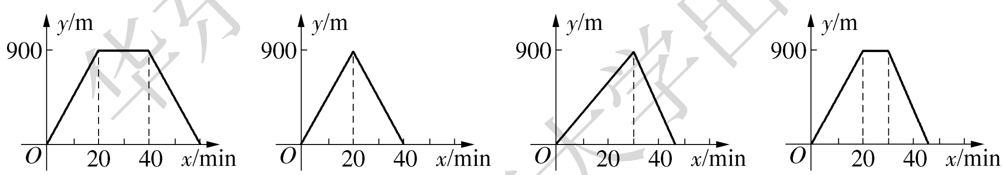
(1) 点 $(0, -2)$ 在(　　).

A. x 轴上　　B. y 轴上　　C. 第三象限　　D. 第四象限

(2) 若点 $P(2m-1, 3)$ 在第二象限，则 m 的取值范围是(　　).

A. $m>\frac{1}{2}$　　B. $m<\frac{1}{2}$　　C. $m\geqslant-\frac{1}{2}$　　D. $m\leqslant\frac{1}{2}$

(3) 小红爷爷饭后出去散步，从家里出发走 20 min 到一个离家 900 m 的街心花园，与朋友聊天 10 min 后，用 15 min 返回家里. 下列图形中表示小红爷爷离家的距离 y(m) 与离家的时间 x(min) 之间函数关系的是(　　).



A.　　B.　　C.　　D.

2. 写出下列各问题中的函数关系式，指出是哪种函数，并确定其中自变量的取值范围：

(1) 在 60 km/h 的匀速运动中，运动路程 s(km) 是时间 t(h) 的函数；

(2) 某学校要在校园中辟出一块面积为 64 m^2 的长方形土地做花圃，这个花圃的长 y(m) 是宽 x(m) 的函数.

3. 填空：

(1) 已知函数 $y=-5x+3$，当 $x=$ ________ 时，函数值为 0；

(2) 已知函数 $y=\frac{5}{x}$，当 $x=1$ 时，$y=$ ________；当 $x=$ ________ 时，$y=1$.

4. 画出下列函数的图象：

（1）$y=-\dfrac{x}{4}$；

（2）$y=2-3x$；

（3）$y=-\dfrac{3}{x}$.

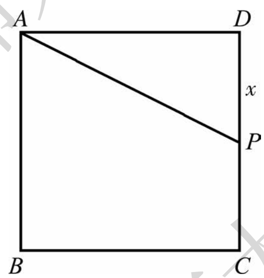
5. 在直线 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$ 上分别找出满足下列条件的点，并写出它们的坐标：

（1）横坐标是 -4；

（2）与 x 轴的距离是 2 个单位长度.

6. 一次函数的图象经过点(3，3)和点(1，−1). 求这个函数的表达式，并画出它的图象.

7. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，P 为边 DC 上的一点. 设 $DP=x$，求 $\triangle APD$ 的面积 y 与 x 之间的函数关系式，并画出这个函数的图象.



（第 7 题）

8. 地表以下岩层的温度 y(℃)随着深度 x(km)的变化而变化. 某处 y 与 x 之间的关系在一定范围内可以近似地表示成公式：$y=35x+20$. 试分别求出该处地表以下深 7 km、10 km、15 km 处的岩层温度.

9. 酒精的体积随温度的升高而增大，在一定范围内近似于一次函数关系. 现测得一定量的酒精在 0 ℃ 时的体积是 5.250 L，在 40 ℃ 时的体积是 5.481 L. 求这些酒精在 10 ℃ 和 30 ℃ 时的体积各是多少.

B 组

10. 已知点 $A(-3,\ a)$ 与点 $B(3,\ 4)$ 关于 y 轴对称，求 a 的值.

11. (1) 在平面直角坐标系中描出下列各组的点，并分别用线段把它们连起来：

① $(1,0)$，$(3,0)$；　② $(1,\ -1)$，$(1,\ -3)$；

③ $(0,1)$，$(0,3)$；　④ $(-1,\ 1)$，$(-1,\ 3)$；

⑤ $(0,2)$，$(4,0)$；　⑥ $(-1,\ -1)$，$(-3,\ -3)$.

(2) 小题(1)中连成的各线段中点的坐标分别是什么？仔细观察各中点的坐标与两个端点的坐标，你能发现它们之间有怎样的关系吗？

12. 从地面到高空 11 km 之间，气温随高度的升高而下降，已知某地每升高 1 km，气温下降 6 ℃；高于 11 km 时，气温几乎不再变化．设该地地面气温为 20 ℃，离地面 x km 处的气温为 y ℃.

(1) 当 $0\leqslant x\leqslant 11$ 时，求 y 与 x 之间的函数关系式；

(2) 画出该地气温 y 关于高度 x(包括高于 11 km)的函数的图象；

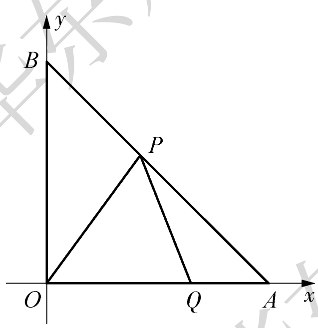
(3) 分别求出该地在离地面 4.5 km 及 13 km 处的气温.

13. 如图，已知△OAB 为等腰直角三角形，点 P、Q 分别是边 AB、OA 上的点，$OA=OB=6$，$OQ=4$．建立如图所示的平面直角坐标系，设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，解答下列问题：

(1) 求 y 关于 x 的函数关系式，以及函数自变量的取值范围；

(2) 求△OPQ 的面积 S 关于 x 的函数关系式；

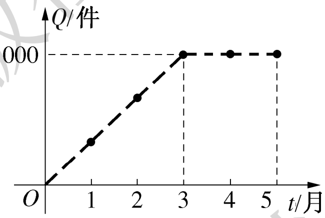
(3) 如果△OPQ 的面积等于 10，求点 P 的坐标.



（第 13 题）

C 组

14. 某厂今年前 5 个月某种产品的月产量 Q(件)是时间 t(月)的函数，它的图象如图所示，则对这种产品来说，下列说法中正确的是(　　).



(第 14 题)

A. 1 月至 3 月每月产量逐月增加，4、5 两月每月产量逐月减少

B. 1 月至 3 月每月产量逐月增加，4、5 两月每月产量与 3 月持平

C. 1 月至 3 月每月产量逐月增加，4、5 两月停止生产

D. 1 月至 3 月每月产量不变，4、5 两月停止生产

15. 将函数 $y=2x+3$ 的图象平移，使它经过点$(2,\ -1)$，求平移后的直线所对应的函数的表达式. 你能想出几种不同的平移方法？请和同学交流一下.

16. 直线 $y=\dfrac{2}{3}x-2$ 分别交 x 轴、y 轴于 A、B 两点，O 是原点.

(1) 求$\triangle AOB$ 的面积.

(2) 过$\triangle AOB$ 的顶点能不能画出直线把$\triangle AOB$ 分成面积相等的两部分？若能，可以画出几条？写出这样的直线所对应的函数的表达式.

第 17 章　平行四边形

平行四边形是我们常见的一种图形，它具有十分和谐的对称美．它是什么样的对称图形呢？它具有哪些基本性质呢？我们如何识别平行四边形呢？

学习本章，你就会找到这些答案．

★ 本章将利用已有的几何知识和方法，着重研究一种常见的中心对称图形——平行四边形，探索并证明它的性质定理和判定定理．

17.1 平行四边形的性质

平行四边形是随处可见的几何图形，本章导图教室里的讲台面、课桌面、老师与学生所用的教科书面、书柜面……甚至连小区内的停车区域等都形如平行四边形.

回忆 我们知道，有两组对边分别平行的四边形叫做**平行四边形**（parallelogram）.

你能从图 17.1.1 所示的图形中找出平行四边形吗？

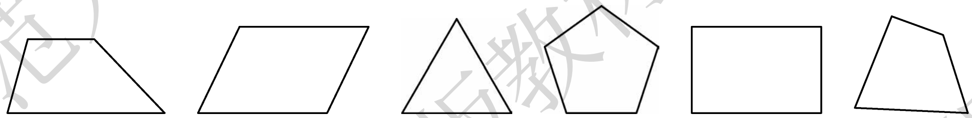


图17.1.1

显然，图②与图⑤是平行四边形．而图①的一组对边平行，另一组对边不平行，这个四边形称为梯形.

根据定义，平行四边形的一个主要性质是两组对边分别平行．由此，可知平行四边形的相邻两个内角互补．除此之外，它还有什么性质呢？

试一试

如图 17.1.2，作一个平行四边形.

作法：

（1）任意作一条直线 m；

（2）在直线 m 上任取点 A，在直线 m 外任取点 B，连结 AB；

（3）过点 B 作直线 m 的平行线 n，在直线 n 上任取点 C；

（4）过点 C 作直线 AB 的平行线，交直线 m 于点 D.

四边形 $ABCD$ 即为所要求作的平行四边形.

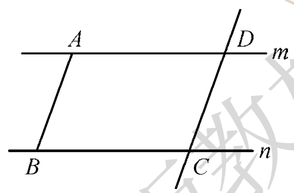


图17.1.2

平行四边形 $ABCD$ 可以记作▱$ABCD$.

探索 如图 17.1.3，用剪刀把▱$ABCD$ 剪下，放在另一张纸上，并沿▱$ABCD$ 的边沿，画出一个四边形，记为 $EFGH$．则四边形 $EFGH$ 和▱$ABCD$ 完全一样，也是平行四边形．它们的对应边、对应角分别相等．

在▱$ABCD$ 中，连结 AC、BD，它们的交点记为点 O．用一枚图钉穿过点 O，将▱$ABCD$ 绕点 O 旋转 180°．观察旋转后的▱$ABCD$ 和纸上所画的▱$EFGH$ 是否重合．

你能从中得出▱$ABCD$ 的一些边角关系吗？

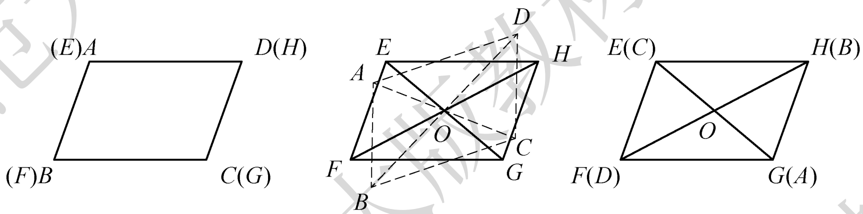


图17.1.3

我们发现，旋转 180°之后两个平行四边形完全重合，即平行四边形是中心对称图形，对角线的交点 O 就是对称中心．由此可以得到

请用中心对称的有关结论说明这些边角关系．

$$AB = CD,\quad AD = CB,$$

$$\angle A = \angle C,\quad \angle B = \angle D.$$

我们可以用演绎推理证明上述探索得到的结论．

已知：如图 17.1.4，▱$ABCD$．

求证：$AB = CD$，$AD = CB$，$\angle A = \angle C$，$\angle ABC = \angle CDA$．

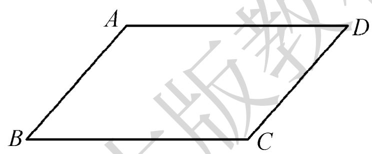


图17.1.4

分析 我们已经知道，证明边相等或角相等的一种重要方法是找出它们分别所属的三角形，然后证明这两个三角形全等．从上面旋转纸片的探索过程中，可以发现一条对角线恰好将平行四边形分成两个全等的三角形．

证明 如图 17.1.5，连结 BD.

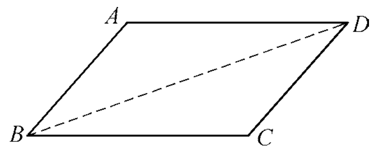


图17.1.5

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB \parallel DC$ 且 $AD \parallel BC$（平行四边形的两组对边分别平行）.

∴ $\angle ABD = \angle CDB$,

$\angle ADB = \angle CBD$.

又∵ $BD = DB$,

∴ $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

∴ $AB = CD$, $AD = CB$, $\angle A = \angle C$.

由 $\angle ABD = \angle CDB$ 和 $\angle ADB = \angle CBD$，得

$$\angle ABD + \angle CBD = \angle CDB + \angle ADB,$$

即 $\angle ABC = \angle CDA$.

以上的相等关系可以概括为平行四边形的性质定理：

平行四边形的性质定理 1　平行四边形的对边相等.

平行四边形的性质定理 2　平行四边形的对角相等.

▶ **例 1** 如图 17.1.6，在▱$ABCD$ 中，$\angle A = 40°$. 求其他各内角的度数.

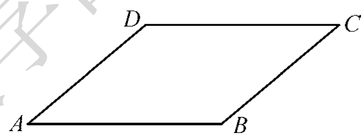


图17.1.6

解 在▱$ABCD$ 中，

$\angle A = \angle C$ 且 $\angle B = \angle D$（平行四边形的对角相等）.

∵ $\angle A = 40°$,

∴ $\angle C = 40°$.

又∵ $AD \parallel BC$,

∴ $\angle A + \angle B = 180°$.

∴ $\angle B = 180° - \angle A$

$= 180° - 40° = 140°$.

∴ $\angle D = \angle B = 140°$.

平行四边形的邻角互补.

▶ **例 2** 如图 17.1.7，在▱$ABCD$ 中，$AB=8$，周长等于 24．求其余三条边的长．

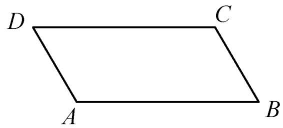


图17.1.7

解 在▱$ABCD$ 中，有

$AB=DC$ 且 $AD=BC$（平行四边形的对边相等）．

$\because$ $AB=8$，

$\therefore$ $DC=8$．

又 $\because$ $AB+BC+DC+AD=24$，

$\therefore$ $AD=BC=\dfrac{1}{2}(24-2AB)=4$．

试一试

如图 17.1.8，在方格图上画两条互相平行的直线，在其中一条直线上任取若干点，过这些点作另一条直线的垂线，用刻度尺量出这两条平行线之间这些垂线段的长度．

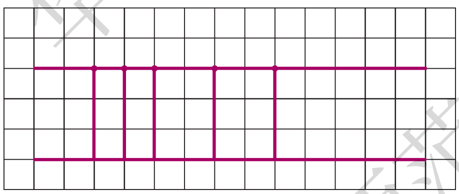


图17.1.8

你能发现什么结论？试用平行四边形的性质定理加以说明．

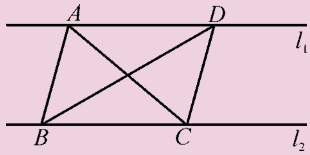
经过度量，我们发现这些垂线段的长度都相等．由此我们得到平行线的又一个性质：

平行线之间的距离处处相等．

两条直线平行，其中一条直线上的任一点到另一条直线的距离，叫做这两条平行线之间的距离．

练习

1. 在▱$ABCD$ 中，$\angle A = 120°$．求其余各内角的度数．
2. 如图，如果直线 $l_1 // l_2$，那么 $\triangle ABC$ 的面积和 $\triangle DBC$ 的面积是相等的．你能说出理由吗？你还能在这两条平行线之间画出其他与 $\triangle ABC$ 面积相等的三角形吗？



（第 2 题）

3. 用一根长度为 36 cm 的铁丝围成一个平行四边形，各边的长度恰好都是 3 的整数倍，试找出所有满足条件的平行四边形，并分别求出各边的长．

▶ **例 3**　已知平行四边形的周长是 24，相邻两边的长相差 4．求该平行四边形相邻两边的长．

解　如图 17.1.9，设边 AB 的长为 x，则边 BC 的长为 $x+4$．根据已知，可得

图17.1.9

$$2(AB+BC)=24,$$

即
$$2(x+x+4)=24,$$
$$4x+8=24,$$

解得
$$x=4.$$
$$x+4=8.$$

所以，该平行四边形相邻两边的长分别为 4 和 8．

▶ **例 4**　如图 17.1.10，在▱$ABCD$ 中，$\angle ADC$ 的平分线与 AB 相交于点 E．求证：$BE+BC=CD$．

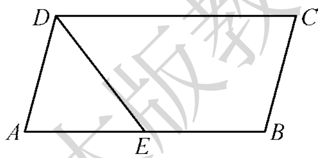


图17.1.10

证明　∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB=CD$（平行四边形的对边相等），

$AB // CD$（平行四边形的对边平行）．

∴ $\angle CDE=\angle AED$．

又 ∵ DE 是 $\angle ADC$ 的平分线，

$\therefore\ \angle ADE = \angle CDE.$

$\therefore\ \angle ADE = \angle AED.$

$\therefore\ AD = AE.$

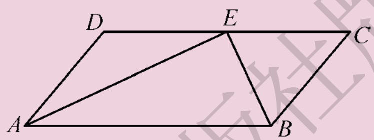
又 $\because\ AD = BC$（平行四边形的对边相等），

$\therefore\ AE = BC.$

$\therefore\ BE + BC = BE + AE = AB = CD.$

练习

1. 已知平行四边形的周长是 32 cm，相邻两边长的比为 1 ∶ 3．求该平行四边形各边的长．
2. 已知平行四边形的一组邻边的长相等，且等于其较短的对角线的长，而此对角线的长为 4 cm．求此平行四边形各内角的大小及各边的长．
3. 如图，在▱$ABCD$ 中，AE 平分 $\angle BAD$，BE 平分 $\angle ABC$，且 AE、BE 相交于 CD 上的一点 E．
   求证：$AE \perp BE$.
   又若 AE、BE 相交于▱$ABCD$ 外（或内）的一点 E，结论是否仍然成立？



（第 3 题）

在第 79 页对于图 17.1.3 的探索过程中，你观察到 OA 与 OC、OB 与 OD 各有什么关系？

我们已经发现，▱$ABCD$ 是一个中心对称图形，对角线的交点 O 就是对称中心，有

$$OA = OC,\quad OB = OD.$$

任意画几个平行四边形，量量看，是否都是这样．

由此可得：

平行四边形的性质定理 3　平行四边形的对角线互相平分．

我们可以用演绎推理证明这个结论．

已知：如图 17.1.11，▱$ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O.

求证：$OA = OC$， $OB = OD$.

观察图形，OA 与 OC 以及 OB 与 OD 分别属于哪两个三角形？

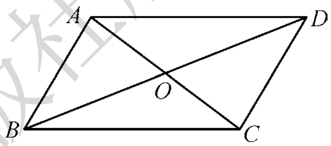


图17.1.11

分析 要证明的相等的 OA 与 OC 以及 OB 与 OD 分别属于△AOB 与△COD，只需证明这两个三角形全等.

你能写出证明的完整过程吗？

▶ **例 5** 如图 17.1.12，▱$ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，△AOB 的周长为 15，$AB = 6$，那么对角线 AC 与 BD 的和是多少？

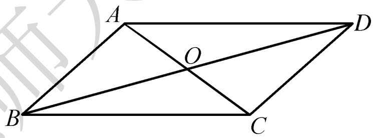


图17.1.12

解 在▱$ABCD$ 中，

$\because$ $AB = 6$， $AO + BO + AB = 15$，

$\therefore$ $AO + BO = 15 - 6 = 9$.

又 $\because$ $AO = OC$ 且 $BO = OD$（平行四边形的对角线互相平分），

$\therefore$ $AC + BD = 2AO + 2BO = 2(AO + BO) = 2 \times 9 = 18$.

▶ **例 6** 如图 17.1.13，▱$ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，EF 过点 O 且与边 AB、CD 分别相交于点 E 和点 F. 求证：$OE = OF$.

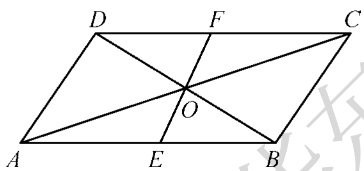


图17.1.13

观察图形，OE 与 OF 分别属于哪两个三角形？

证明 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ $OB = OD$（平行四边形的对角线互相平分）.

又 $\because$ $AB \parallel DC$，

$\therefore$ $\angle EBO = \angle FDO$.

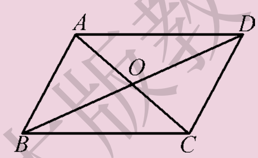
又 $\because$ $\angle BOE = \angle DOF$，

$\therefore$ $\triangle BEO \cong \triangle DFO$.

$\therefore$ $OE = OF$.

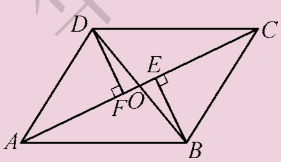
练习

1. 如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，指出图中各对相等的线段.

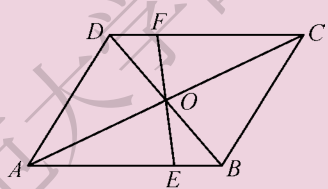


（第 1 题）

2. 如图，在$\square ABCD$ 中，O 是对角线 AC 与 BD 的交点，$BE \perp AC$，$DF \perp AC$，垂足分别为点 E 和点 F. 求证：$OE = OF$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在$\square ABCD$ 中，EF 过对角线的交点 O，且与边 AB、CD 分别相交于点 E 和点 F，$AB = 4$，$AD = 3$，$OF = 1.3$. 求四边形 $BCFE$ 的周长.

► **例 7** 如图 17.1.14，$\square ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，其周长为 16，且 $\triangle AOB$ 的周长比 $\triangle BOC$ 的周长小 2. 求边 AB 和 BC 的长.

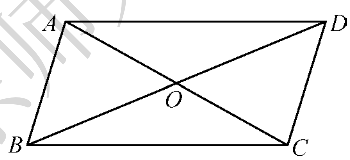


图17.1.14

解 ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $OA = OC$（平行四边形的对角线互相平分）.

∵ $\triangle AOB$ 的周长 $+ 2 = \triangle BOC$ 的周长，

∴ $AB + OA + OB + 2 = BC + OB + OC$，

即 $AB + 2 = BC$.

又 ∵ $\square ABCD$ 的周长等于 16，

∴ $2(AB + BC) = 16$，

即 $4AB + 4 = 16$.

∴ $AB = 3$，$BC = 5$.

▶ **例 8** 如图 17.1.15，在$\square ABCD$ 中，对角线 $AC = 21\text{ cm}$，$BE \perp AC$，垂足为点 E，且 $BE = 5\text{ cm}$，$AD = 7\text{ cm}$. 求 AD 与 BC 之间的距离.

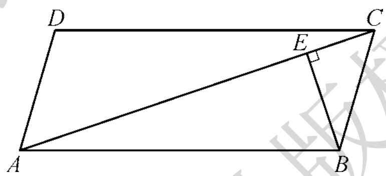


图17.1.15

解 设 AD 与 BC 之间的距离为 x，则$\square ABCD$ 的面积等于 $AD \cdot x$.

∵ $S_{\square ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = AC \cdot BE$，

∴ $AD \cdot x = AC \cdot BE$，

即 $7x = 21 \times 5$.

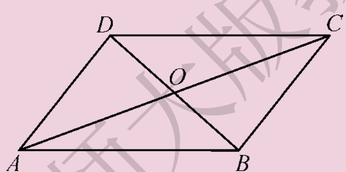
∴ $x = 15(\text{cm})$.

即 AD 与 BC 之间的距离为 15 cm .

你知道其中的理由吗？

练习

1. $\square ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AB = 8\text{ cm}$，$BC = 6\text{ cm}$，$\triangle AOB$ 的周长是 18 cm . 求$\triangle AOD$ 的周长.
2. 如图，如果$\triangle AOB$ 与$\triangle AOD$ 的周长之差为 8，而 $AB : AD = 3 : 2$，那么$\square ABCD$ 的周长为多少？



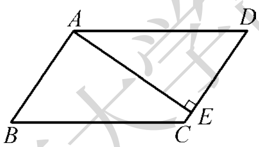
（第 2 题）

3. 在$\square ABCD$ 中，两条对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$BC = 5$，$AC = 6$，$BD = 8$. 求$\triangle AOB$ 的周长.

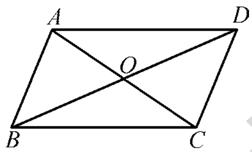
习题17.1

A 组

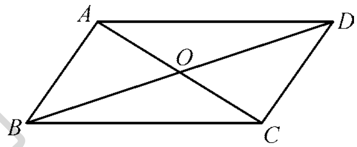
1. 如图，在▱$ABCD$ 中，$AE \perp CD$，垂足为点 E．如果 $\angle B = 55°$，那么 $\angle D$ 和 $\angle DAE$ 分别等于多少度？



（第 1 题）



（第 2 题）

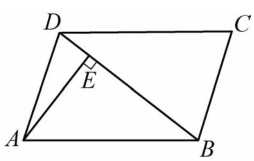


（第 4 题）

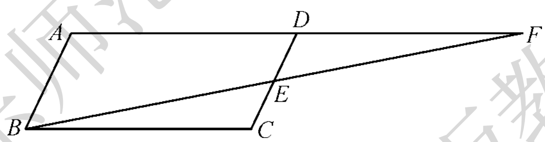
2. 如图，在▱$ABCD$ 中，已知 AC、BD 相交于点 O，两条对角线长的和为 22 cm，CD 的长为 5 cm．求△OCD 的周长．
3. 在▱$ABCD$ 中，$\angle A$ 与 $\angle B$ 的度数之比为 2∶3．求▱$ABCD$ 各内角的度数．
4. 如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，△AOB 的周长与△AOD 的周长之和为 11.4 cm，两条对角线长之和为 7 cm．求▱$ABCD$ 的周长．
5. 证明：夹在两条平行线间的平行线段相等．

B 组

6. 如图，在▱$ABCD$ 中，$DB = CD$，$\angle C = 70°$，$AE \perp BD$，垂足为点 E．求 $\angle BAE$ 的度数．



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，在▱$ABCD$ 中，点 E 为 CD 的中点，连结 BE 并延长交 AD 的延长线于点 F．求证：点 E 是 BF 的中点，点 D 是 AF 的中点．
8. 在▱$ABCD$ 中，边 BC 上的高为 4，$AB = 5$，$AC = 2\sqrt{5}$．求▱$ABCD$ 的周长．

17.2 平行四边形的判定

我们已经知道，如果一个四边形是平行四边形，那么它的两组对边分别平行，且是一个中心对称图形，具有如下一些性质：

1. 两组对边分别相等；
2. 两组对角分别相等；
3. 两条对角线互相平分.

由平行四边形的性质，逆向思考，你认为可能有哪些判定方法？

那么，怎样判定一个四边形是不是平行四边形呢？当然，我们可以根据平行四边形的定义加以判定：两组对边分别平行的四边形是平行四边形. 那么是否还存在其他的判定方法呢？

思考 由平行四边形的性质“平行四边形的两组对边分别相等”，逆向思考，互换条件与结论，试写出它的逆命题. 你认为它是一个真命题吗？

	条件	结论
平行四边形的两组对边分别相等		
逆命题		

试一试

如图 17.2.1，作一个两组对边分别相等的四边形.

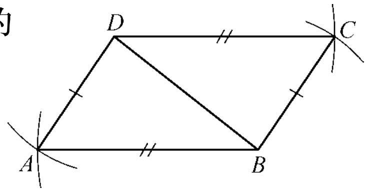


图17.2.1

作法：

（1）任取两点 B、D；

（2）分别以点 B 和点 D 为圆心、任意长为半径，分别在线段 BD 的两侧作弧；

（3）再分别以点 D 和点 B 为圆心、适当长为半径作弧，与前面所作的弧分别交于点 A 和点 C；

（4）顺次连结各点.

四边形 $ABCD$ 即为所要求作的四边形.

把你作的四边形和其他同学作的进行比较，看看是否都是平行四边形.

> 可以发现，尽管每个人取的边长不一样，但只要对边分别相等，所作的就都是平行四边形.

由此可以得到判定平行四边形的一种方法：

平行四边形的判定定理 1　两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

下面我们用演绎推理证明这个结论.

已知： 如图17.2.2，在四边形 $ABCD$ 中，$AB = CD$，$BC = DA$.

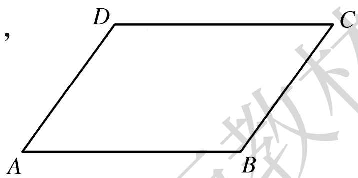


图17.2.2

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明　如图 17.2.3，连结 BD .

$\because\ AB = CD,\ AD = CB,\ BD = DB,$

$\therefore\ \triangle ABD \cong \triangle CDB.$

$\therefore\ \angle 1 = \angle 3,\ \angle 2 = \angle 4.$

$\therefore\ AD \parallel CB,\ AB \parallel CD.$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）.

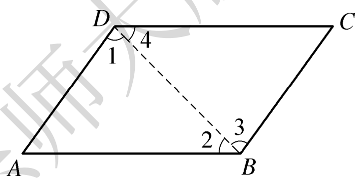


图17.2.3

思考　如果只知道四边形的一组对边相等，显然这一条件还不足以保证它是平行四边形．从边的角度看，把你认为需要再增加的条件填在下面的空框内：

一组对边相等 + [　　　　] ⇒ 平行四边形

如果只知道一组对边相等，可以考虑再加上平行的条件，得到一个猜想："一组对边平行且相等的四边形是平行四边形．"

试一试

如图 17.2.4，作一个有一组对边平行且相等的四边形．

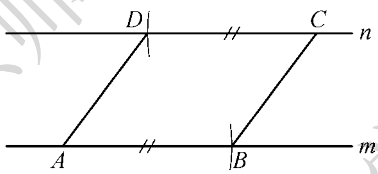


图17.2.4

作法：

（1）任意作两条平行线 m、n；

（2）在直线 m、n 上分别截取 AB、CD，使 $AB = CD$；

（3）分别连结点 B、C 和点 A、D．

四边形 $ABCD$ 即为所要求作的四边形．

观察你所作的图形，它是平行四边形吗？

我们发现这样作出的四边形是平行四边形．

下面用演绎推理证明上述猜想.

已知：如图 17.2.5，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$ 且 $AB = CD$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

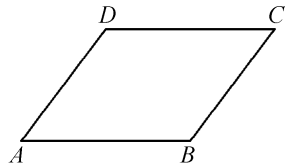


图17.2.5

分析 要证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可以用平行四边形的定义，也可以用前面得到的平行四边形的判定定理 1 .

证明 如图 17.2.6，连结对角线 AC .

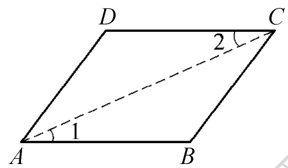


图17.2.6

$\because$ $AB \parallel CD$,

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$.

又 $\because$ $AB = CD$， $AC = CA$,

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

$\therefore$ $BC = DA$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形（两组对边分别相等的四边形是平行四边形）.

你还能用其他方法证明吗?

由此我们得到平行四边形的另一种判定方法：

平行四边形的判定定理 2　一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

“平行且相等”常用符号“$\underline{\parallel}$”来表示. 如图 17.2.5, $AB \parallel CD$ 且 $AB = CD$, 可以记作“$AB \underline{\parallel} CD$”，读作“$AB$ 平行且等于 CD”.

▶ **例 1** 如图 17.2.7，在▱$ABCD$ 中，点 E、F 分别在对边 BC 和 DA 上，且 $AF = CE$. 求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.

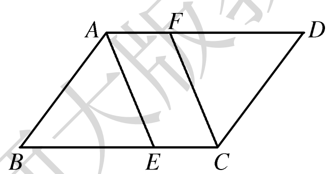


图17.2.7

分析 我们已经有了三种判定平行四边形的方法，根据已知条件 $AF = CE$，若运用刚刚得到的判定定理 2，则只需证明 $AF \parallel CE$.

证明 ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD \parallel CB$（平行四边形的对边平行），

即 $AF \parallel CE$.

又∵ $AF = CE$，

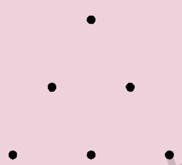
∴ 四边形 $AECF$ 为平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形）.

> 当所要证的命题可以使用多种方法证明时，可根据题目的条件选择较简捷的证明方法.

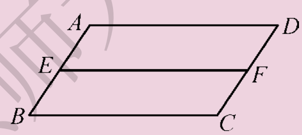
思考 还可以用其他方法证明例 1 吗？哪种方法较为简捷？

练习

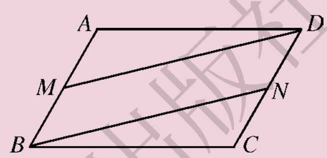
1. 在如图的格点图中，每一格点与它周围各个格点的距离相等．以格点为顶点，你能画出多少个平行四边形？
2. 如图，在▱$ABCD$ 中，E、F 分别是边 AB 和 CD 的中点．求证：$EF = BC$.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在▱$ABCD$ 中，已知 M、N 分别是边 AB 和 DC 的中点，那么四边形 $BNDM$ 也是平行四边形吗？试用多种方法证明你的猜想.

思考 由平行四边形的性质“平行四边形的两条对角线互相平分”，逆向思考，互换条件与结论，试写出它的逆命题．你认为它是一个真命题吗？

	条件	结论
平行四边形的两条对角线互相平分		
逆命题		

试一试

如图 17.2.8，作一个两条对角线互相平分的四边形.

作法：

（1）任意作两条相交直线 m、n，记交点为 O；

（2）以点 O 为中心，分别在直线 m、n 上截取 OB 与 OD、OA 与 OC，使 $OB=OD$， $OA=OC$，顺次连结所得的四个点.

四边形 $ABCD$ 即为所要求作的四边形.

它是平行四边形吗？

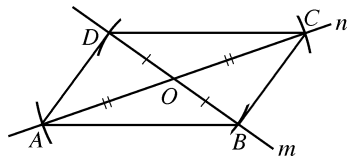


图17.2.8

相信你和同伴都会发现所作的四边形是一个平行四边形.

由此我们又得到平行四边形的一种判定方法：

平行四边形的判定定理 3　对角线互相平分的四边形是平行四边形.

我们可以用演绎推理证明这一结论.

已知：如图 17.2.9，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$OA=OC$， $OB=OD$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

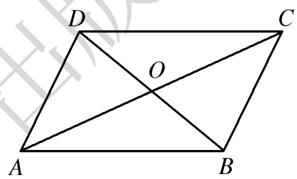


图17.2.9

分析　要证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可以用定义，也可以用前面已得到的平行四边形的两条判定定理.

请选择一种方法加以证明.

▶ **例 2**　如图 17.2.10，在▱$ABCD$ 中，点 E、F 是对角线 AC 上的两点，且 $AE=CF$. 求证：四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

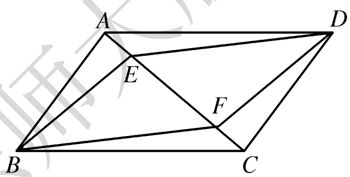


图17.2.10

分析　连结 BD，交 AC 于点 O，由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可得 $OB=OD$. 如果能证明 $OE=OF$，

就可以根据“对角线互相平分的四边形是平行四边形”得到四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

证明 如图 17.2.11，连结 BD，交 AC 于点 O.

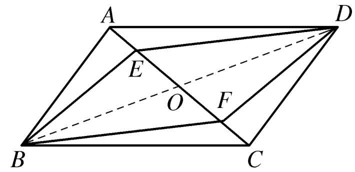


图17.2.11

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ $OB = OD$， $OA = OC$（平行四边形的对角线互相平分）.

又 $\because$ $AE = CF$，

$\therefore$ $OA - AE = OC - CF$，

即 $OE = OF$.

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）.

思考

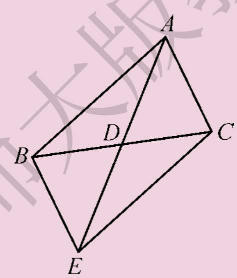
现在我们总共学习了多少种判定平行四边形的方法（包括定义）？这些判定方法与平行四边形的性质之间，又有怎样的关系呢？

读一读

由平行四边形的性质，联想平行四边形的判定方法，通过合情推理，提出猜想. 这是一个由原命题到逆命题的逆向思维过程，今后在探索和研究其他几何问题时还会继续运用.

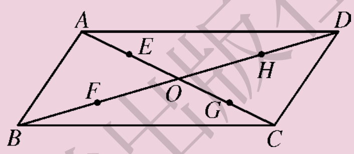
练习

1. 如图，延长△ABC 的中线 AD 至点 E，使 $DE = AD$，那么四边形 $ABEC$ 是平行四边形吗？为什么？

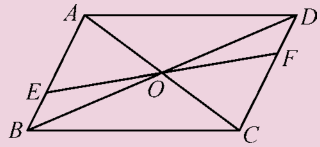


（第 1 题）

2. 如图，在▱$ABCD$ 中，两条对角线 AC 与 BD 相交于点 O，E、F、G、H 分别是 AO、BO、CO、DO 的中点，以图中标明字母的点为顶点，尽可能多地画出平行四边形．



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，对角线 AC、BD 相交于点 O，EF 过点 O 交 AB 于点 E，交 CD 于点 F，且 $OE = OF$．求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

▶ **例 3**　如图 17.2.12，在▱$ABCD$ 中，点 F、H 分别在边 AB、CD 上，且 $BF = DH$．求证：AC 与 HF 互相平分．

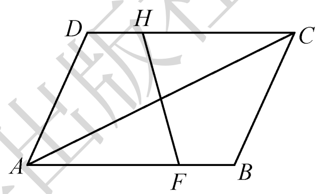


图17.2.12

分析　因为 AC 和 HF 是四边形 $AFCH$ 的对角线，所以要证明 AC 与 HF 互相平分，只需证明四边形 $AFCH$ 是平行四边形．

证明　如图 17.2.13，分别连结 AH、CF．

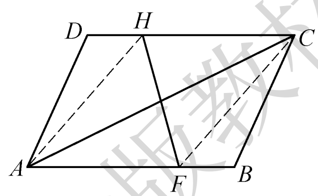


图17.2.13

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB \parallel CD$（平行四边形的对边平行），

$AB = CD$（平行四边形的对边相等）．

又∵ $BF = DH$，

∴ $AB - BF = CD - DH$，

即 $AF = CH$．

∴ 四边形 $AFCH$ 是平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形）．

∴ AC 与 HF 互相平分（平行四边形的对角线互相平分）．

▶ **例 4** 如图 17.2.14，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$. 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

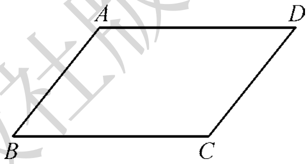


图17.2.14

证明 在四边形 $ABCD$ 中，

$\because$ $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$，

$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，

$\therefore$ $2(\angle A+\angle B)=360°$，

即 $\angle A+\angle B=180°$.

$\therefore$ $AD \parallel CB$.

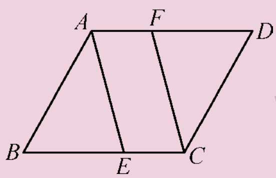
同理可证 $AB \parallel CD$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）.

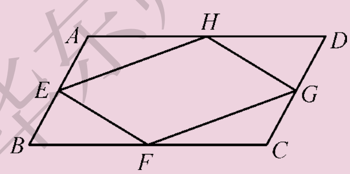
两组对角分别相等的四边形是平行四边形.

练习

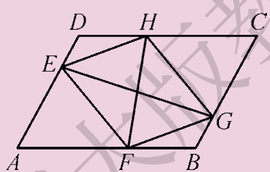
1. 如图，在▱$ABCD$ 中，点 E、F 分别在边 BC、AD 上，且 $AE \parallel CF$. 求证：$AE=CF$.
2. 如图，在▱$ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点. 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在▱$ABCD$ 中，$AF=CH$，$DE=BG$. 求证：EG 与 HF 互相平分.

▶ 例 5 如图 17.2.15，四边形 $AEFD$ 和 $EBCF$ 都是平行四边形．求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

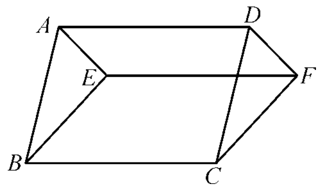


图17.2.15

证明 ∵ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形，

∴ $AD \underline{\mathbin{/\!/}} EF$.

又∵ 四边形 $EBCF$ 是平行四边形，

∴ $BC \underline{\mathbin{/\!/}} EF$.

∴ $AD \underline{\mathbin{/\!/}} BC$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形）．

▶ 例 6 如图 17.2.16，G、H 是▱$ABCD$ 对角线 AC 上的两点，且 $AG = CH$，E、F 分别是边 AB 和 CD 的中点．求证：四边形 $EHFG$ 是平行四边形．

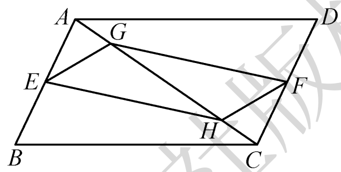


图17.2.16

证明 如图 17.2.17，连结 EF，交 AC 于点 O．

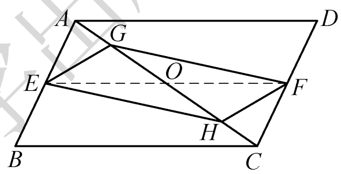


图17.2.17

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB = CD$.

又∵ E、F 分别是边 AB、CD 的中点，

∴ $AE = CF$.

又∵ $AB \mathbin{/\!/} CD$,

∴ $\angle EAO = \angle FCO$.

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，

∵ $\angle EAO = \angle FCO$,

$\angle AOE = \angle COF$,

$AE = CF$,

∴ $\triangle AOE \cong \triangle COF$.

∴ $OE = OF$，$OA = OC$.

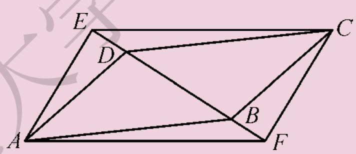
又∵ $AG = CH$,

∴ $OG = OH$.

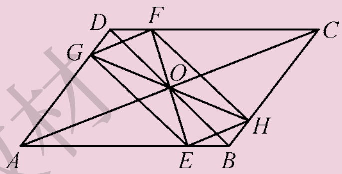
∴ 四边形 $EHFG$ 是平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）．

练习

1. 在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$\angle B = \angle D$. 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.
2. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，AE、CF 分别与直线 DB 相交于点 E 和点 F，且 $AE \parallel CF$，分别连结点 C、E 和点 A、F. 求证：四边形 $AFCE$ 是平行四边形.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，直线 EF 过点 O，且与 AB、DC 分别相交于点 E 和点 F，直线 GH 过点 O 且与 AD、BC 分别相交于点 G 和点 H. 求证：四边形 $GEHF$ 是平行四边形.

▶ **例 7** 如图 17.2.18，已知▱$ABCD$，延长边 AD 至点 F，使 $DF = DA$. 连结 BF，交边 DC 于点 E. 求证：$EF = EB$.

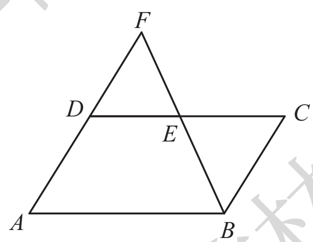


图17.2.18

证明 ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $DA \mathrel{\underline{\parallel}} CB$（平行四边形的对边平行且相等）.

∴ $\angle FDE = \angle BCE$，$\angle DFE = \angle CBE$.

又 ∵ $DA = DF$，

∴ $DF = CB$.

在 $\triangle DFE$ 与 $\triangle CBE$ 中，

∵ $\angle FDE = \angle BCE$，$DF = CB$，$\angle DFE = \angle CBE$，

∴ $\triangle DFE \cong \triangle CBE$.

∴ $EF = EB$.

在图 17.2.18 中，点 D、E 分别是△AFB 的两边 AF、BF 的中点，即 DE 是连结△AFB 的两边中点的线段．连结三角形两边中点的线段，叫做三角形的**中位线**(median line)．

思考　一个三角形有几条中位线？每条中位线与三角形的边有什么关系？

观察图17.2.18，你就能发现 DE 与 AB 的关系．

▶ **例 8**　如图 17.2.19，在△ABC 中，点 D、E 分别是边 AB 和 AC 的中点．求证：$DE \parallel BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$．

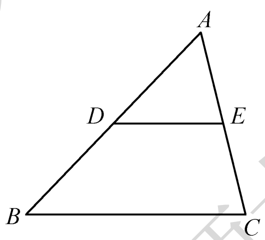


图17.2.19

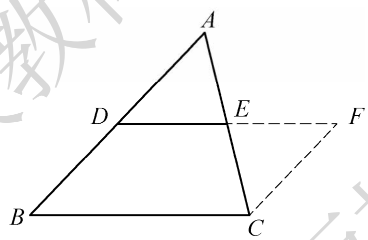


图17.2.20

分析　如图 17.2.20，过点 C 作 $CF \parallel AB$，且与 DE 的延长线交于点 F．由平行线性质和已知条件，可以证明 △ADE ≌ △CFE，从而推出四边形 $BCFD$ 是平行四边形，可得 $DE \parallel BC$，$DE=EF=\frac{1}{2}BC$．

因此得到

三角形中位线定理　三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半．

试写出证明的全过程．

▶ **例 9**　证明三角形的一条中位线与第三边上的中线互相平分．

已知：如图 17.2.21，在△ABC 中，$AD=DB$，$BF=FC$，$AE=EC$．

求证：AF 与 DE 互相平分．

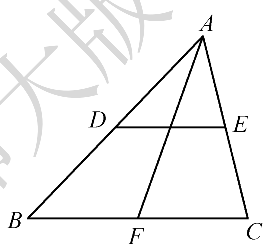


图17.2.21

证明 如图 17.2.22，连结 DF、EF.

$\because AD = DB, \quad BF = FC$,

$\therefore DF \parallel AC$（三角形的中位线平行于第三边）.

同理可得，$EF \parallel BA$.

$\therefore$ 四边形 $ADFE$ 是平行四边形（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）.

$\therefore AF$ 与 DE 互相平分.

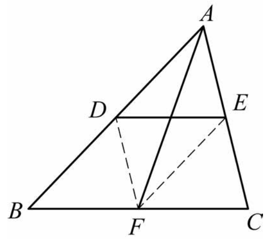


图17.2.22

试一试

一个三角形有 3 条中线和 3 条中位线，从定义、性质和相互联系等几方面比较三角形的中线与中位线（图 17.2.23）两个概念.

你所画的图形是否也是如此？说说你的想法.

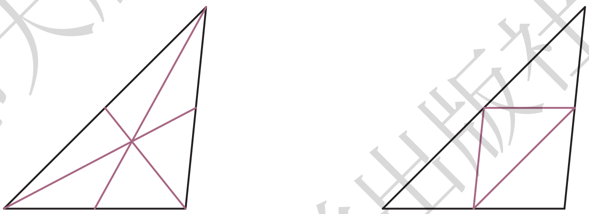
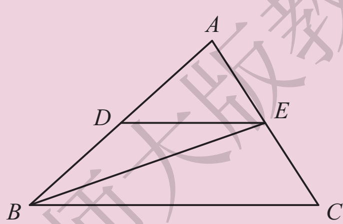


图17.2.23

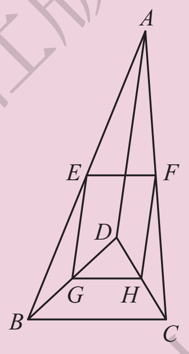
练习

1. 三角形的周长为 56 cm，求它的三条中位线组成的三角形的周长.
2. 如图，在△ABC 中，D、E 分别是边 AB、AC 的中点，则线段 DE 是△ABC 的________线，线段 ED 是△ABE 的________线，线段 BE 是△ABC 的________线.



（第 2 题）

3. 如图，在$\triangle ABC$中，$AD=6$，$BC=4$，E、F、G、H分别是AB、AC、BD、CD的中点，求四边形$EFHG$的周长.

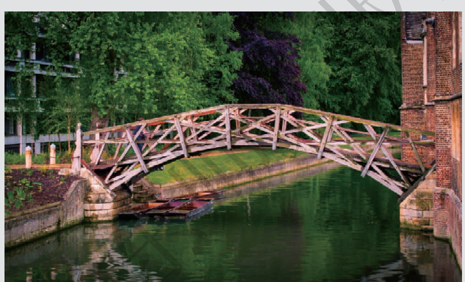


（第 3 题）

阅读材料

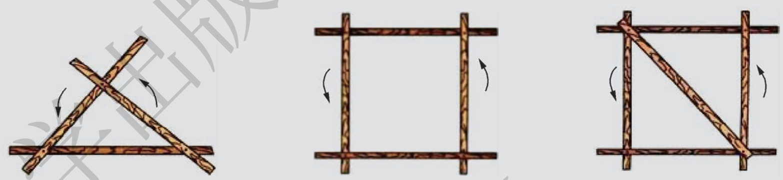
稳定性与不稳定性

你知道英国剑桥大学的数学桥吗？那是一座古老的灰色木质桁架桥，又被称为牛顿桥，或牛顿数学桥，架设在校园里的剑河之上．传说这座桥最初是由数学家牛顿设计和制造的，没有用一根钉子．后来有学生好奇，将桥拆下来，探究其中的奥秘，不料重新拼装时，却无法复原，只好用钉子帮忙，成为现在看到的模样．当然这只是一个动人的传说，激励年轻学生自己动手尝试，“自己尝试”正是剑桥大学的一种优良的传统学风．



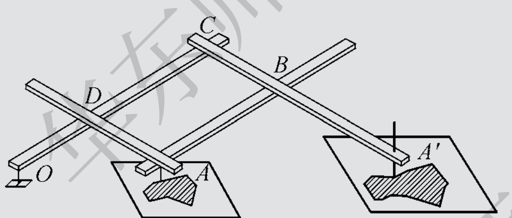
剑河上的数学桥，结构严谨，桥身相邻桁架之间都构成 11.25°的夹角．在 18 世纪，这种设计被称为几何结构．每根斜撑的木杆都很长，充分发挥了三角形的稳定性，所以这是一座名副其实的“数学桥”．

你瞧，这里用到了你熟悉的三角形的稳定性．将三根木条用钉子钉成一个三角形木架，要想扭动它，使它改变形状，那可是难上加难．而将四根木条用钉子钉成一个四边形木架，只需轻轻一推，它就会立即变形．但若在四边形木架上再钉上一根木条，将它的一对顶点连结起来，那就无法扭动，十分稳定了．



由此看来，平行四边形具有不稳定性．但你可知道，正是这种不稳定性，给我们的生活带来了极大的方便．例如，某些工厂和公司的电动伸缩门、商店的铁拉门、活动衣架等，要是没有平行四边形的不稳定性，它们还无法正常使用呢．

早年，一些工程技术人员还使用过一种放缩尺绘制图形，将一个原本较小的图形放大若干倍，使其更为明晰、清楚．当然，现在有了计算机和相应的软件，已经不再需要诸如此类的简单工具了．



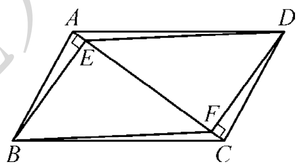
可见，数学广泛存在于我们的日常生活中，无论何时何地，都有数学之美！

习题17.2

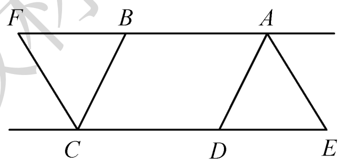
A 组

1. 用两个全等的不等边三角形，按照不同的方法拼成四边形，可以拼成几个不同的四边形？它们都是平行四边形吗？为什么？

2. 如图，在▱$ABCD$ 中，E、F 是对角线 AC 上的两点，$BE \perp AC$ 于点 E，$DF \perp AC$ 于点 F. 求证：四边形 $BEDF$ 是平行四边形.



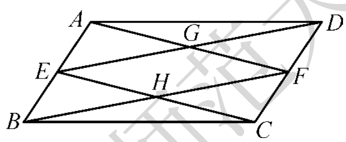
（第 2 题）



（第 3 题）

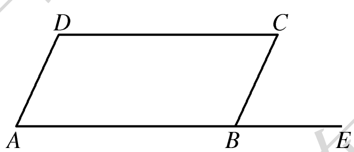
3. 如图，在▱$ABCD$ 中，对角 $\angle BAD$、$\angle BCD$ 的外角平分线 AE、CF 分别交 CD、AB 的延长线于点 E 和点 F. 求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.

4. 如图，在▱$ABCD$ 中，E、F 分别是边 AB、CD 的中点，AF 与 DE 相交于点 G，CE 与 BF 相交于点 H. 求证：四边形 $EHFG$ 是平行四边形.



（第 4 题）

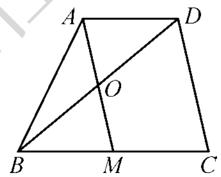
5. 如图，点 A、B、E 在同一条直线上，$AB = DC$，$\angle C = \angle CBE$. 求证：$AD = BC$.



（第 5 题）

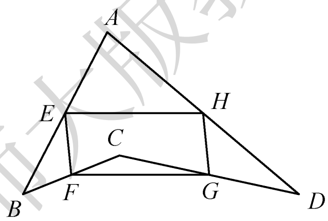
B 组

6. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，M 是边 BC 的中点，AM、BD 互相平分并交于点 O．求证：$AM \underline{\parallel} DC$．



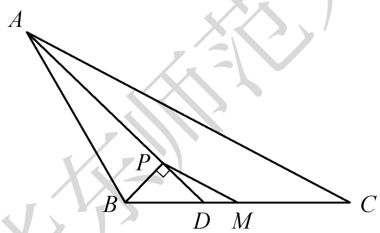
（第 6 题）

7. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，点 E、F、G、H 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点，连结 EF、FG、GH、HE，得到四边形 $EFGH$．求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形．



（第 7 题）

8. 如图，在△ABC 中，$AB = 14$，$AC = 26$，点 P 在∠BAC 的平分线 AD 上，且 $BP \perp AD$，点 M 为边 BC 的中点．求 PM 的长．



（第 8 题）

数学活动

图形的等分

如图 1，将一个平行四边形 $ABCD$ 沿着对角线 AC 翻折，将这个平行四边形一分为二，显然这两部分的形状与大小完全一样，也就是说直线 AC 将整个平行四边形分成了两个面积相等的部分.

那么是否还存在其他直线，也能将这个平行四边形分成面积相等的两部分呢？你肯定会说，那当然有！另一条对角线 BD 所在的直线也可以（如图 2）．你还能发现其他直线吗？它们之间有什么共同规律呢？

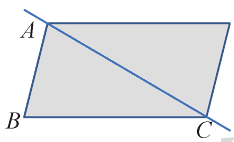


图 1

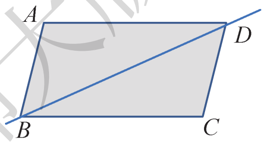


图 2

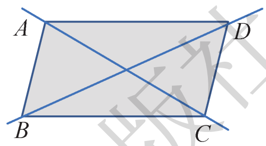


图 3

如果想用两条直线将一个平行四边形分成面积相等的四部分，那么应该如何画出这两条直线呢？你可能马上会想到两条对角线所在的直线（如图 3）．你还能找到其他直线吗？

我们知道平行四边形是一个中心对称图形，你的发现是否与中心对称有某种关系呢？是否可以引申到一般的中心对称图形呢？

这样的探索是否对一般的轴对称图形有相应的结论呢？

更一般地，对于由几个中心对称或轴对称图形组合而成的图形，是否也有相应的结论呢？

动手试试看，相信你一定能找到合适的方法，得到有意义的结果.

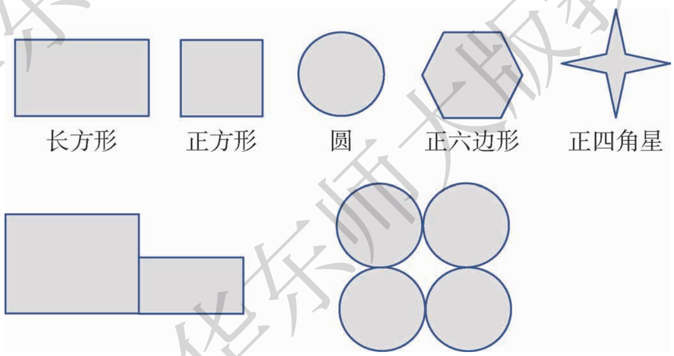


图 4

小结

一、知识结构

- 平行四边形
  - 性质
    - 对边相等
    - 对角相等
    - 对角线互相平分
  - 判定
    - （定义）两组对边分别平行的四边形是平行四边形
    - 两组对边分别相等的四边形是平行四边形
    - 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形
    - 对角线互相平分的四边形是平行四边形

二、要点

1. 本章的主要内容是平行四边形的性质与判定．探索并证明了平行四边形的三个性质定理：平行四边形的对边相等、对角相等、对角线互相平分．还探索并证明了平行四边形的三个判定定理：两组对边分别相等的四边形是平行四边形；一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；对角线互相平分的四边形是平行四边形．

2. 借助平行四边形，引入三角形中位线的定义，探索并证明了三角形中位线定理．

3. 本章把合情推理与演绎推理相结合，运用动态的变换方法，利用尺规作图，通过动手操作与多种思维方式（包括逆向思维等），探索猜想平行四边形的性质与判定方法，进而依据基本事实与一些已知的定理，通过演绎推理加以证明．体现了“让几何动起来”的思想，展示了“探索—归纳与猜想—证明”的全过程，这是我们认识平面图形、解决相关几何问题的一种重要方法．

复习题

A 组

1. 判断题(对的在括号内填“✓”，错的在括号内填“×”)

(1) 平行四边形的两组对边分别平行．(　　)

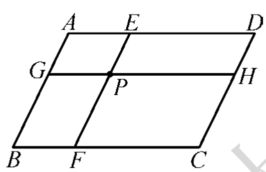
(2) 平行四边形的四个内角都相等．(　　)

(3) 平行四边形相邻两个内角的和等于180°．(　　)

(4) 如果平行四边形相邻两边的长分别是3、5，那么它的周长是16．(　　)

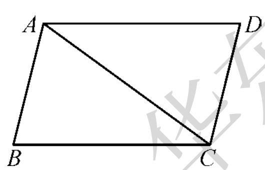
(5) 在▱$ABCD$中，如果$\angle A = 40°$，那么$\angle B = 50°$．(　　)

2. 如图，点P是▱$ABCD$内一点，过点P作直线EF、GH分别平行于AB、BC，并与▱$ABCD$分别相交于点G、F、H、E，试找出图中的平行四边形，与你的同伴比一比，看谁找得多．

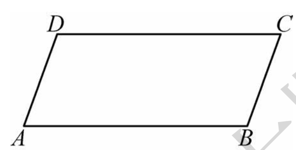


(第2题)

3. 如图，在▱$ABCD$中，$\angle BAC = 68°$，$\angle ACB = 36°$．求$\angle D$和$\angle BCD$的大小．



(第3题)



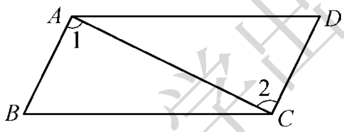
(第4题)

4. 如图，在▱$ABCD$中，$\angle A + \angle C = 140°$．求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$的大小．

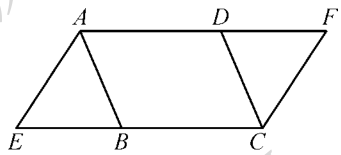
5. 已知平行四边形相邻两边长的比是3∶4，其中较长的边长是6 cm．求这个平行四边形的周长．

6. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B = \angle D$，$\angle 1 = \angle 2$. 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

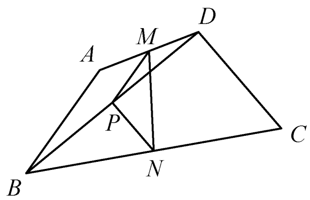
7. 如图，延长▱$ABCD$ 的边 AD 到点 F，使 $DF = DC$，延长边 CB 到点 E，使 $BE = BA$，分别连结点 A、E 和点 C、F. 求证：$AE = CF$.



（第 6 题）



（第 7 题）



（第 9 题）

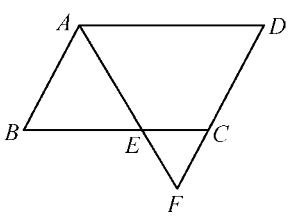
8. 证明：平行四边形对角线的交点到一组对边的距离相等.

9. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB = CD$，M、P、N 分别是 AD、BD、BC 的中点. 求证：$\angle PMN = \angle PNM$.

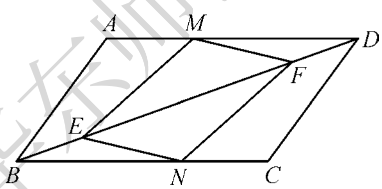
B 组

10. 如图，E 是▱$ABCD$ 边 BC 上的一点，且 $AB = BE$，连结 AE，并延长 AE 与 DC 的延长线交于点 F，$\angle F = 60°$. 求这个平行四边形各内角的大小.

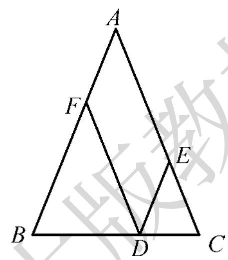
11. 如图，在▱$ABCD$ 中，点 M、N 分别在边 AD、BC 上，点 E、F 在对角线 BD 上，且 $DM = BN$，$BE = DF$. 求证：四边形 $MENF$ 是平行四边形.



（第 10 题）



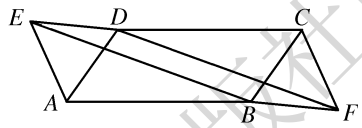
（第 11 题）



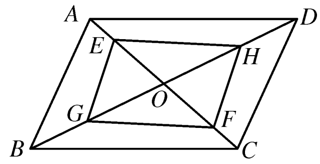
（第 12 题）

12. 如图，D 是等腰三角形 ABC 的底边 BC 上的一点，点 E、F 分别在边 AC、AB 上，且 $DE \parallel AB$，$DF \parallel AC$. 试问：DE、DF 与 AB 之间有什么关系？请说明理由.

13. 如图，以▱$ABCD$ 的边 AD、BC 为边分别向外作等边三角形 ADE 和 BCF．求证：四边形 $DEBF$ 是平行四边形.



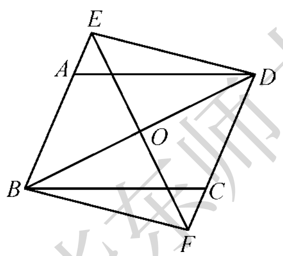
（第 13 题）



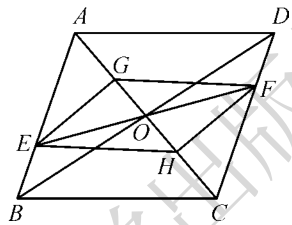
（第 14 题）

14. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，点 E、F 在 AC 上，点 G、H 在边 BD 上，且 $AE = CF$， $BG = DH$．求证： $GF = HE$.

15. 如图，点 O 为▱$ABCD$ 的对角线 BD 的中点，直线 EF 经过点 O，分别交 BA、DC 的延长线于点 E、F，分别连结点 B、F 和点 D、E．求证：四边形 $BFDE$ 是平行四边形.



（第 15 题）

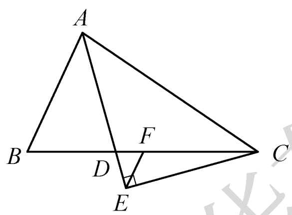


（第 16 题）

16. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，EF 经过点 O 且分别交 AB、CD 于点 E、F，点 G、H 分别为 OA、OC 的中点．求证：四边形 $EHFG$ 是平行四边形.

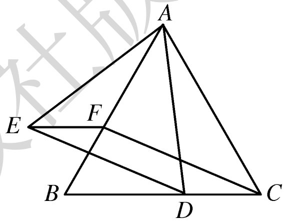
C 组

17. 如图，AD 平分 $\angle BAC$，交 BC 于点 D，过点 C 作 AD 的垂线，交 AD 的延长线于点 E，F 为边 BC 的中点，连结 EF．求证：$EF \parallel AB$.



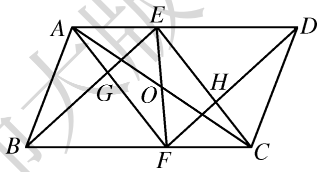
（第 17 题）

18. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，$CD = BF$. 求证：四边形 $CDEF$ 是平行四边形.



（第 18 题）

19. 如图，在▱$ABCD$ 中，过对角线 AC 的中点 O 作直线 EF 分别与 AD、BC 交于点 E、F，连结 BE、AF 相交于点 G，连结 EC、FD 相交于点 H，图中有几个平行四边形，为什么？



（第 19 题）

20. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E、F 分别为边 BC、AB、AC 上的点，连结 FD，并延长至点 G. 已知 $FD \parallel AB$，你认为再增加什么条件，可以使得线段 AG 与 ED 互相平分？画出图形，试试看，相信你一定会得到满意的答案.

第 18 章

矩形、菱形与正方形

你见过这样的大门吗？它伸缩自如，开启和关闭都十分方便．你可以看到门上含有不少几何图形，其中有你所熟悉的平行四边形，有些还是一些特殊的平行四边形．

★ 本章将在理解平行四边形、矩形、菱形和正方形之间关系的基础上，着重探索矩形、菱形和正方形的性质与判定方法，从中进一步感受研究图形几何性质的思路和方法．

18.1 矩　形

1. 矩形的性质

试一试

给你一个平行四边形相邻两边的长，你能利用尺规作图作出这个平行四边形吗？相信你能行！如图 18.1.1 所示，作出那样的平行四边形.

现在将你与同伴所作的图形放在一起，仔细看看，发现它们都是平行四边形，相邻两边的长也一样. 但似乎又不完全一样——两邻边之间的夹角有大有小.

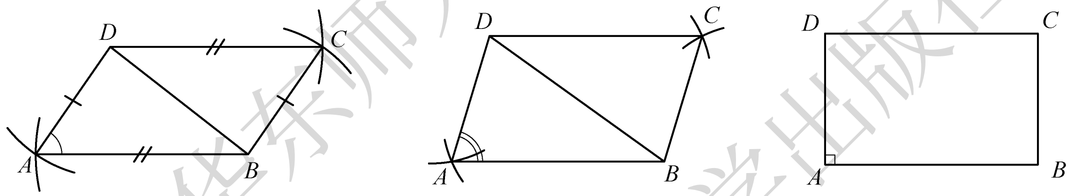


图18.1.1

我们若改变平行四边形的内角，使其一个内角恰好为直角，就得到一种特殊的平行四边形，也就是我们早已熟悉的长方形，即**矩形**（rectangle），如图 18.1.2 所示. 矩形是有一个角为直角的平行四边形.

矩形是一种特殊的平行四边形.

思考　作为一种特殊的平行四边形，矩形具有平行四边形的一般性质，同时也具有一些特殊性质. 观察图 18.1.2 所示的矩形，将你的发现填入下表.

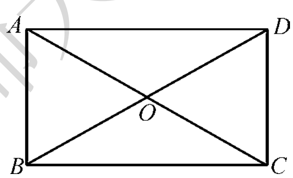


图18.1.2

	对称性	边	角	对角线
平行四边形的一般性质	中心对称			
矩形的特殊性质				

我们发现，作为特殊的平行四边形，矩形既是中心对称图形，也是轴对称图形，对称轴为通过对边中点的直线.

矩形有几条对称轴?

由此，很容易猜想矩形所具有的一些特殊性质：

矩形的性质定理 1　矩形的四个角都是直角.

矩形的性质定理 2　矩形的对角线相等.

对于性质定理 1，如图 18.1.3，我们很容易根据矩形的定义和平行四边形角的性质加以证明.

图18.1.3

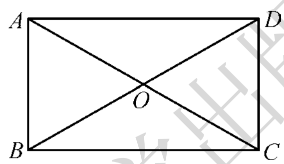


图18.1.4

对于性质定理 2，如图 18.1.4，我们可以找到对角线 AC、BD 分别所在的三角形，借助性质定理 1 证明这两个三角形全等，从而得到结论.

请给出完整的证明过程.

▶ **例 1**　如图 18.1.5，矩形 $ABCD$ 被两条对角线分成四个小三角形，如果这四个小三角形周长的和是 86 cm，矩形的对角线长是 13 cm，那么该矩形的周长是多少?

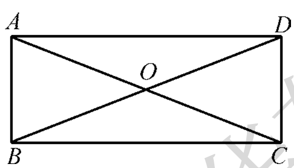


图18.1.5

解 $\because$ $\triangle AOB$、$\triangle BOC$、$\triangle COD$和$\triangle AOD$这四个小三角形周长的和为86 cm，

$\therefore$ $AB + BC + CD + DA + 2(OA + OB + OC + OD)$

$= AB + BC + CD + DA + 2(AC + BD) = 86.$

又$\because$ $AC = BD = 13$(矩形的对角线相等)，

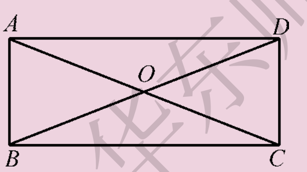
$\therefore$ $AB + BC + CD + DA = 86 - 2(AC + BD)$

$= 86 - 4 \times 13 = 34(\text{cm}).$

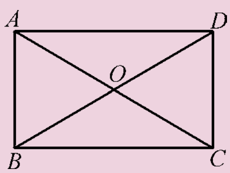
即该矩形的周长是34 cm．

练习

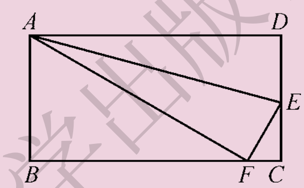
1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，试找出图中相等的线段和相等的角．
2. 如图，矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，$\angle AOD = 120°$．求证：$AC = 2AB$．
3. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 在边 CD 上．将该矩形沿 AE 折叠，恰好使点 D 落在边 BC 上的点 F 处．如果 $\angle BAF = 60°$，求 $\angle DAE$ 的大小．



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

▶ **例 2** 如图 18.1.6，在矩形 $ABCD$ 中，$AB = 3$，$BC = 4$，$BE \perp AC$，垂足为点 E．求 BE 的长．

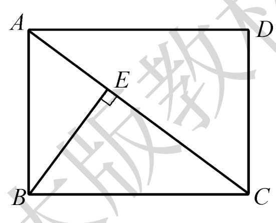


图18.1.6

解 在矩形 $ABCD$ 中，$\angle ABC = 90°$，

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

又$\because$ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}AC \cdot BE$，

$\therefore$ $BE = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{3 \times 4}{5} = 2.4.$

▶ **例 3** 如图 18.1.7，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，AE 垂直且平分线段 BO，垂足为点 E，$BD = 15\,\mathrm{cm}$．求 AC、AB 的长．

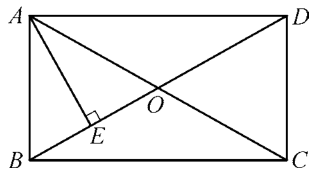


图18.1.7

解 ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AC = BD = 15$（矩形的对角线相等）．

∴ $AO = \frac{1}{2}AC = 7.5$．

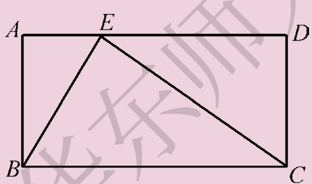
∵ AE 垂直平分 BO，

∴ $AB = AO = 7.5$．

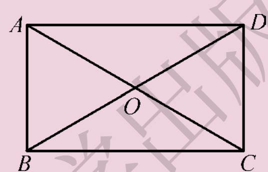
即 AC 的长为 $15\,\mathrm{cm}$，AB 的长为 $7.5\,\mathrm{cm}$．

练习

1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，E 是边 AD 上的一点．试说明△BCE 的面积与矩形 $ABCD$ 的面积之间的关系．



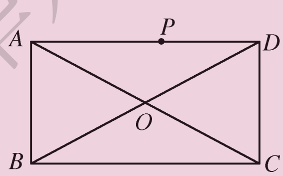
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$\angle AOB = 60°$，$AB = 3.6$．求 AC、AD 的长．（精确到0.1）

3. 如图，点 P 是矩形 $ABCD$ 的边 AD 上的一个动点，矩形的两条边长 AB、BC 分别为 8 和 15．求点 P 到矩形的两条对角线 AC 和 BD 的距离之和．（提示：记对角线 AC 与 BD 的交点为点 O，连结 OP）



（第 3 题）

2. 矩形的判定

我们已经知道，有一个角是直角的平行四边形是矩形，这是矩形的定义，我们可以依此判定一个四边形是不是矩形．除此之外，我们能否找到其他判定矩形的方法呢？

矩形是特殊的平行四边形，具有如下性质：

1. 四个角都是直角；
2. 两条对角线相等．

这些性质，对我们寻找判定矩形的方法有什么启示？

思考　让我们先思考有关的角．由矩形的性质“四个角都是直角”，你可能会想到，如果一个四边形的四个角都是直角，那它肯定是一个矩形．的确如此，但是，条件能否再减少一些，三个角是直角的四边形是矩形吗？

试一试

如图 18.1.8，作一个三个角都是直角的四边形．

作法：

（1）任意作两条互相垂直的线段 AB、AD；

（2）过点 B 作垂直于 AB 的直线 l；

（3）过点 D 作垂直于 AD 的直线 m，与直线 l 相交于点 C．

四边形 $ABCD$ 即为所要求作的四边形．

观察你所作的图形，它是一个矩形吗？

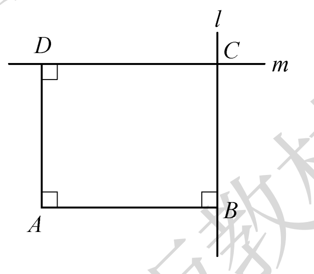


图18.1.8

由此可以得到判定矩形的一种方法：

矩形的判定定理 1　有三个角是直角的四边形是矩形.

你能证明这个结论吗？

思考　现在让我们再思考有关的线段.

“对角线相等”是矩形所特有的性质．那么从对角线的角度，你可以得到关于矩形判定的什么猜想？与你的同伴交流一下，看看你们的想法是否一致、可行.

由此，我们可以得到一个猜想：“如果一个平行四边形的两条对角线相等，那么这个平行四边形是矩形.”

试一试

如图 18.1.9，作一个对角线相等的平行四边形.

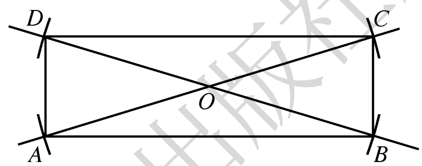


图18.1.9

作法：

（1）任意作两条相交的直线，交点记为 O；

（2）以点 O 为圆心、适当长为半径作弧，在两条直线上分别截取相等的四条线段 OA、OB、OC、OD；

（3）顺次连结所得的四点.

四边形 $ABCD$ 的两条对角线相等且互相平分，即为所要求作的四边形.

和你的同伴交流一下，看看这个平行四边形是不是矩形.

由此可以得到判定矩形的另一种方法：

矩形的判定定理 2　对角线相等的平行四边形是矩形.

下面我们用演绎推理进行证明.

已知：如图 18.1.10，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AC=DB$.

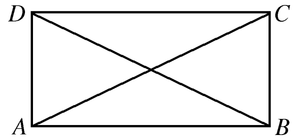


图18.1.10

求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.

证明 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB=DC$.

又 $\because AC=DB$， $BC=CB$，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$，

$\therefore \angle ABC=\angle DCB$.

$\because AB \parallel DC$，

$\therefore \angle ABC+\angle DCB=180°$.

$\therefore \angle ABC=\angle DCB=90°$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形（有一个角是直角的平行四边形是矩形）.

这一判定方法在日常生活中经常被应用．例如，木工师傅在制作门框或其他矩形形状的物体时，常用测量对角线的方法，来检验产品是否符合要求.

▶ **例 4** 如图 18.1.11，点 O 是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 的交点，E、F、G、H 分别是 AO、BO、CO、DO 上的一点，且 $AE=BF=CG=DH$. 求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.

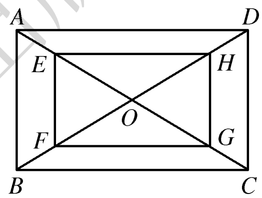


图18.1.11

证明 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AC=BD$；

$$AO=CO=\frac{1}{2}AC,\quad BO=DO=\frac{1}{2}BD.$$

$\therefore AO=BO=CO=DO$.

$\because AE=BF=CG=DH$，

$\therefore OE=OF=OG=OH$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

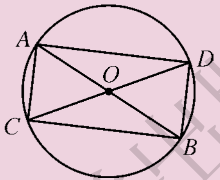
$\because EO+OG=FO+OH$，

$\therefore EG=FH$.

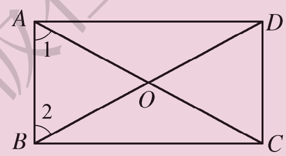
$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形（对角线相等的平行四边形是矩形）.

练习

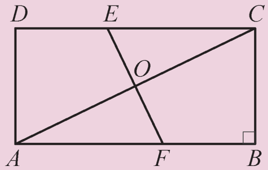
1. 如图，AB、CD 是⊙O 的两条直径，四边形 $ACBD$ 是矩形吗？证明你的结论.
2. 如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle 1 = \angle 2$. 此时，四边形 $ABCD$ 是矩形吗？为什么？



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$BF = DE$，AC 与 EF 互相平分并相交于点 O，$\angle B = 90°$. 求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.

▶ **例 5**　如图 18.1.12，四边形 $ABCD$ 是由两个全等的正三角形 ABD 和 BCD 组成的，M、N 分别为 BC、AD 的中点. 求证：四边形 $BMDN$ 是矩形.

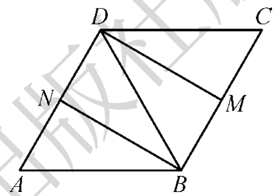


图18.1.12

证明　∵ $\triangle ABD$ 和$\triangle BCD$ 是全等的正三角形，

∴ $\angle ADB = \angle CDB = 60°$.

又∵ M、N 分别为 BC、AD 的中点，

∴ $BN \perp AD$，$DM \perp BC$，$\angle BDM = \dfrac{1}{2}\angle BDC = 30°$.

∴ $\angle DNB = \angle DMB = 90°$，

$\angle MDN = \angle ADB + \angle BDM = 90°$.

∴ 四边形 $BMDN$ 是矩形（有三个角是直角的四边形是矩形）.

▶ **例 6**　如图 18.1.13，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$AD \perp BC$，垂足为点 D，AG 是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle FAC$ 的平分线，$DE \parallel AB$，交 AG 于点 E. 求证：四边形 $ADCE$ 是矩形.

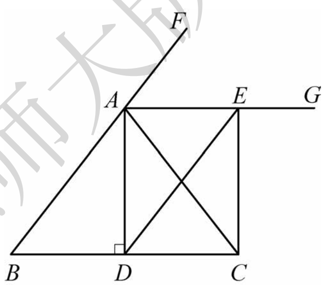


图18.1.13

证明 $\because AB = AC$, $AD \perp BC$,

$\therefore \angle B = \angle ACB$, $BD = DC$.

又 $\because$ AE 是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle CAF$ 的平分线,

$\therefore \angle FAE = \frac{1}{2}\angle CAF = \frac{1}{2}(\angle B + \angle ACB) = \angle B$.

$\therefore AE \parallel BC$.

又 $\because DE \parallel AB$,

$\therefore$ 四边形 $ABDE$ 是平行四边形.

$\therefore AE = BD$, $AB = DE$.

$\therefore AC = DE$, $AE = DC$.

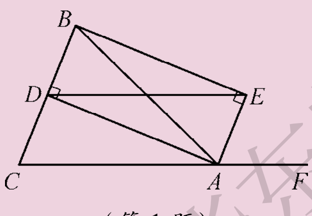
又 $\because AE \parallel DC$,

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是平行四边形.

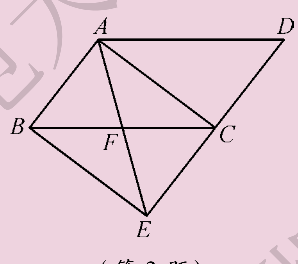
$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是矩形(对角线相等的平行四边形是矩形).

练习

1. 如图, AD、AE 分别是$\triangle ABC$ 的内角$\angle BAC$ 和外角$\angle BAF$ 的平分线, $BE \perp AE$, $DA \perp BC$. 求证: 四边形 $AEBD$ 是矩形.
2. 一个四边形满足: 它的每个顶点到其他三个顶点的距离之和相等. 试证明该四边形为矩形.



(第 1 题)

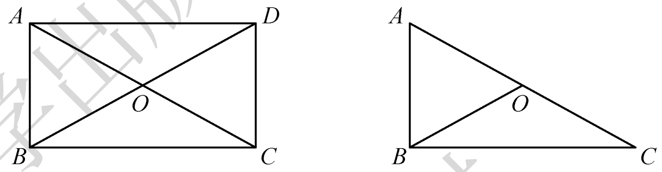


(第 3 题)

3. 如图, 将▱$ABCD$ 的边 DC 延长到点 E, 使 $CE = DC$, 连结 AE, 交 BC 于点 F, $\angle AFC = 2\angle D$, 连结 AC、BE. 求证: 四边形 $ABEC$ 是矩形.

思考 我们已经知道，矩形的两条对角线相等且互相平分，如图18.1.14①所示．在矩形 $ABCD$ 中，$AC=BD$， $AO=OC$， $BO=OD$．

若擦去半个矩形，如图 18.1.14②，BO 即是 Rt$\triangle ABC$ 斜边 AC 上的中线，由此，你能发现 BO 与斜边 AC 的关系吗？



① ②

图18.1.14

▶ **例 7** 如图 18.1.15，在 Rt$\triangle ABC$ 中，BO 为斜边 AC 上的中线．

求证：$BO=\dfrac{1}{2}AC$．

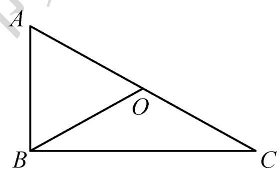


图18.1.15

将$\triangle ABC$ 补成矩形，即可得到要求证的结论．

证明 如图 18.1.16，延长 BO 至点 D，使 $OD=OB$， 连结 AD 和 CD．

在四边形 $ABCD$ 中，

$\because$ $OA=OC$， $OB=OD$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

又 $\because$ $\angle ABC=90°$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形．

从而 $AC=BD$， $BO=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{1}{2}AC$．

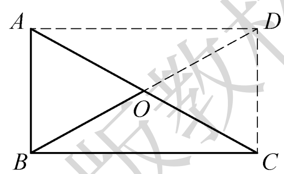


图18.1.16

由此，我们得到直角三角形的一个性质：

定理　直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

试一试

写出上述结论的逆命题，观察图 18.1.17，试判断该逆命题是否成立.

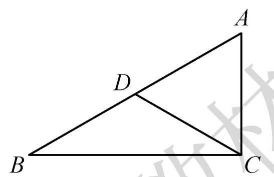


图18.1.17

图 18.1.17 中，$CD=AD=BD$. 即边 AB 上的中线 CD 将整个三角形分成了两个等腰三角形，利用等腰三角形两底角相等的性质，容易证明 $\angle ACD$ 与 $\angle BCD$ 的和为 90°，即该三角形确实是一个直角三角形.

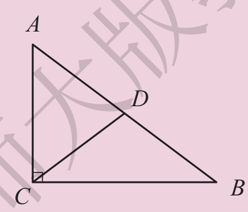
试写出完整的证明过程.

于是有：

如果一个三角形一边上的中线等于该边的一半，那么这个三角形是一个直角三角形.

练习

1. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，点 D 为斜边 AB 的中点，$AC=6$，$BC=8$，求 CD 的长.
2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=2AC$，求 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的度数.



（第 1 题）

阅读材料

完 美 矩 形

在房屋装修时，客厅地面通常是使用同样大小的正方形地砖铺设.

而若客厅的矩形地面上，正方形地砖的大小各不相同，但砖与砖之间、砖与墙之间没有空隙，并且能使每块地砖都保持完整，那将是多么奇特别致啊！

如果一个矩形内部能用一些大小各不相同的正方形铺满，既不重叠，又无缝隙，就称它为完美矩形(perfect rectangle). 完美矩形非常罕见，一旦遇到，总会立刻吸引人们多看几眼.

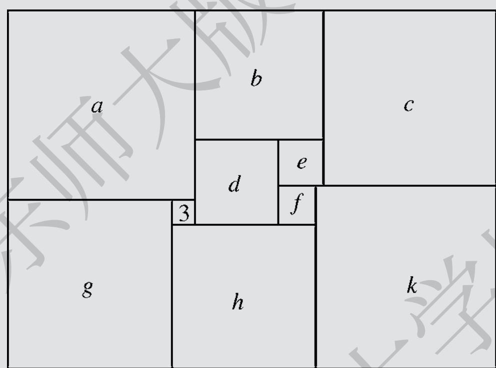


图 1

图 1 是一个完美矩形的例子. 它是用 10 个不同大小的正方形拼成的，其中最小的一个正方形内写着数字 3，表明它的边长是 3，其他正方形内用字母表示其边长.

图 1 中这些用字母表示的正方形边长各是多少？这个完美矩形的长和宽又是多少呢？

由图 1 可以看出各条边的长满足以下关系式：

$$a = g + 3,$$

$$h = g - 3,$$

$$b = a + 3 - d,$$

$$e = b - d,$$

$$f = d - e,$$

$$h = d + f + 3,$$

$$c = b + e,$$

$$k = f + h,$$

$$e + c = f + k.$$

这样就构成了一个九元一次方程组．由前六个式子，可得

$$g = 2d.$$

由此容易求出

$$a = 25,\quad b = 17,\quad c = 23,$$

$$d = 11,\quad e = 6,\quad f = 5,$$

$$g = 22,\quad h = 19,\quad k = 24.$$

矩形的长和宽分别是 65 和 47．

图 1 中的矩形由 10 个正方形拼成，称为 10 阶完美矩形．这是一个非常好的例子，矩形的长和宽很小，正方形的个数也相对较少．

组成完美矩形的正方形的个数能不能更少些呢？

图 2 是一个 9 阶完美矩形的例子，它的长和宽分别是 33 和 32，组成它的 9 个正方形的边长从小到大依次是：1，4，7，8，9，10，14，15，18．

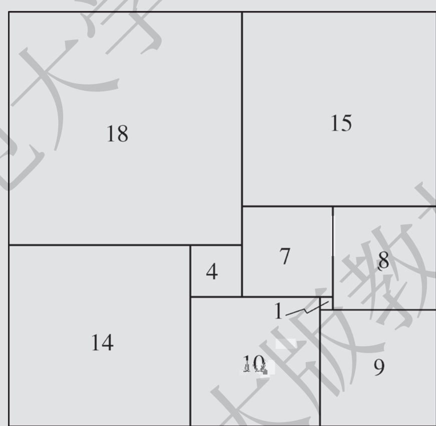


图 2

正方形的个数还能不能再减少呢？能不能用 8 个边长各不相同的正方形拼成一个矩形？这是不可能的，数学上已经证明，完美矩形的最低阶数是 9．

完美矩形的例子再次告诉我们，在日常生活中，隐含着许多数学道理，等待我们去研究和探索．

习题18.1

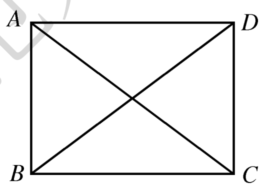
A 组

1. 如图，在▱$ABCD$ 中，$AB=6$， $BC=8$， $AC=10$.

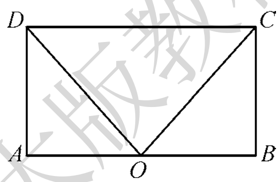
（1）求证：四边形 $ABCD$ 是矩形；

（2）求 BD 的长.

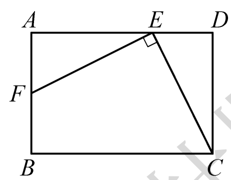
2. 如图，在▱$ABCD$ 中，O 是边 AB 的中点，且 $\angle AOD=\angle BOC$. 求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.



（第 1 题）



（第 2 题）



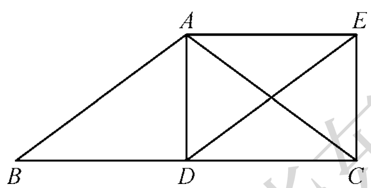
（第 3 题）

3. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$EF\perp CE$， $EF=CE$， $DE=2\,\text{cm}$， 该矩形的周长为 $24\,\text{cm}$.

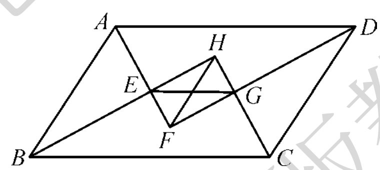
（1）求证：$\triangle AFE\cong\triangle DEC$；

（2）求 AE 的长.

4. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 是边 BC 的中点. 过点 A、 D 分别作 BC 和 AB 的平行线，并相交于点 E，连结 EC、 AD. 求证：四边形 $ADCE$ 是矩形.



（第 4 题）



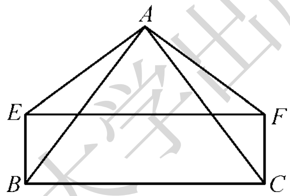
（第 5 题）

5. 如图，在▱$ABCD$ 中，AF、BH、CH、DF 分别是$\angle DAB$、$\angle ABC$、$\angle BCD$ 和$\angle CDA$ 的平分线，AF 与 BH 相交于点 E，CH 与 DF 相交于点 G. 求证：$EG=FH$.

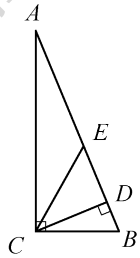
B 组

6. 如图，$AB = AC$，$AE = AF$，且 $\angle EAB = \angle FAC$，$EF = BC$. 求证：四边形 $EBCF$ 是矩形.

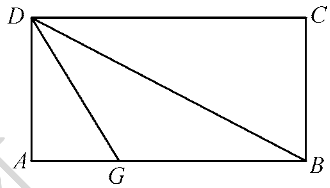
7. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$CD \perp AB$，垂足为点 D，$\angle ACD = 3\angle BCD$，E 是斜边 AB 的中点，求 $\angle ECD$ 的大小.



（第 6 题）



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，将矩形纸片 $ABCD$ 折叠，先折出折痕（对角线）BD，再折叠，将边 AD 重叠到对角线 BD 上，得折痕 DG，$AB = 2$，$BC = 1$. 求 AG 的长.（精确到 0.01）

（提示：作 $GE \perp BD$，记垂足为点 E，设 $AG = x$，列出 x 满足的等量关系）

18.2 菱 形

1. 菱形的性质

做一做

将一张矩形的纸对折，再对折，然后沿着图 18.2.1 所示的虚线剪下，打开，你发现这是一个什么样的图形？

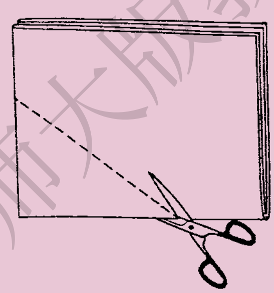


图18.2.1

这就是另一种特殊的平行四边形，即**菱形**(rhombus).

如图 18.2.2，菱形是有一组邻边相等的平行四边形.

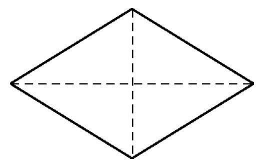


图18.2.2

思考　作为一种特殊的平行四边形，菱形具有平行四边形的一般性质，同时也具有一些特殊性质.观察图 18.2.2 所示的菱形，将你的发现填入下表.

	对称性	边	角	对角线
平行四边形的一般性质	中心对称			
菱形的特殊性质				

如图 18.2.3，我们发现，菱形既是中心对称图形，也是轴对称图形，对称轴为它的对角线所在的直线.

菱形有几条对称轴？对称中心在哪里？

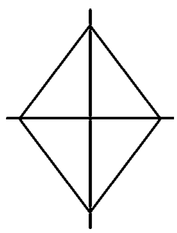


图18.2.3

由此，很容易猜想菱形所具有的特殊性质：

菱形的性质定理 1　菱形的四条边都相等.

菱形的性质定理 2　菱形的对角线互相垂直.

对于性质定理 1，如图 18.2.4，我们很容易根据菱形的定义和平行四边形的性质加以证明.

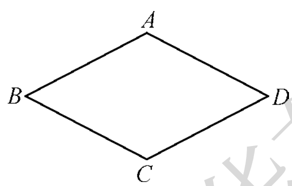


图18.2.4

对于性质定理 2，如图 18.2.5，我们可以依据性质定理 1，找到其中的等腰三角形，由“等腰三角形的三线合一”得到结论.

请给出完整的证明过程.

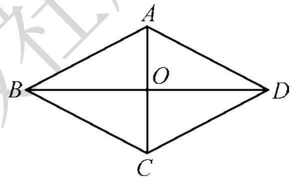


图18.2.5

▶ **例 1** 如图 18.2.6，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD = 2\angle B$. 试求出 $\angle B$ 的大小，并说明 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

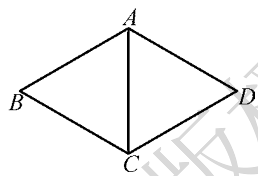


图18.2.6

解 在菱形 $ABCD$ 中，

$\because$ $\angle B + \angle BAD = 180°$，

$\angle BAD = 2\angle B$，

$\therefore$ $\angle B = 60°$.

在菱形 $ABCD$ 中，

$\because$ $AB = BC$（菱形的四条边都相等），

$\angle B = 60°$，

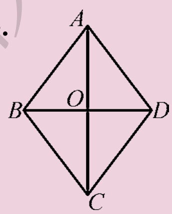
$\therefore$ $\triangle ABC$ 是等边三角形.

菱形的应用非常广泛．有一种衣帽架，如图 18.2.7 所示，可以根据需要将它伸缩，形成各种形状的菱形，固定在墙上，既美观又实用.

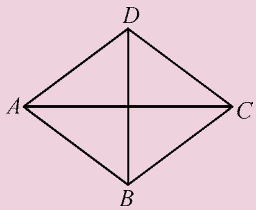

图18.2.7

练习

1. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=5$，$OA=4$. 求该菱形的周长和两条对角线的长.
2. 试说明菱形的面积等于它的两条对角线长的乘积的一半.
3. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=10$，$BD=12$. 求该菱形的面积.



（第 1 题）



（第 3 题）

▶ **例 2**　如图 18.2.8，已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2 cm，$\angle BAD=120°$，对角线 AC、BD 相交于点 O. 求这个菱形的两条对角线 AC 和 BD 的长.（保留根号）

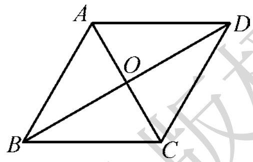


图18.2.8

解　$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore\ OB=OD$，

$AB=AD$（菱形的四条边都相等）.

又 $\because\ AO=AO$，

$\therefore\ \triangle ABO\cong\triangle ADO$.

$\therefore\ \angle BAO=\angle DAO=\dfrac{1}{2}\angle BAD=60°$.

在 $\triangle ABC$ 中，

$\because\ AB=BC$，$\angle BAC=60°$，

$\therefore\ \triangle ABC$ 为等边三角形.

$\therefore\ AC=AB=2(\mathrm{cm})$.

在菱形 $ABCD$ 中，

$\because\ AC\perp BD$（菱形的对角线互相垂直），

$\therefore\ \triangle AOB$ 为直角三角形.

$\therefore\ BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

$\therefore\ BD=2BO=2\sqrt{3}(\mathrm{cm})$.

▶ **例 3** 如图 18.2.9，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，AE 垂直且平分 CD，垂足为点 E．求 $\angle BCD$ 的大小．

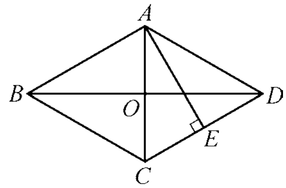


图18.2.9

解 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore$ $AD = DC = CB = BA$（菱形的四条边都相等）．

又 $\because$ AE 垂直平分 CD，

$\therefore$ $AC = AD$．

$\therefore$ $AC = AD = DC = CB = BA$，

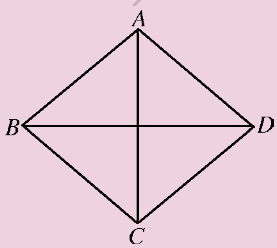
即$\triangle ADC$ 和$\triangle ABC$ 都是等边三角形．

$\therefore$ $\angle ACD = \angle ACB = 60°$．

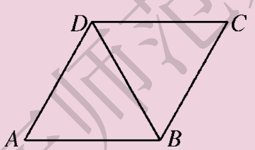
$\therefore$ $\angle BCD = 120°$．

练习

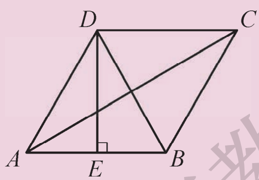
1. 如图，已知菱形 $ABCD$ 的边 $AB = 5\,\text{cm}$，一条对角线 $AC = 6\,\text{cm}$．求这个菱形的周长和它的面积．
2. 如图，已知菱形 $ABCD$ 的一条对角线 BD 恰好与其边 AB 的长相等．求这个菱形各内角的大小．



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，E 是 AB 的中点，且 $DE \perp AB$，$AB = 4$．

（1）求两条对角线 AC、BD 的长（保留根号）；

（2）求菱形 $ABCD$ 的面积（精确到 0.1）．

2. 菱形的判定

我们已经知道，有一组邻边相等的平行四边形是菱形，这是菱形的定义. 我们可以根据定义来判定一个四边形是不是菱形. 除此之外，还能找到其他的判定方法吗？

菱形是特殊的平行四边形，具有如下性质：

1. 四条边都相等；

2. 两条对角线互相垂直.

这些性质，对我们寻找判定菱形的方法有什么启示呢？

思考

对于一般的四边形，如何寻找判定它是不是菱形的方法呢？由菱形的性质“四条边都相等”，你可能会想到：如果一个四边形的四条边都相等，那么它肯定是一个菱形. 试着画一画，与周围的同学讨论，猜一猜结论是否成立.

试一试

如图 18.2.10，作一个四条边都相等的四边形.

作法：

（1）作两条相等的线段 AB、AD；

（2）分别以点 B 和点 D 为圆心、AB 长为半径作弧，两弧相交于点 C；

（3）连结 BC、CD.

四边形 $ABCD$ 即为所要求作的四边形.

观察你所画的图形，它是菱形吗？

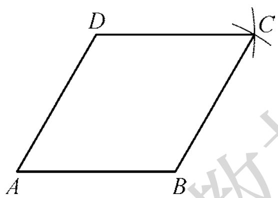


图18.2.10

由此我们可以得到判定菱形的一种方法：

菱形的判定定理 1　四条边都相等的四边形是菱形.

> 你能证明这个结论吗?

这里的条件能否再减少一些呢？有三条边相等的四边形是菱形吗？试着画一画，相信你很快会发现，这个结论是不成立的.

▶ **例 4**　如图 18.2.11，在矩形 $ABCD$ 中，点 E、F、G、H 分别是四条边的中点. 试问：四边形 $EFGH$ 是什么图形？并说明理由.

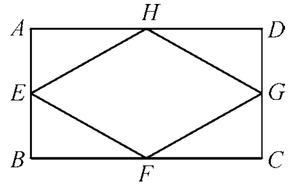


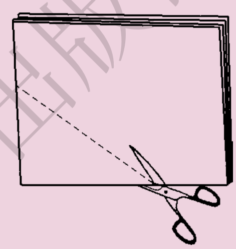
图18.2.11

分析　四边形 $EFGH$ 的四条边分别属于矩形四个角上的三角形，如果能够证明这四个三角形全等，那么就可以利用菱形的判定定理 1，得出四边形 $EFGH$ 是菱形.

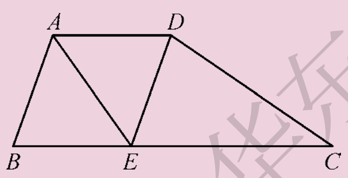
你能说出完整的证明过程吗？

练习

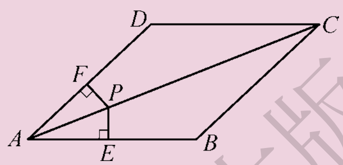
1. 你还记得做过的剪纸探索吗？如图，将一张矩形的纸对折，再对折，然后沿着虚线剪下，打开，你发现这是一个特殊的平行四边形——菱形. 现在你能说明其中的理由吗？


（第 1 题）

2. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB = AD$，$\angle BAD$ 的平分线 AE 交 BC 于点 E，连结 DE. 求证：四边形 $ABED$ 是菱形.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在▱$ABCD$ 中，点 P 是对角线 AC 上的一点，$PE \perp AB$，$PF \perp AD$，垂足分别为点 E、F，且 $PE = PF$. 问：▱$ABCD$ 是菱形吗？为什么？

思考　“对角线互相垂直”是菱形所特有的性质．那么从对角线的角度，你可以得到关于菱形判定的什么猜想？和你的同伴交流一下，看看你们的想法是否一致、可行．

由此，我们可以得到一个猜想：“如果一个平行四边形的两条对角线互相垂直，那么这个平行四边形是菱形．”

探索　如图 18.2.12，取两根长度不等的细木棒，让这两个细木棒的中点重合并固定在一起，用笔和直尺画出木棒四个端点的连线．我们知道，这样得到的四边形是平行四边形．转动其中一根木棒，重复上面的做法，当两根木棒之间的夹角等于 90°时，得到的是什么图形呢？

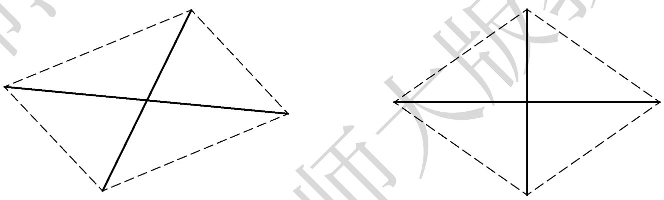


图18.2.12

和周围的同学交流彼此的结论．

试一试

如图 18.2.13，作一个两条对角线互相垂直的平行四边形．

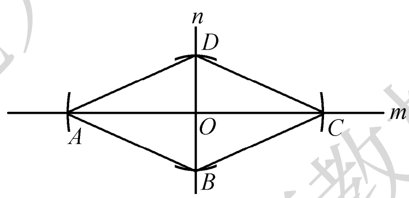


图18.2.13

作法：

（1）作两条互相垂直的直线 m、n，记交点为 O；

（2）以点 O 为圆心、适当长为半径作弧，在直线 m 上截取相等的两条线段 OA、OC；

（3）以点 O 为圆心、另一适当长为半径作弧，在直线 n 上截取相等的两条线段 OB、OD；

（4）顺次连结所得的四个点．

显然，四边形 $ABCD$ 是一个对角线互相垂直且平分的四边形，即为所要求作的两条对角线互相垂直的平行四边形.

和你的同伴交流一下，看看它是否也是一个菱形.

这就是判定菱形的另一种方法：

菱形的判定定理 2　对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

结论的证明很简单. 如图 18.2.14，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC、BD 互相垂直，只需证明有一组邻边相等，即可证得▱$ABCD$ 是菱形.

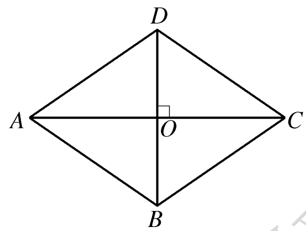


图18.2.14

证明　∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $OA = OC$.

又∵ $AC \perp BD$，

∴ BD 所在直线是线段 AC 的垂直平分线.

∴ $AB = BC$.

∴ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形(有一组邻边相等的平行四边形是菱形).

▶ **例 5**　如图 18.2.15，已知矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的垂直平分线与边 AD、BC 分别相交于点 E、F. 求证：四边形 $AFCE$ 是菱形.

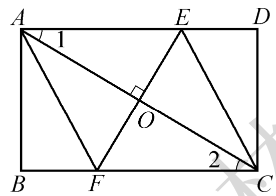


图18.2.15

证明　∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AE \parallel FC$.

∴ $\angle 1 = \angle 2$.

∵ EF 平分 AC，

∴ $OA = OC$.

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，

∵ $\angle 1 = \angle 2$，$OA = OC$，$\angle AOE = \angle COF$，

∴ $\triangle AOE \cong \triangle COF$.

∴ $OE = OF$.

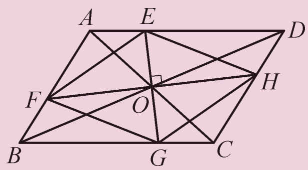
∴ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形.

又∵ $EF \perp AC$，

∴ 四边形 $AFCE$ 是菱形(对角线互相垂直的平行四边形是菱形).

练习

1. 给定一条线段 AC，你能否利用尺规作图作出一个菱形，使 AC 为该菱形的一条对角线？试试看.
2. 如图，过▱$ABCD$ 的对角线的交点 O，作互相垂直的两条直线 EG、FH，与▱$ABCD$ 各边分别相交于点 E、F、G、H. 求证：四边形 $EFGH$ 是菱形.



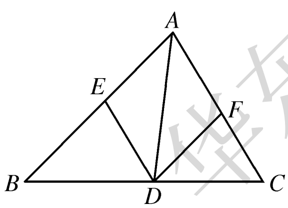
（第 2 题）

3. 设计一个由一条对角线在同一条直线上的四个菱形交叉组成的花边图案，其长为 15 cm，宽为 4 cm，试画出它的图形.

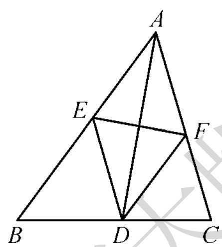
习题18.2

A 组

1. 已知菱形 $ABCD$ 的两条对角线 AC、BD 的长分别为 6 cm 和 8 cm. 求这个菱形的周长和它的面积.
2. 如图，AD 是△ABC 的一条角平分线，$DE \parallel AC$ 交 AB 于点 E，$DF \parallel AB$ 交 AC 于点 F. 求证：四边形 $AEDF$ 是菱形.



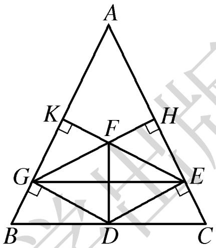
（第 2 题）



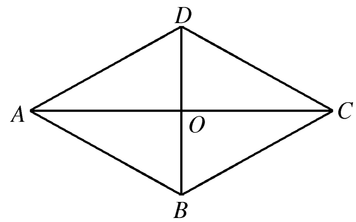
（第 3 题）

3. 如图，AD 是∠BAC 的平分线，AD 的垂直平分线交 AB 于点 E，交 AC 于点 F. 求证：四边形 $AEDF$ 是菱形.

4. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，点D是BC的中点，$DE \perp AC$，$DG \perp AB$，$EK \perp AB$，$GH \perp AC$，垂足分别为点E、G、K、H，EK与GH相交于点F．求证：GE与FD互相垂直平分．



（第4题）



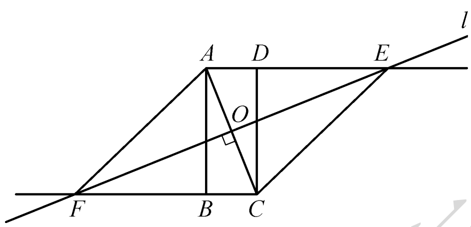
（第5题）

5. 如图，菱形$ABCD$的周长为$2p$，对角线AC、BD相交于点O，$AC + BD = q$．求菱形$ABCD$的面积．（提示：利用两数和的平方公式$(AC + BD)^2 = AC^2 + 2 \cdot AC \cdot BD + BD^2$和勾股定理）

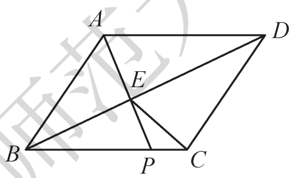
B 组

6. 如图，四边形$ABCD$是矩形，直线l垂直平分线段AC，垂足为点O，直线l分别与线段AD、CB的延长线相交于点E、F．求证：四边形$AFCE$为菱形．

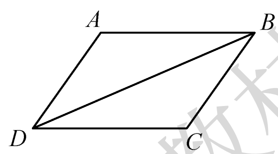
7. 如图，在▱$ABCD$中，点P在边BC上，连结BD交AP于点E，连结CE，$AE = CE$．求证：四边形$ABCD$是菱形．



（第6题）



（第7题）



（第8题）

8. 如图，已知BD是▱$ABCD$的对角线，将▱$ABCD$沿某条直线翻折，使点D与点B重合，该折痕与边AB相交于点E，与边CD相交于点F．

（1）作出折痕EF；

（2）若▱$ABCD$的面积$S_{▱ABCD} = 24$，求四边形$ADFE$的面积；

（3）连结DE、BF，求证：四边形$EDFB$是菱形．

18.3 正方形

正方形(square)是我们早已熟悉的平面图形，它既是中心对称图形，也是轴对称图形，具有如下性质：

正方形有几条对称轴？它的对称中心在哪里？

1. 四条边都相等；
2. 四个角都是直角；
3. 对角线相等且互相垂直平分.

因此，正方形可以看成：

有一个角是直角的菱形；

有一组邻边相等的矩形.

▶ **例 1** 如图 18.3.1，已知正方形 $ABCD$．求 $\angle ABD$、$\angle DAC$、$\angle DOC$ 的大小.

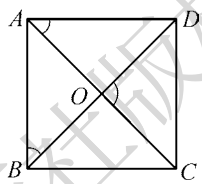


图18.3.1

分析 由正方形的特殊性质，可知 $\angle DOC = 90°$. 易证 $\triangle ABO \cong \triangle CBO$，从而可得

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \times 90° = 45°,$$

请写出完整的解答过程.

同理可得 $\angle DAC = 45°$.

讨论 老师给学生布置了一项任务：从一张彩色纸中剪出一个正方形.

小明剪完后，这样检验它：比较边长，发现四条边是相等的，于是就判定自己完成了这项任务．这种检验可信吗？

小兵用另一种方法检验：他量的不是边，而是对角线，他发现对角线是相等的，于是就认为自己正确地剪出了正方形．这种检验对吗？

小英剪完后，比较了由对角线相互分成的 4 条线段，发现它们是相等的．按照小英的意见，这说明剪出的四边形是正方形．你的意见怎样？

你认为应该如何检验，才能又快又准确呢？

读一读

我们在平行四边形的学习基础上，又探索研究了矩形、菱形、正方形的一些特点．这些几何图形之间的相互关系如图 18.3.2 所示．

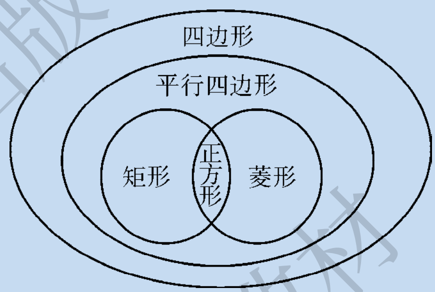


图18.3.2

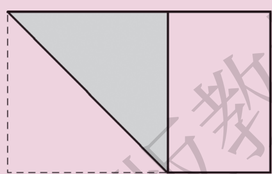
矩形、菱形都是特殊的平行四边形，因而既具有平行四边形的一般性质，又具有它们自己的特殊性质．

正方形是特殊的矩形，也是特殊的菱形，它具有更多的性质．

我们在研究几何图形时，必须关注这种一般与特殊的关系，从而更好地认识各种几何图形，顺利解决各类问题．

练习

1. 把一张矩形纸片如图那样折一下，就可以裁出正方形纸片．为什么？



（第 1 题）

2. 判断下列命题是否正确：

（1）正方形有四条对称轴；

（2）正方形的两条对角线将其分成 4 个全等的等腰直角三角形；

（3）对角线互相垂直的矩形是正方形；

（4）对角线相等的菱形是正方形．

3. 在下列各方格图中，有多少个正方形？有多少个矩形？

（第 3 题）

4. 已知正方形纸片 $ABCD$ 的边 AB 长 2 cm．求这个正方形的周长、对角线长和面积．（长度精确到 0.1 cm）

阅读材料

四边形的变身术

我们知道，一个平行四边形总可以剪开拼成一个矩形（如图 1）．

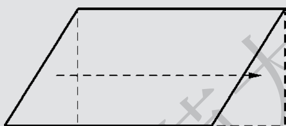


图 1

一个梯形可以剪开拼成一个矩形（如图 2），一个矩形可以剪开拼成一个三角形（如图 3）．

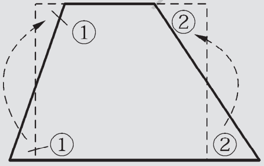


图 2

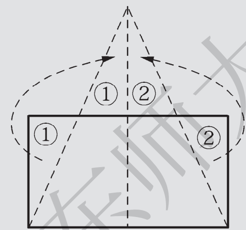


图 3

那么任意一个四边形呢？它也可以剪开拼成各种各样的图形．图 4 给出了一些剪拼的示意图，观察一下，你也试试看．

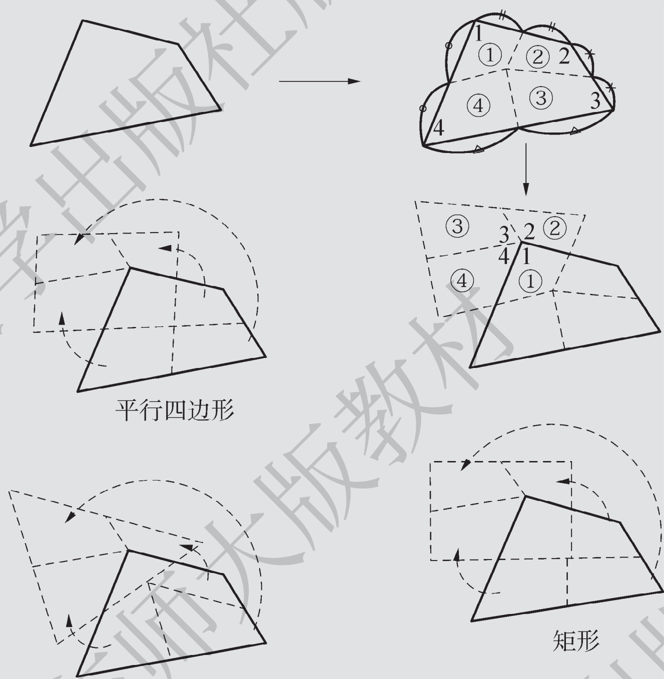


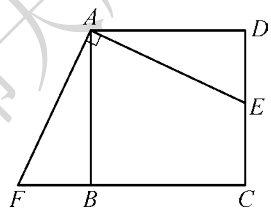
图 4

想想看，在这些剪拼过程中，都用到了图形的什么变换？

习题18.3

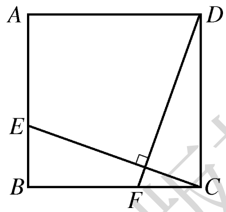
A 组

1. 如图，点 E 是正方形 $ABCD$ 的边 CD 上的一点，点 F 是 CB 的延长线上的一点，且 $EA \perp AF$．求证：$DE = BF$．

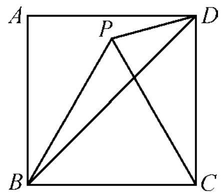


（第 1 题）

2. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，$CE \perp DF$. 求证：$CE = DF$.



（第 2 题）

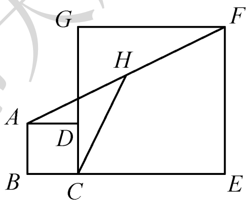


（第 3 题）

3. 如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，$\triangle BPC$ 是等边三角形. 求 $\triangle BPD$ 的面积.（精确到 0.01）（提示：$S_{\triangle BPD} = S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PCD} - S_{\triangle BCD}$）

B 组

4. 如图，在正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 中，点 D 在边 CG 上，$BC = 1$，$CE = 3$，H 是 AF 的中点，求 CH 的长.（保留根号）

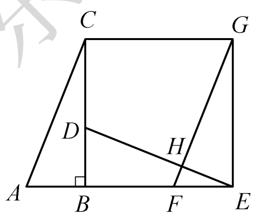


（第 4 题）

5. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = 90°$，先把 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 $90°$ 至 $\triangle DBE$ 后，再把 $\triangle ABC$ 沿射线 BE 平移至 $\triangle FEG$ 位置，DE、FG 相交于点 H.

（1）判断线段 DE 与 FG 的位置关系，并说明理由；

（2）连结 CG，求证：四边形 $CBEG$ 是正方形.



（第 5 题）

数学活动

探索图形变化中的不变量

我们已经知道一组邻边相等的平行四边形是菱形，它具有很多很好的性质：轴对称、四条边相等、两条对角线互相垂直.

现在让我们从菱形出发，让一个顶点动起来，可以发现图形的形状随之发生变化.

如图 1，把菱形 $ABCD$ 的一个顶点 A 看成一个动点，将其沿对角线 AC 逐渐向顶点 C 移动，形成如图 2 至图 4 的一系列图形.

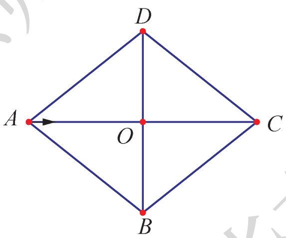


图 1

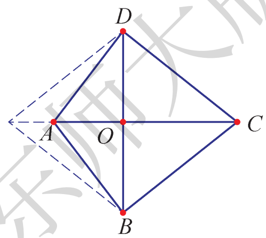


图 2

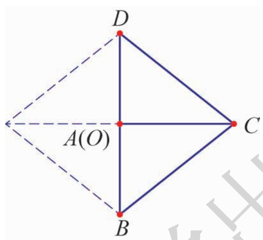


图 3

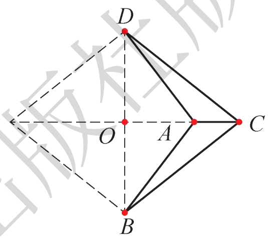


图 4

我们可以看到，图形 $ABCD$ 的形状发生了一系列的变化，那么在这样的变化过程中，该图形的性质，有哪些始终保持不变，哪些又发生了一些变化?

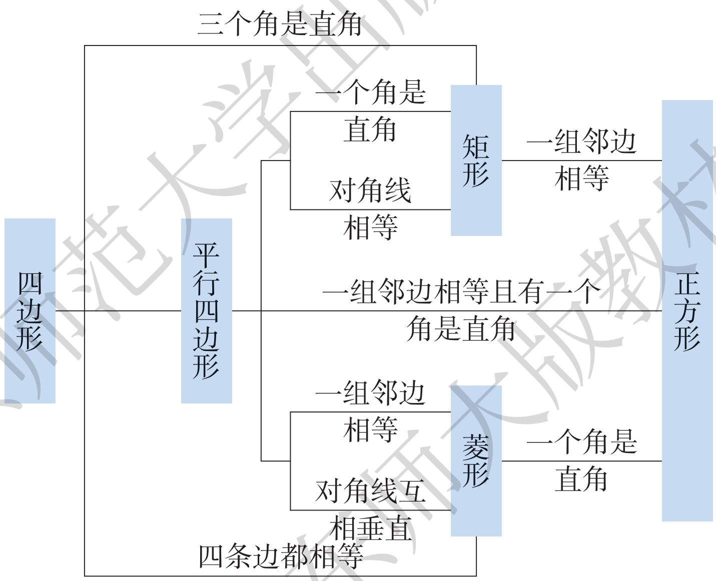
对于变化过程中的图 2 和图 4，它们与生活中哪些物件的形状相似？你能否给它们起一个较为合适的名称呢?

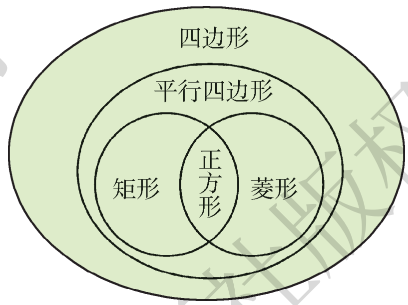
请将你的探索与发现，归纳成如下的表格：

图形	名称	性　　质	
		不变量	变量
图 1	菱形		
图 2			
图 3	等腰三角形		
图 4			

小结

一、知识结构





二、要点

1. 本章探索了几种特殊的平行四边形的性质与判定方法，学会了解决一些简单的度量问题.

2. 矩形、菱形、正方形作为特殊的平行四边形，不仅具有平行四边形的一般性质，都是中心对称图形，而且还是轴对称图形，但又分别具有一些独特的性质.

3. 借助矩形，探索并证明了定理“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”及其逆定理.

4. 本章对于矩形、菱形、正方形的研究，继续采用合情推理与演绎推理相结合的方法，在动态变换的过程中，利用尺规作图的工具，探索发现这些图形的性质和判定方法，进而通过演绎推理加以证明. 让学生经历“探索—归纳与猜想—证明”的全过程，从而丰富数学活动经验，提高数学学习能力.

复习题

A 组

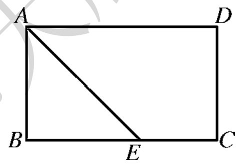
1. 在▱$ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O.

（1）如果 $\angle ABO + \angle ADO = 90°$，那么 ▱$ABCD$ 一定是________形；

（2）如果 $\angle AOB = \angle AOD$，那么 ▱$ABCD$ 一定是________形；

（3）如果 $AB = BC$， $AC = BD$，那么 ▱$ABCD$ 一定是________形.

2. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，相邻两边 AB、AD 的长分别为 15 cm 和 25 cm，$\angle BAD$ 的平分线与边 BC 相交于点 E. 求 BE 和 CE 的长.

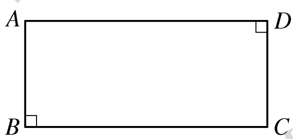


（第 2 题）

3. 已知正方形纸片 $ABCD$ 的一条对角线 AC 的长为 4 cm. 求该正方形的边长和面积.（长度精确到 0.1 cm）

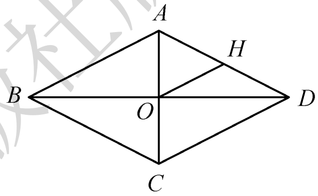
4. 已知菱形的周长为 20 cm，两个相邻的内角的度数之比为 1∶2. 求较短的对角线长.

5. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B = \angle D = 90°$， $AB = CD$. 求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.



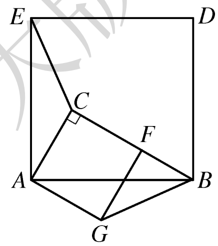
（第 5 题）

6. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，H 为边 AD 的中点，菱形 $ABCD$ 的周长为 28．求 OH 的长．



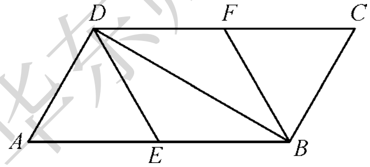
（第 6 题）

7. 如图，在△ABC 中，$\angle ACB = 90°$，四边形 $ABDE$、$AGFC$ 都是正方形．求证：$BG = EC$．



（第 7 题）

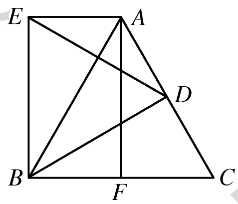
8. 如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle DAB = 60°$，$AB = 2AD$，点 E、F 分别是 AB、CD 的中点．求证：四边形 $DEBF$ 是菱形．



（第 8 题）

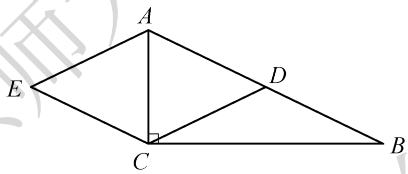
B 组

9. 如图，在等边三角形 ABC 中，点 D 是 AC 的中点，点 F 是 BC 的中点，以 BD 为边作等边三角形 BDE，连结点 A、E．求证：四边形 $AEBF$ 是矩形.



（第 9 题）

10. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB = 90°$，点 D 为边 AB 的中点，$AE \parallel CD$，$CE \parallel AB$．试判断四边形 $ADCE$ 的形状，并证明你的结论.

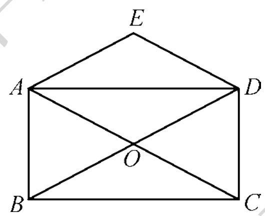


（第 10 题）

11. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，$DE \parallel CA$，$AE \parallel BD$.

（1）求证：四边形 $AODE$ 是菱形；

（2）若将题设中“矩形 $ABCD$”这一条件改为“菱形 $ABCD$”，其余条件不变，则四边形 $AODE$ 是怎样的四边形？请给出证明.

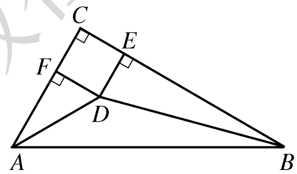


（第 11 题）

12. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle CAB$、$\angle CBA$的平分线相交于点D，$DE\perp BC$于点E，$DF\perp AC$于点F.

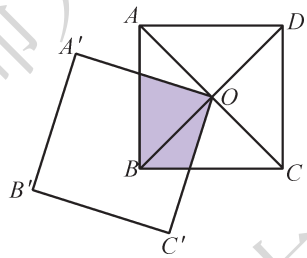
（1）求证：四边形$CFDE$是矩形；

（2）求证：四边形$CFDE$是菱形.



（第12题）

13. 如图，正方形$ABCD$的对角线相交于点O，点O又是另一个正方形$A'B'C'O$的一个顶点．如果这两个正方形的边长相等，那么正方形$A'B'C'O$绕点O无论怎样旋转，这两个正方形重叠部分的面积总等于一个正方形面积的四分之一．想一想，这是为什么？

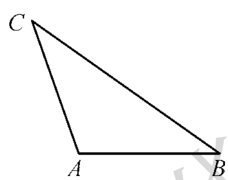


（第13题）

14. 尽可能多地用各种方法分别作一个矩形和一个菱形.

C 组

15. 如图，在$\triangle ABC$中，边BC上是否存在点P，过点P分别作AB、AC的平行线，交AC和AB于点D、E，使四边形$ADPE$为菱形？请说明理由.



（第15题）

16. 如图，根据图形解答下列问题：

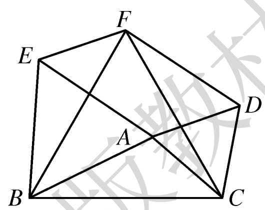
（1）以△ABC 的三边为边分别作等边三角形 ACD、等边三角形 ABE 和等边三角形 BCF，判断四边形 $ADFE$ 的形状.

（2）在小题（1）中，是否一定存在▱$ADFE$？若存在，写出△ABC 应满足的条件；若不一定存在，请说明理由.

（3）△ABC 满足什么条件时，四边形 $ADFE$ 是矩形？

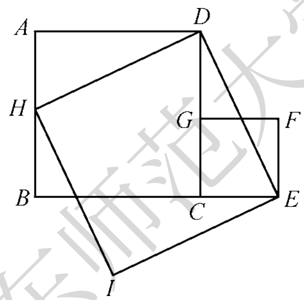
（4）△ABC 满足什么条件时，四边形 $ADFE$ 是菱形？

（5）△ABC 满足什么条件时，四边形 $ADFE$ 是正方形？



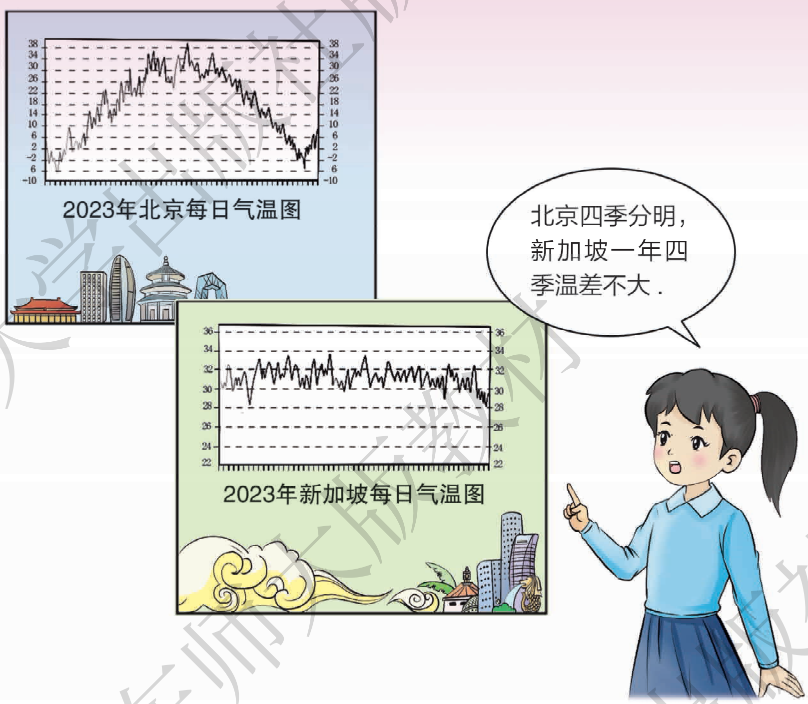
（第 16 题）

17. 如图，已知正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$，连结 DE，以 DE 为边作正方形 $EDHI$．试用该图形证明勾股定理：$CD^2+CE^2=DE^2$．（提示：运用面积割补法）



（第 17 题）

第 19 章　数据的分析



从图上看，感觉一年中北京气温变化的幅度比新加坡气温变化的幅度大，但是你知道如何通过计算比较这两地气温变化幅度的大小吗？

★ 本章将探讨如何选取合适的指标概括一组数据，以及如何比较两组数据的变化幅度，并学习描述数据分布的一种新方法——借助箱线图描述数据的分布．

19.1 数据的集中趋势

1. 平均数的意义

解决一些与不确定现象有关的问题，常常离不开收集和分析数据，数据是我们思考的基础. 那么，有了一组数据以后，怎样表达和概括这组数据呢？能否找到某些指标作为这组数据的代表呢？

我们在小学阶段已经学过的**平均数**(average)就经常被用来作为一组数据的代表.

▶ **例1** 植树节到了，某单位组织职工开展植树竞赛活动，根据植树量统计了相应的职工人数，结果如图 19.1.1 所示.

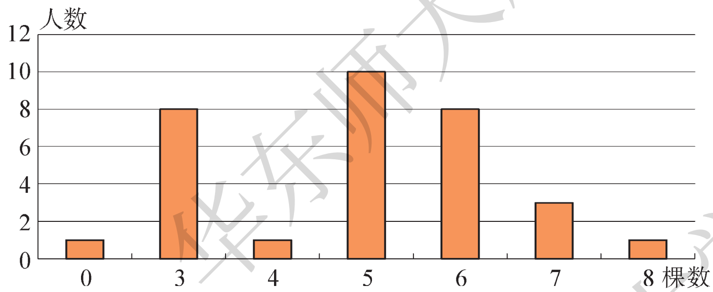


图19.1.1 参加活动者植树量统计图

请根据图中信息计算：

(1) 总共有多少人参加了本次活动？

(2) 总共植树多少棵？

(3) 平均每人植树多少棵？

解 (1) 参加本次活动的总人数是 $1+8+1+10+8+3+1=32$(人).

(2) 总共植树 $3\times8+4\times1+5\times10+6\times8+7\times3+8\times1=155$(棵).

(3) 平均每人植树 $\frac{155}{32}\approx4.8$(棵).

植树竞赛活动的冠军植树多少棵？

思考　植树总量、植树量的平均数和植树的人数这三者之间有数量关系吗？你能解释“平均每人植树 4.8 棵”的含义吗？

▶ **例 2**　小文所在的八年级(1)班共有学生 40 人．图 19.1.2 是该校八年级各班学生人数占全校八年级学生总人数的分布情况．

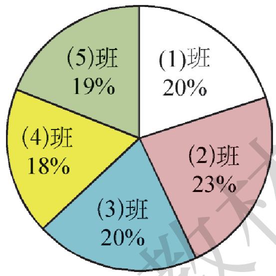


图 19.1.2　某校八年级各班学生人数占全校八年级学生总人数的分布图

（1）请计算该校八年级平均每班学生人数；

（2）请计算各班学生人数，并绘制条形统计图．

解　（1）该校八年级学生总人数为

$$40 \div 20\% = 200(\text{人}),$$

所以平均每班学生人数为 $200 \div 5 = 40$(人)．

（2）八年级(2)班学生人数：

$$200 \times 23\% = 46(\text{人});$$

八年级(3)班学生人数：

$$200 \times 20\% = 40(\text{人});$$

八年级(4)班学生人数：

$$200 \times 18\% = 36(\text{人});$$

八年级(5)班学生人数：

$$200 \times 19\% = 38(\text{人}).$$

绘制的条形统计图如图 19.1.3①所示．

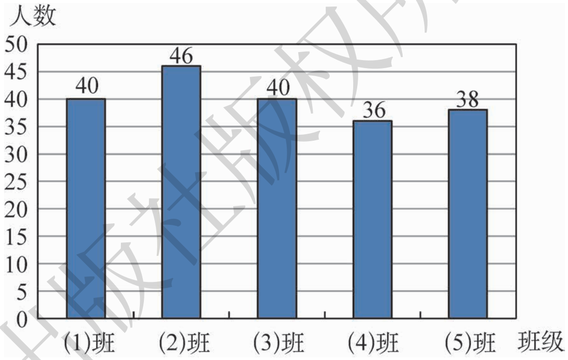


图19.1.3① 某校八年级各班学生人数统计图

思考 如图 19.1.3②，在你所绘制的条形统计图中画出一条代表平均人数 40 的水平线．图中代表各班人数的五个条形，有的高于这条水平线，有的低于这条水平线．想一想，水平线上方超出部分与下方不足部分在数量上有什么关系？

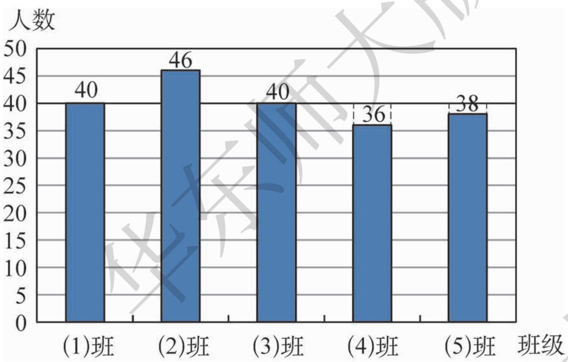


图19.1.3② 某校八年级各班学生人数统计图

将水平线上方的超出部分剪下来，是否恰好填满下方的不足部分？

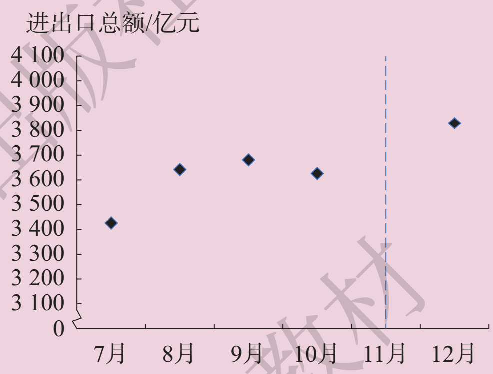
关于平均数，你还知道些什么？

练习

1. 甲、乙两所学校号召学生向希望小学捐赠图书．已知甲校 800 名学生平均每人捐书 4.5 本；乙校学生比甲校少 80 人．如果要达到相同的捐书总量，那么乙校学生平均每人要捐书多少本？

（第 1 题）

2. 某省统计数据显示，2021 年下半年平均每月进出口总额为 3 703 亿元．如图是根据该省 2021 年下半年每月的进出口总额情况绘制的．不计算下半年的进出口总额，你能将缺少的一点补在虚线恰当的位置上吗？



某省 2021 年下半年每月进出口总额统计图

（第 2 题）

阅读材料

平　均　化

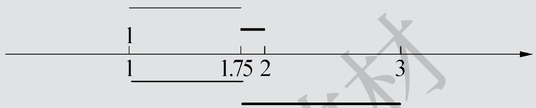
一组数据的平均数是什么含义？也许你会打个比方：假设一组数据“1，1，2，3”是我们每人手头现有的钱(单位：元)，现在，我们四个人决定平分这些钱，大家将钱全都集中到一起，一共是 7 元，平分之后，每人得到 1.75 元，这 1.75 就是原来那组数据的平均数．不错，汇总后平分，这既是计算平均数的过程，也是从不平均到平均的平均化过程．

在这组数据中，凡是比平均数大的数与平均数的差都是正数，比平均数小的数与平均数的差都是负数，与平均数一样大的数(如果有的话)与平均数的差恰好为 0．那么将所有的差相加，答案会是什么呢？

尝试一下，就以这组数据为例，所有的差之和是

$$
\begin{aligned}
&(1-1.75)+(1-1.75)+(2-1.75)+(3-1.75)\\
=&(-0.75)+(-0.75)+0.25+1.25\\
=&(-1.5)+1.5=0.
\end{aligned}
$$

经过平均化，两个原来只有 1 元钱的人都额外得到了 0.75 元，他们得到的这 1.5 元正是另外两个人一起多付出的 1.5 元，正负相抵，相加应该为 0．从下图看，两条细线长度之和与两条粗线长度之和也恰好相等．



一般地，假如一组由 a、b、c、d 四个数组成的数据，它们的平均数是 m，那么，所有的差相加是

$$
\begin{aligned}
&(a-m)+(b-m)+(c-m)+(d-m)\\
=&(a+b+c+d)-4m\\
=&4m-4m=0.
\end{aligned}
$$

恰好是 0.

假如这组数据是由五个或更多个数组成的，我们同样可以验证此时该组数据中每个数与平均数的差相加之和为 0．

2. 加权平均数

在日常生活中，我们经常会与平均数打交道，但发现在有些情况下以前计算平均数的方法并不适用．请看下面的例子：

（1）老师在计算学生每学期的总评成绩时，并不是简单地将一个学生的平时成绩与考试成绩相加除以 2，而是突出考试成绩的重要性，比如，按照“平时成绩占 40%，考试成绩占 60%”的比例计算（如图 19.1.4）．这样，如果一个学生某学期的平时成绩为 70 分，考试成绩为 90 分，那么他该学期的总评成绩就应该为 $70\times40\%+90\times60\%=82$（分）．

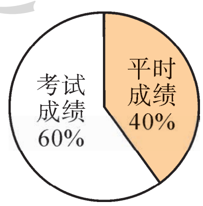


图19.1.4

一般来说，由于各个指标在总结果中占有不同的重要性，因而会被赋予不同的权重，上例中的 40%和 60%就是平时成绩和考试成绩在学期总评成绩中的权重，最后计算得到的学期总评成绩 82 分就是上述两个成绩的**加权平均数**（weighted average）.

（2）超市里有两种苹果，一种单价为 15 元/kg，另一种单价为 18 元/kg．小明妈妈买了单价为 15 元/kg 的苹果 1 kg，单价为 18 元/kg 的苹果 3 kg．你认为应该如何计算所买苹果的平均价格？

试一试

小青某学期的数学成绩情况为：测验一得 89 分，测验二得 78 分，测验三得 85 分，期中考试得 90 分，期末考试得 87 分．如果按照图 19.1.5 所示的平时成绩、期中成绩、期末成绩的权重，那么小青该学期的总评成绩是多少分？

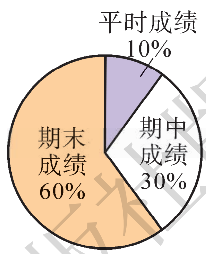


图19.1.5

问题1　某公司对应聘者 A、B、C、D 进行面试，并按三个方面给应聘者打分，每个方面满分为 20 分，最后打分结果如表 19.1.1 所示．如果你是人事主管，会录用哪一位应聘者？

表19.1.1　四位应聘者的面试成绩

	A	B	C	D
专业知识	14	18	17	16
工作经验	18	16	14	16
仪表形象	12	11	14	14

思考 对上述问题，甲同学说：看谁的总分高就录用谁．通过计算可以发现 D 的总分最高，应被录用．

这时乙同学说：我有不同意见．三个方面满分都是 20 分，但按理这三个方面的重要性应该有所不同，比如专业知识就应该比仪表形象更重要．

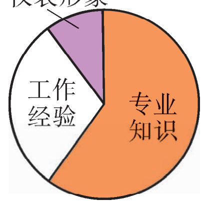


图19.1.6

假设上述三个方面的重要性之比为 6∶3∶1（如图 19.1.6），那么应该录用谁呢？

因为 6∶3∶1 = 60%∶30%∶10%，所以专业知识、工作经验与仪表形象这三个方面的权重分别是 60%、30% 与 10%．这样 A 的最后得分为

$$14\times 60\% + 18\times 30\% + 12\times 10\% = 15.$$

请你根据这样的权重要求，继续算出另三位应聘者的最后得分．从你的计算结果看，谁应被录用？

如果这三个方面的重要性之比为 10∶7∶3，此时三个方面的权重各是多少？哪一位应被录用呢？

问题 2 某所初中学校通过调查了解到，该校七、八、九年级学生平均每天的睡眠时间依次为 9 h、8.5 h 和 8 h．

（1）根据这些信息，能否求出该校学生平均每天的睡眠时间？

（2）如果已知该校七、八、九年级的学生人数分别为 350、330、320，能否求出该校学生平均每天的睡眠时间？

（3）如果已知该校七、八、九年级的学生人数比为 4∶3∶3，能否求出该校学生平均每天的睡眠时间？

分析 （1）如果该校三个年级的学生人数相同，可以求出该校学生平均每天的睡眠时间为

$$\frac{9+8.5+8}{3}=8.5(\text{h}).$$

如果该校三个年级的学生人数不相同，用上面的算法就得不到问题的答案了．要想求出该校学生平均每天的睡眠时间，还需要更多的信息．

（2）有了各年级的学生人数，就可以求出该校学生每天睡眠的总时间，再除以学生的总人数，即可得到该校学生平均每天的睡眠时间为

$$\frac{9\times 350+8.5\times 330+8\times 320}{350+330+320}=8.515(\mathrm{h}).$$

其实，在求解这个问题时，也可以分成三部分计算，即

$$9\times\frac{350}{350+330+320}+8.5\times\frac{330}{350+330+320}+$$
$$8\times\frac{320}{350+330+320}=8.515(\mathrm{h}),$$

这是加权平均数，各年级学生人数占总人数的比例就是权重．

所得的结果是一样的．

（3）已知各年级的学生人数之比，就可以通过加权计算得到该校学生平均每天的睡眠时间为

$$9\times\frac{4}{4+3+3}+8.5\times\frac{3}{4+3+3}+8\times\frac{3}{4+3+3}=8.55(\mathrm{h}).$$

在问题 2 中，我们利用已经有的各单位各自的平均数，辅以各单位的权重信息，再次计算得到所有单位总的平均数．类似地，在大数据计算中，经常会将需要解决的问题分解成许多小的部分，分配给多台计算机进行处理．与传统的集中式处理相比，这种分布式计算的方法大大提高了计算效率，顺应了时代的需求．

练习

1. 本节例 1 中求“平均每人植树多少棵”还可以通过加权计算，请列式并计算．
2. 某人在 A 商店买了 2 包饼干，单价是 6.20 元．走了没多远，看见 B 商店也有卖这种饼干的，每包 5.80 元，于是他又买了 3 包．请先估计一下他买 5 包饼干的平均价格是小于、等于还是大于 6 元，然后再算出 5 包饼干的平均价格，看看你的估计对不对．
3. 一部电梯的最大载重是 1 000 kg．现有 13 位乘客要搭乘这部电梯，已知其中 11 位先生的平均体重是 80 kg，2 位女士的平均体重是 70 kg．请问：他们能否一起安全地搭乘这部电梯？他们的平均体重是多少千克？

4. 一家小吃店原有三个品种的馄饨，其中菜馅馄饨的售价为 10 元/碗，鸡蛋馅馄饨的售价为 12 元/碗，肉馅馄饨的售价为 16 元/碗．每碗均有 10 个馄饨．该店老板准备推出混合馄饨，请帮她解决以下问题：

（1）如果每碗有 3 个菜馅馄饨、3 个鸡蛋馅馄饨和 4 个肉馅馄饨，那么混合馄饨每碗定价多少合适？

（2）如果菜馅馄饨、鸡蛋馅馄饨、肉馅馄饨的个数之比为 3∶2∶5，那么混合馄饨每碗定价多少合适？

（3）如果菜馅馄饨、鸡蛋馅馄饨、肉馅馄饨的个数之比为 1∶1∶3，那么混合馄饨每碗定价多少合适？

阅读材料

分布式计算处理大数据

在之前的学习中，我们已经发现，许多现实问题可以利用数据来解决．

例如，通过交通卡的使用记录可以收集人们的出行数据，进而考虑如何改善城市公共交通；通过手机消费记录可以收集人们的购物数据，进而为商品的开发或推广找准方向．

随着计算机技术的飞速发展，人们能够获取的数据规模越来越大．一座城市一天内交通卡的使用记录可能有上千万条，一周内的使用数据则有上亿条．此时，如果能对大规模的数据进行分批处理，之后再进行汇总，往往会比集中处理更有效率．

我们在计算平均数时，通常是用总量除以参与计算的总个数，比如本节问题 2 中要求全校学生的平均睡眠时间，可以用三个年级学生总的睡眠时间除以总的学生数，这是一种集中式的处理方法．而另一种思路则是各年级先计算出本年级

学生的平均睡眠时间，汇总到学校，再结合各年级的学生人数，通过计算加权平均数，得到全校所有学生的平均睡眠时间．这种先分别计算、再汇总处理的方法与处理大数据时的分布式计算思想是一致的．

分布式计算是大数据计算的热门算法．它就好比我们在完成一项大型任务时的分工合作，将一个需要巨大的计算能力才能解决的问题分成许多小的部分，然后把这些部分分配给许多计算机（组），同时进行计算，最后把这些计算结果综合起来得到最终的结果．与传统的集中式处理相比，分布式计算从整体上节约了计算时间，提升了效率．此外，它在共享稀有资源、降低成本、规避故障风险等方面也具有优势．

3．中位数和众数

日常生活中，我们面对一组数据，常常需要寻找一个能代表这组数据总体面貌的特殊数据，比如有下面一些问题：

（1）同学问小明：“你知道你妈妈的鞋号是多少吗？”小明在家里找到了 9 双妈妈的鞋，鞋号分别是：23，23，23，23.5，23，24，23，23，24．对此，小明的回答应该是________．

（2）同学问小红：“你每个月花多少时间进行体育锻炼？”小红查看了一下自己的运动记录，发现去年每月体育锻炼的时间（单位：h）分别是：35，10，10，10，10，15，10，20，10，10，10，10．对此，小红的回答可以是________．

（3）老师要评定每位学生的中文打字速度．小兵的三次中文打字速度检测结果（单位：字/min）分别是：38，31，36．对此，小兵的中文打字速度可评定为________．

（4）一家小店有 5 名员工，他们的月收入（单位：元）分别是：8 000，3 200，2 100，2 000，2 000．对此，该店员工的月收入可以认为是________．

回答上述问题时，你认为哪些问题不适合用平均数作代表，需要引入新的指标来刻画数据的集中趋势？

问题 3 查询天气网站可以了解到，我国各直辖市和省会城市（不包含港澳台地区）2022 年 8 月 28 日的最高气温如表 19.1.2 所示．我们很容易得到这些城市当日最高气温的平均数约为 26.5 ℃．你还能从其他角度找到这组数据的代表吗？

31 个城市 28 日最高气温之和除以 31 所得的商是平均数．

表19.1.2 31 个城市 2022 年 8 月 28 日的最高气温 单位：℃

北京	天津	石家庄	太原	呼和浩特	沈阳	长春	哈尔滨
22	25	19	16	18	26	24	25
上海	南京	杭州	合肥	福州	南昌	济南	郑州
29	27	31	28	35	36	21	19
武汉	长沙	广州	海口	南宁	成都	重庆	贵阳
32	35	35	33	35	27	40	31
昆明	拉萨	西安	兰州	银川	西宁	乌鲁木齐	
25	26	17	21	22	16	26	

我们还可以用中位数或众数作为这组数据的代表．

如图 19.1.7，将 31 个城市 8 月 28 日的最高气温数据按由低到高的顺序重新排列，用去掉两端逐步接近正中心的办法可以找出处在正中间位置的那个值，即**中位数**（median）．

气温按由低到高的顺序排列后，处在正中间的值是中位数．

16,16,17,18,19,19,21,21,22,22,24,25,25,25,26,26,26,27,27,28,29,31,31,32,33,35,35,35,35,36,40

图19.1.7

由此可以得到这 31 个城市 8 月 28 日最高气温的中位数是 26 ℃．

思考 如果是偶数个城市，那么用去掉两端逐步接近正中心的办法，最后也只剩下唯一一个没被划去的数据吗？

如果是偶数个城市，那么最后就将剩下两个处在正中间的数．这时，为了公正起见，我们取这两个数的平均数作为中位数．

此外，如表 19.1.3，统计每一个气温在这组数据中出现的频数，可以找出频数最多的那个气温值，它就是**众数**(mode)．

表19.1.3

气温/°C	16	17	18	19	21	22	24	25	26	27	28	29	31	32	33	35	36	40
频数	2	1	1	2	2	2	1	3	3	2	1	1	2	1	1	4	1	1

出现最频繁的气温值是众数．

由表 19.1.3 可知，这 31 个城市该日最高气温的众数是 35 °C．

思考 若有两个气温值(如 25 °C 和 35 °C)的频数并列最多，那么怎样确定众数呢？

这时，我们不是取 25 °C 和 35 °C 这两个气温值的平均数作为众数，而是说这两个气温值都是众数．

我们可以把问题 3 中的平均数、中位数和众数在统计图中表示出来，如图 19.1.8 所示．

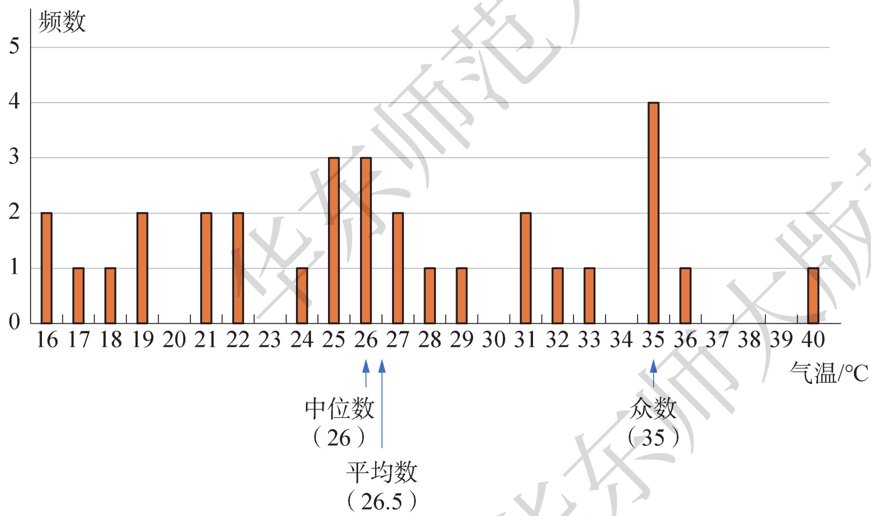


图19.1.8

平均数是概括一组数据的一种常用指标，反映了这组数据中每个数据的平均大小．加权平均数更加细致，不仅反映每个数据的平均大小，还反映每个数据的权重．当每个数据具有同等重要性，即权重相同时，加权平均数就是平均数．

中位数是概括一组数据的另一种指标．如果将一组数据按由小到大的顺序排列（即使有相等的数据也要全部参加排列），那么中位数的左边和右边恰有一样多的数据．

众数告诉我们，这个值出现的次数最多．一组数据可以有不止一个众数，也可以没有众数．

读一读

面对收集得到的大量数据，我们可以根据问题的背景选择合适的统计图表，用数据说话，显示其隐含的某些有用信息．为了更好地了解数据，需要作更深入的数据分析．平均数、中位数和众数从不同的侧面描述了数据的集中趋势，概括了一组数据．正因为如此，这三种指标常被用来作为一组数据的代表．

练习

1. 某商场进了一批苹果，每箱苹果的质量约为 5 kg．进入仓库前，从中随机抽出 10 箱称重，得到 10 箱苹果的质量（单位：kg）如下：

$$4.8，5.0，5.1，4.8，4.9，4.8，5.1，4.9，4.7，4.7.$$

请指出这 10 箱苹果质量的平均数、中位数和众数．

2. 判断题（对的在括号内填“√”，错的在括号内填“×”）

（1）给定一组数据，那么这组数据的平均数一定只有一个．（　　）

（2）给定一组数据，那么这组数据的中位数一定只有一个．（　　）

（3）给定一组数据，那么这组数据的众数一定只有一个．（　　）

（4）给定一组数据，那么这组数据的平均数一定不会大于最大值，也不会小于最小值．（　　）

（5）给定一组数据，那么这组数据的中位数一定等于最小值和最大值的平均数．（　　）

（6）给定一组数据，如果找不到众数，那么众数一定就是0．（　　）

4．平均数、中位数和众数的选用

我们已经知道，平均数、中位数和众数都是用来代表一组数据的，而且，它们相互之间可以相等也可以不相等，没有固定的大小关系．当它们不全相等时，就产生了如何选用才能恰当代表该组数据的问题．

问题4　八年级某班的教室里，三位同学正在为谁的数学成绩最好而争论，他们的5次数学成绩分别是：

小华：62，94，95，98，98；

小明：62，62，98，99，100；

小丽：40，62，85，99，99．

他们都认为自己的成绩比另两位同学好，你认为呢？

三位同学的成绩似乎都差不多，那么如何比较他们的成绩呢？

分析　根据表19.1.4，小华说他的成绩平均数最大，所以他的成绩最好；小明说应该比较中位数，他的成绩中位数最大；小丽则说应该比较众数，她是三人中成绩众数最大的人．从三人的测验分数条形统计图19.1.9来看，你认为哪一个同学的成绩最好呢？

表19.1.4

	平均数	中位数	众　数
小　华	89.4	95	98
小　明	84.2	98	62
小　丽	77	85	99

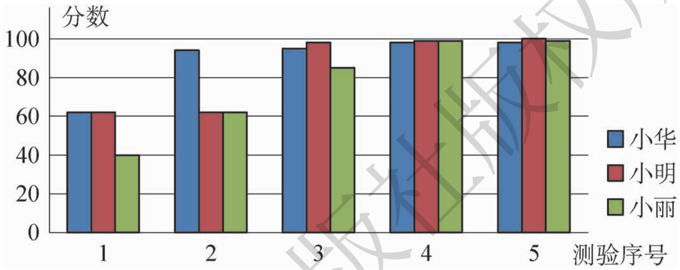


图19.1.9

想一想，高一级学校录取新生主要是依据考生的总分，这与平均数、中位数和众数中的哪一个关系较大？

问题 5 随着汽车的日益普及，越来越多的城市出现了令人烦恼的交通堵塞问题．你认为用过往车辆一天车速的平均数衡量某条交通主干道的路况合适吗？

分析 人们上、下班的时候是一天中道路较为繁忙的两个时段，其他时段车流量明显减少，因此，如果用一天车速的平均数来衡量路况，那么上、下班时交通堵塞的问题就被掩盖了．所以，较为合理的做法是按道路繁忙的不同程度，将一天分为几个时段分别计算平均车速．

平均数、中位数和众数各有其长，也各有其短，下面的几个例子也许能让你对它们有更深入的了解：

（1）草地上有 6 个人正在玩游戏，他们年龄的平均数是 15 岁．请想象一下是怎样年龄的 6 个人正在玩游戏．

看看这些例子，和同伴交流一下，应如何合理选用各种指标．

通常人们会想象是一群中学生正在玩游戏，但是，如果是一个 65 岁的老人领着 5 个 5 岁的孩子在玩游戏也是有可能的嘛！这是一个不适合用平均数而适合用众数或中位数来代表一组数据的例子，老人的年龄把平均年龄一下子给抬上去了．如果一组数据中有特别大或者特别小的异常值时，不适合用平均数作为这组数据的代表．

（2）为筹备班级的新年晚会，班长对全班同学爱吃香蕉、橘子、柚子中的哪一种水果做了民意调查．最终买什么水果，显然由众数决定较好，因为它代表了全班多数同学的意愿．

（3）八年级有 4 个班级，如果已知在一次测验中这 4 个班级每班学生的平均成绩，也知道各班级的学生人数，那么，我们就可以计算出整个年级学生的平均成绩．但是，如果已知的是每个班级学生成绩的中位数或者众数，那么我们一般是没有办法得出整个年级学生成绩的中位数或者众数的．

做一做

请老师准备一根绳子，面对所有学生，捏住绳子的两端，将绳子拉直．全班同学目测几秒钟后估计这根绳子的长度．

设计并完成一张统计表和一张统计图，全面反映每位同学对这根绳子长度的估计值，计算全班同学估计值的平均数、中位数和众数．

在全班同学估计值的基础上，请给出一个最后的估计值，作为全班集体对这根绳子长度的估计值．

最后，老师重新出示这根绳子，由学生代表当众用刻度尺量出这根绳子的长度．这个测量值与全班同学目测的估计值接近吗？全班讨论一下比较的结果，为什么测量值与估计值相差不大或者相差较大？

练习

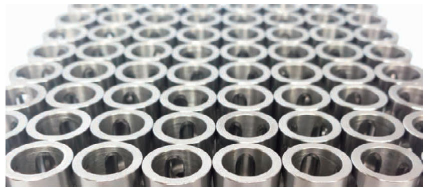
检验某厂生产的手表质量时，检验人员随机抽取了 10 块手表，在下表中记下了每块手表的日走时误差(正数表示比标准时间快，负数表示比标准时间慢)．你认为用这 10 块手表走时误差的平均数来衡量这 10 块手表的精度合适吗？

手 表 序 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
日走时误差/s	－2	0	1	－3	－1	0	2	4	－3	2

习题19.1

A 组

1. 在同一批次的圆柱形机器零件中抽出 20 件，测得外径(单位：mm)如下：



（第 1 题）

56.1，55.9，55.9，56.0，55.8，
56.1，55.7，55.6，56.3，56.2，
56.2，55.7，56.3，56.1，56.2，
56.2，55.9，55.8，56.0，56.0.

计算这些零件外径的平均数．想一想，有哪些不同的算法？

2. 有三组数据——第一组数据：10，10；第二组数据：20，20，20；第三组数据：30，30，30，30，30．请问：每组数据的平均数分别是多少？如果将这三组数据合成一组新的数据，请问新数据的平均数是多少？

3. 已知一组数据：0，1，3，3，3，5，6，7，9，10，在计算这组数据的平均数时，甲、乙、丙三位同学分别列出了如下不同的算式，请你帮他们判断对错，并说说理由．

甲：$(1+3+3+3+5+6+7+9+10)\div 9$；

乙：$(0+1+3+5+6+7+9+10)\div 8$；

丙：$(0+1+3\times 3+5+6+7+9+10)\div 10$.

4. 学校组织演讲比赛，从演讲主题、演讲内容、基本能力、整体表现四个方面对选手进行评分．下表是甲、乙两位选手在各个项目上的得分情况(百分制)：

	演讲主题	演讲内容	基本能力	整体表现
选手甲	80	80	90	82
选手乙	85	82	85	82

(1) 如果以上四个方面的重要性之比为 2∶3∶3∶2，谁的最终成绩高？

(2) 如果以上四个方面的重要性之比为 2∶2∶3∶3，情况又如何呢？

5. 根据下表中所给数据，求出各组数据的平均数、中位数和众数，并填入表中（精确到0.1）：

数　　据	平均数	中位数	众　数
20，20，21，24，27，30，32			
0，2，3，4，5，5，10			
－2，0，3，3，3，8			
－6，－4，－2，2，4，6			

6. 老师想知道学生每天在上学的路上要花多少时间，于是让大家将每天来学校的单程时间写在纸上．下面是全班30名学生单程所花的时间（单位：min）：

20，20，30，15，20，25，5，15，20，10，15，35，45，10，20，25，30，20，15，20，20，10，20，5，15，20，20，20，5，15．

（1）请画出学生上学单程所花时间（5 min，10 min，15 min……）出现频数的条形统计图；

（2）求学生上学单程所花时间的平均数、中位数和众数；

（3）假如老师随机地问一名学生，你认为老师最可能得到的回答是多少时间？

B 组

7. 回答下列问题，并说明理由：

（1）已知小河的平均水深为2 m，手持一根1.5 m长的竹竿，在手不沾水的情况下，能否使竹竿的另一端接触到河床？

（2）某校录取新生的平均成绩是535分，如果某人的考分是531分，那么此人肯定没有被这个学校录取吗？

（3）5名学生在一次考试中的得分分别是：18，73，78，90，100，考分为73的学生是在平均分之上还是之下？你认为这名学生在5人中的考分属“中上”水平吗？

（4）9名学生的鞋号由小到大是：20，21，21，22，22，22，22，23，23，这组数据的平均数、中位数和众数中哪种指标是鞋厂最不感兴趣的？哪种指标是鞋厂最感兴趣的？

8. 判断下列说法是否正确，若不正确，请举出反例：

（1）只要一组数据中新添入一个数据，平均数就一定会跟着变动；

（2）只要一组数据中有一个数据变动，中位数就一定会跟着变动．

19.2　数据的离散程度

1. 方差

问题1　表 19.2.1 显示的是 2022 年 7 月 20 日 8 时至 7 月 21 日 5 时天津和新加坡两地的气温，如何对两地在这个时间段内的气温进行比较呢？

表19.2.1　天津和新加坡的气温　　单位：℃

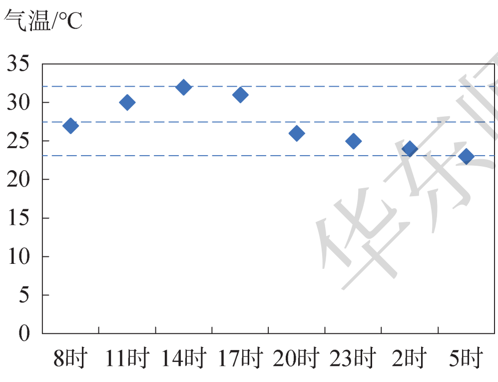
	8 时	11 时	14 时	17 时	20 时	23 时	2 时	5 时
天津	27	30	32	31	26	25	24	23
新加坡	26	27	28	29	27	27	27	27

从表 19.2.1 可以看出，天津与新加坡的气温相比，有 4 个时刻的气温相对高些，有 4 个时刻的气温相对低些.

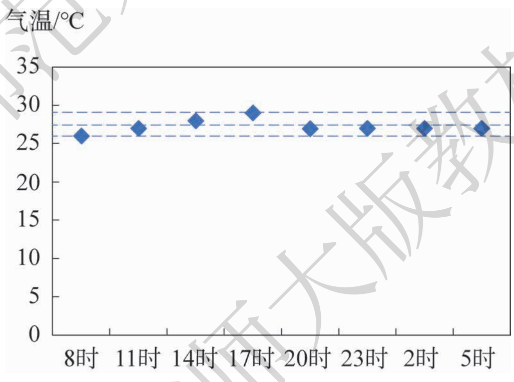
比较两地气温的高低，求平均气温是一种常用的方法.

经计算可知，这两地的平均气温相等，都是 27.25 ℃. 这能否说明两地的气温情况总体上没有什么差异呢？

观察图 19.2.1，你感觉它们有没有差异呢？



① 天津



② 新加坡

图19.2.1　天津和新加坡两地气温变化图

通过观察，我们可以发现：图①中的点波动范围比较大——从 23 °C 到 32 °C，相差 9 °C；图②中的点波动范围比较小——从 26 °C 到 29 °C，相差 3 °C．

概括　（1）比较两组数据时，通常可以先画图，直观地感受一下两组数据的整体特点．

（2）即便两组数据的平均数相等，它们还可能在数据的波动大小上表现出差异，因此，不能只限于比较平均数．数据波动小，则平均数更具有代表性．

问题 2　小明和小兵两人参加体育项目训练，近期的 5 次测试成绩如表 19.2.2 所示．谁的成绩较为稳定？为什么？

表19.2.2

	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次
小　明	10	14	13	12	13
小　兵	11	11	15	14	11

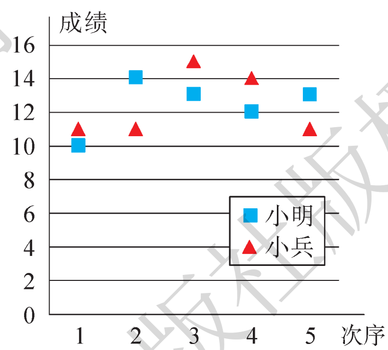


图 19.2.2　体育项目测试成绩图

通过计算发现，两人测试成绩的平均数都是 12.4，成绩的最大值与最小值也都相差 4．从图 19.2.2 可以看出：相比之下，小明的成绩大部分集中在其平均数附近，而小兵的成绩与其平均数的离散程度略大．通常，如果一组数据与其平均数的离散程度较小，我们就说它比较稳定．

思考　怎样的指标能反映一组数据与其平均数的离散程度呢？

我们已经看出，小兵的测试成绩与其平均数的偏差与小明相比略大．那么如何加以说明呢？可以直接将各数据与其平均数的差进行累加吗？在表 19.2.3 中写出你的计算结果．

表19.2.3

		第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	求和
小明	每次测试成绩	10	14	13	12	13	
	每次成绩 − 平均成绩						
小兵	每次测试成绩	11	11	15	14	11	
	每次成绩 − 平均成绩						

依据最后求和的结果可以比较两组数据围绕其平均数的波动情况吗？

我们发现，求和的结果都是 0．事实上，在之前的学习中我们已经知道，一组数据中的每个数与这组数据平均数的差相加之和始终等于 0．

既然直接求和不行，那么用什么办法可以从整体上反映各个数据远离平均数的情况呢？请你提出一个可行的方案，在表 19.2.4 中写出新的计算方案，并将计算结果填入表中．

表19.2.4

		第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	
小明	每次测试成绩	10	14	13	12	13	
小兵	每次测试成绩	11	11	15	14	11	

我们可以用“先平均，再求差，然后平方，最后求和”所得到的结果反映一组数据与其平均数的离散程度．这个结果称为这组数据的**离差平方和**（sum of squares of deviations）．

通常用 x_1，x_2，… 表示各个原始数据，用 $\overline{x}$ 表示一组数据的平均数．表 19.2.2 中小明和小兵 5 次测试成绩的离差平方和的计算式就是

$$(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+(x_4-\overline{x})^2+(x_5-\overline{x})^2.$$

计算可得：

小明 5 次测试成绩的离差平方和为____________；

小兵 5 次测试成绩的离差平方和为____________.

思考 如果一共进行了 7 次测试，小明因故缺席了 2 次，怎样比较谁的成绩更稳定？请将你的方法及数据填入表 19.2.5 中.

表19.2.5

		第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次	第 7 次	
小明	每次测试成绩	10	14	13	缺席	12	缺席	13	
小兵	每次测试成绩	11	11	15	11	14	14	11	

在计算一组数据的离差平方和时，随着数据个数的增多，和通常也会增大. 因此，当两组数据所含数据的个数不同时，直接比较离差平方和显得不公平，还需要平均化，这样得到的结果称为**方差**(variance)，通常记为 σ^2. 我们通常用方差来衡量一组数据偏离其平均数的情况.

表 19.2.5 中，小明 5 次测试成绩的方差的计算式就是

$$\frac{1}{5}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+(x_4-\overline{x})^2+(x_5-\overline{x})^2].$$

小兵 7 次测试成绩的方差计算式就是

$$\frac{1}{7}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_7-\overline{x})^2].$$

计算可得：

小明 5 次测试成绩的方差为________；

小兵 7 次测试成绩的方差为________.

计算结果是不是小明的成绩比较稳定呢？

练习

1. 比较下列两组数据的方差：

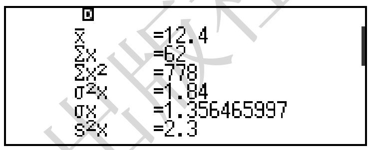
   A 组：0，10，5，5，5，5，5，5，5，5；

   B 组：4，6，3，7，2，8，1，9，5，5．

2. 算一算，第 168 页问题 1 中哪个城市该时段气温的离散程度较大？与你从图 19.2.1 中直观看出的结果一致吗？

2．用计算器求平均数和方差

用笔算的方法计算平均数和方差等统计量比较烦琐，如果能够利用计算器，就会大大提高效率．下面以计算小明 5 次测试成绩的平均数和方差为例，按键步骤如下：



（1）按⌂打开主屏幕，按方向键选中“统计”应用图标后，按 OK 进入“统计”应用，再按 OK 启动“单变量统计”计算功能；

（2）按①⓪EXE①④EXE①③EXE①②EXE①③EXE，输入所有数据；

（3）按 OK（单变量结果）OK，即可获得这组数据的统计值，其中 $\overline{x}=12.4$ 是平均数，$\sigma^2x=1.84$ 是方差．

练习

下表给出了两只股票从 2022 年 7 月 4 日到 7 月 22 日的交易日收盘价格，分别计算它们的平均数和方差，并比较这两只股票在这段时间内的涨跌变化幅度．

单位：元

	4 日	5 日	6 日	7 日	8 日	11 日	12 日	13 日	14 日	15 日	18 日	19 日	20 日	21 日	22 日
A 股票	59.97	59.54	59.28	58.70	58.58	58.90	60.10	58.30	56.20	55.20	55.29	55.03	55.43	54.89	55.09
B 股票	53.70	53.45	52.20	51.73	51.52	50.29	50.55	51.03	52.31	51.80	51.23	51.23	51.57	50.98	52.35

阅读材料

早穿皮袄午穿纱

“早穿皮袄午穿纱”是一句地方民谣，它形象地在我们面前描绘出一幅奇特的景象：早上寒冷得穿上又厚又重的皮袄，中午却炎热得只穿又薄又轻的纱衣．为什么会出现这种现象？那是因为在我国的西北地区一日之间气温变化较大，有时午后最高气温达到 30 ℃ 以上，但清晨最低气温却只有十几度．下表是我国西北和南方一些城市某日的最高气温和最低气温情况，看看西北这些城市该日最高气温与最低气温相差多大，再与南方对比一下，你将不难理解为什么“早穿皮袄午穿纱”这句民谣在我国西北地区广为流传．

2022 年 7 月 1 日我国部分地区的天气情况　　　单位：℃

		最高气温	最低气温	最高气温与最低气温之差	
西北	乌鲁木齐	33	21	12	> 10
	吐鲁番	43	31	12	
	银川	31	19	12	
	兰州	29	18	11	
	敦煌	30	19	11	
南方	南宁	34	26	8	< 10
	福州	31	26	5	
	昆明	23	18	5	
	海口	30	24	6	
	广州	32	25	7	


新疆的博格达峰


新疆的天鹅湖

信息技术应用

计算机帮我们求统计量

计算机中的电子表格软件不仅可以用来画统计图，还可以帮助我们完成繁杂的统计计算．

例如，已知试验次数和某个对象出现的频数，利用电子表格软件可以便捷地算出相应的频率．以习题 19.2 第 2 题中的数据为例，我们先将试验次数和“出现数字之和为奇数”的频数填入电子表格(如图 1)，假设我们要将“B2 单元格中的数据”除以“B1 单元格中的数据”所得的商填入 B3 单元格中，那么，首先选中 B3 单元格，在对话框中输入“=”；再单击 B2 单元格，键入“/”（除号），单击 B1 单元格；最后按回车键，计算结果就出现在 B3 单元格中了(如图 2)．

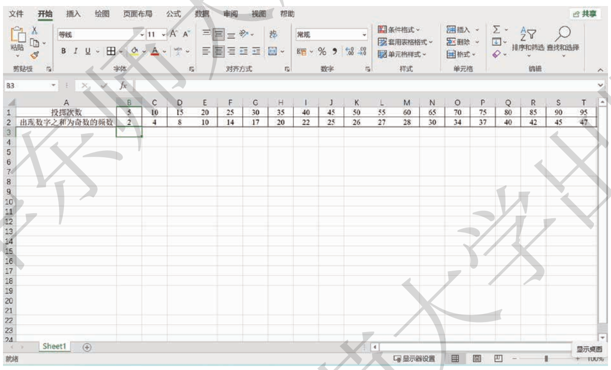


图 1

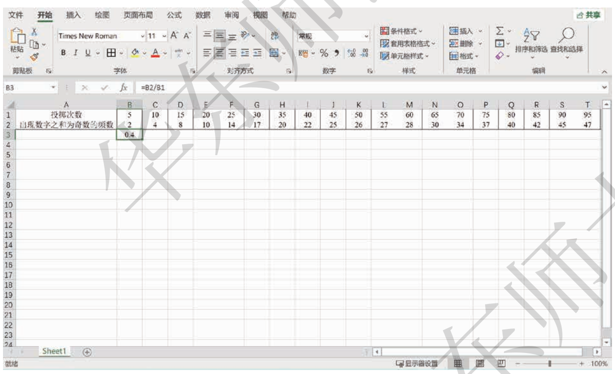


图 2

接下来要做同样的运算的话，只需将鼠标指针指向 B3 单元格的右下角，其形状将变成黑色十字(+)，按住鼠标左键向右拖拽至 U3，松开鼠标后，就完成了所有频率值的计算． 如果希望限定计算结果的小数位数，可以在工具栏“开始”—“数字”中进行调整．

类似地，只要选择工具栏中相应的“f_x”（如下表），我们就可以轻松地计算平均数、中位数、众数、离差平方和及方差这些统计量了．

统计量	平均数	中位数	众数	离差平方和	方差
f_x	AVERAGE	MEDIAN	MODE. MULT	DEVSQ	VAR. P

以第 160 页问题 3 中 31 个城市 2022 年 8 月 28 日的最高气温为例，要计算这组数据的平均数，可以先在电子表格中输入所有数据，再选中一个空白格，作为放答案的位置；然后点击工具栏中的“f_x”，在“插入函数”对话框选择“AVERAGE”，点击“确定”．此时，会出现“函数参数”对话框，拖动鼠标选中之前输入的 31 个数据，于是，在对话框的 Number1 中就会显示参与计算的所有单元格的范围了(如图 3)．点击“确定”，这 31 个城市 28 日最高气温的平均数就会出现在最初选定放答案的空白格子中了．

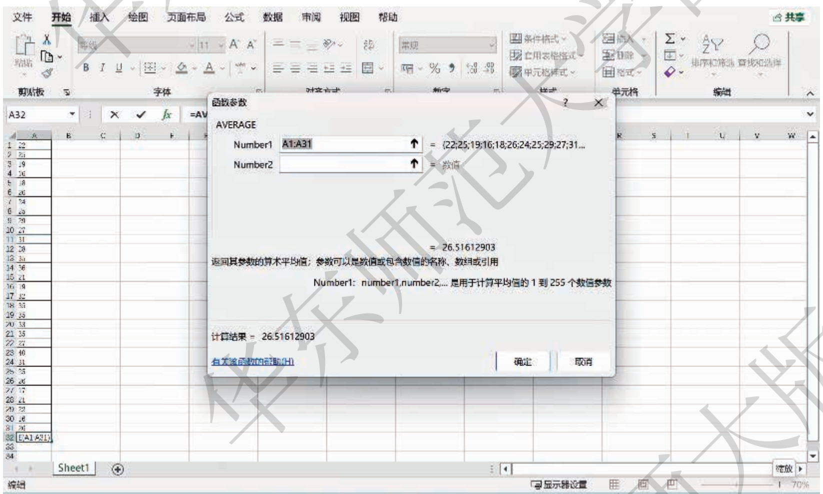


图 3

习题19.2

A 组

1. 下表是甲、乙两人 10 次射击的成绩(环)：

	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次	第 7 次	第 8 次	第 9 次	第 10 次
甲	9	6	7	6	8	7	7	9	8	9
乙	2	4	6	8	7	7	8	6	9	7

(1) 将下表填写完整.

	甲			乙		
	每次成绩	每次成绩 − 平均成绩	(每次成绩 − 平均成绩)^2	每次成绩	每次成绩 − 平均成绩	(每次成绩 − 平均成绩)^2
第 1 次						
第 2 次						
第 3 次						
第 4 次						
第 5 次						
第 6 次						
第 7 次						
第 8 次						
第 9 次						
第 10 次						
总计						
平均						

(2) 谁的平均成绩高?

(3) 谁的成绩较为稳定? 为什么?

2. 下表是在投掷两枚正方体骰子的活动中得到的数据：

投掷次数	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
出现数字之和为奇数的频数	2	4	8	10	14	17	20	22	25	26
出现数字之和为奇数的频率	0.400	0.400	0.533	0.500	0.560	0.567	0.571	0.550	0.556	0.520
投掷次数	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
出现数字之和为奇数的频数	27	28	30	34	37	40	42	45	47	50
出现数字之和为奇数的频率	0.491	0.467	0.462	0.486	0.493	0.500	0.494	0.500	0.495	0.500

分别计算最初投掷次数 5～25 这 5 个频率值的方差和最后投掷次数 80～100 这 5 个频率值的方差，说说哪一段的频率表现得更为稳定.

3. 某学校为选拔优秀运动员参加县中学生运动会，组织了多次百米跑测试，其中甲、乙两名运动员表现较为突出，他们在 10 次百米跑测试中的成绩(单位：s)如下表所示：

单位：s

甲	11.8	11.9	12.0	11.7	12.2	12.1	11.8	12.0	11.7	11.9
乙	11.9	11.9	11.8	11.8	12.0	11.9	11.8	12.1	11.9	11.8

如果根据这 10 次成绩选拔一人参加比赛，你认为哪一位比较合适？

（第 3 题）

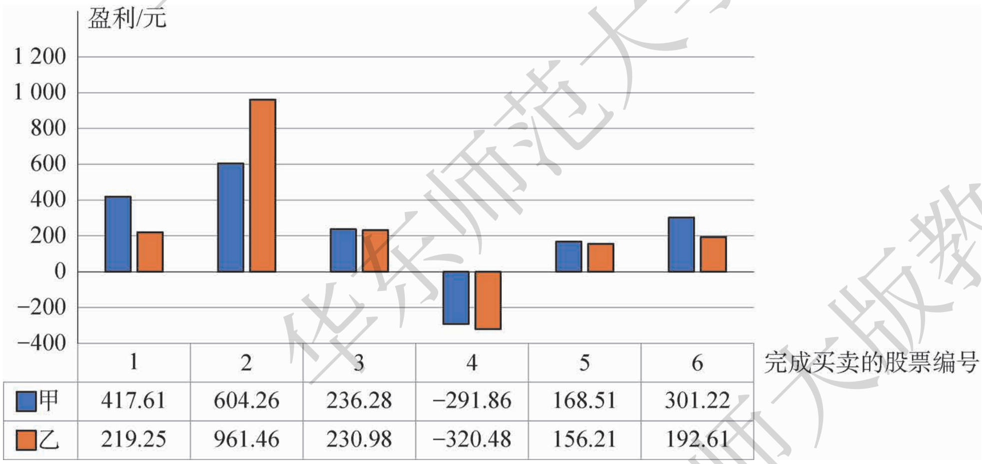
4. 下表给出了从 2022 年 7 月 4 日到 7 月 22 日（工作日）美元和欧元的人民币汇率中间价，其中的数据表示 100 外币折合人民币多少元．分别计算它们的平均数和方差，并说说在这个时间段内，哪种外币汇率更高，哪种外币汇率变化幅度更大．

	4 日	5 日	6 日	7 日	8 日	11 日	12 日	13 日
美元	670.71	669.86	672.46	671.43	670.98	669.60	672.87	672.82
欧元	699.76	698.88	690.42	683.84	682.20	681.12	675.71	675.06

	14 日	15 日	18 日	19 日	20 日	21 日	22 日	
美元	672.65	675.03	674.47	674.51	674.65	676.20	675.22	
欧元	675.09	676.23	680.48	683.89	690.32	688.30	689.96	

B 组

5. 有甲、乙两位股票投资者，投入股市的资金都是 5 万元左右．如图所示是他们去年在 6 只股票上的投资收益情况，收益正值为盈利，负值为亏损．甲每只股票的平均收益为 +239.34 元，乙每只股票的平均收益为 +240.01 元．乙认为自己以微弱的优势战胜了甲，但是甲不这么认为．你认为甲可以有哪些理由说明自己去年的收益不一定输给了乙？



（第 5 题）

6. 根据国家统计局《中国统计年鉴 2021》报告，南京和福州两地 2020 年各月降水量(单位：mm)数据如下表所示：

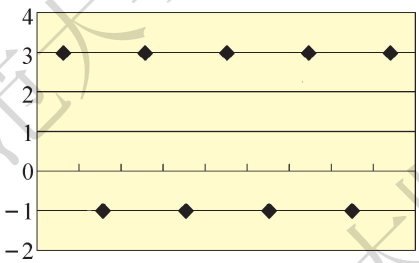
单位：mm

	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
南京	75.2	35.5	89.8	70.8	33.7	281.6	271.9	114.3	82.8	64.9	76.8	20.5
福州	28.2	65.2	262.8	63.9	262.6	224.1	81.7	80	119.4	5.6	0.5	16.5

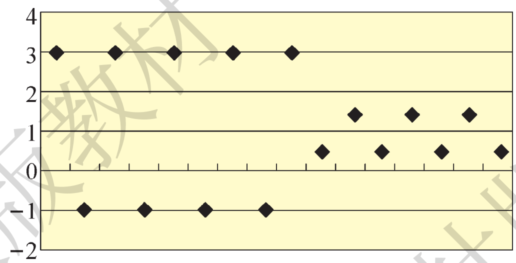
(1) 两地 2020 年的月平均降水量各是多少毫米？它们相近吗？

(2) 你认为这两个城市该年的降水情况相近吗？请作比较.

7. 不通过计算，比较图①②中两组数据的平均数及方差.



①



②

(第 7 题)

19.3 借助箱线图描述数据的分布

上学期我们学习过如何用频数分布直方图来描述数据的分布情况，借助它我们能从图上直观地看出数据集中于哪里，分布是否对称，等等. 在学习了中位数概念之后，现在，我们要学习另一种可以用来描述数据分布的统计图——箱线图.

问题 1 某市去年 4 月 30 天的空气质量指数(AQI①)如下：

60， 39， 65，82，60，89， 109，81，73，69，

103，156，62，41，55，123，164，73，45，90，

64， 54， 70，59，73，86， 91， 58，63，82.

怎样描述该市去年 4 月 AQI 的分布情况呢？

分析 我们可以使用频数分布表和频数分布直方图描述它们的分布情况：

---

① 见第 182 页“阅读材料”.

表19.3.1　某市去年 4 月 AQI 的频数分布表

AQI（x）	$25<x\leqslant 50$	$50<x\leqslant 75$	$75<x\leqslant 100$	$100<x\leqslant 125$	$125<x\leqslant 150$	$150<x\leqslant 175$
频数	3	15	7	3	0	2

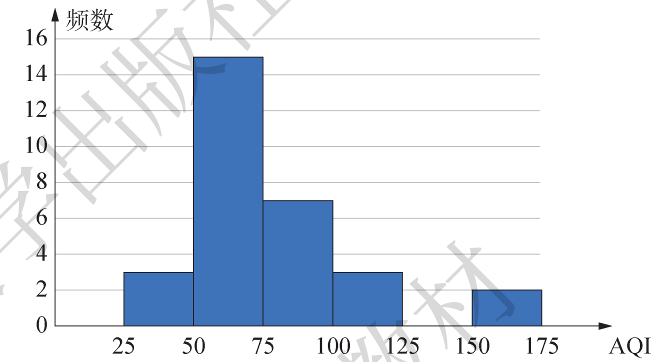


图19.3.1　某市去年 4 月 AQI 的频数分布直方图

（注：图中每组的起点值属于上一组，每组的终点值属于本组）

从表 19.3.1 和图 19.3.1 中可以看出：总体而言，该市去年 4 月 AQI 的类别以良为主，有 22 天（约占全月 30 天的 73%）AQI 处于 50 和 100 之间，有 3 天类别为优，3 天为轻度污染，还有 2 天 AQI 异常大，为中度污染，没有重度污染和严重污染的情况．数据的分布左、右不对称，中心偏向较低的 AQI，有一个高峰，AQI 处于 50 和 75 之间的天数最多．

统计工作者还会使用另一种名为箱线图的统计图来描述一组数据的分布情况，图 19.3.2 就是计算机依据该市去年 4 月 AQI 数据画出的箱线图．

与绘制其他统计图类似，我们也能借助计算机绘制箱线图．

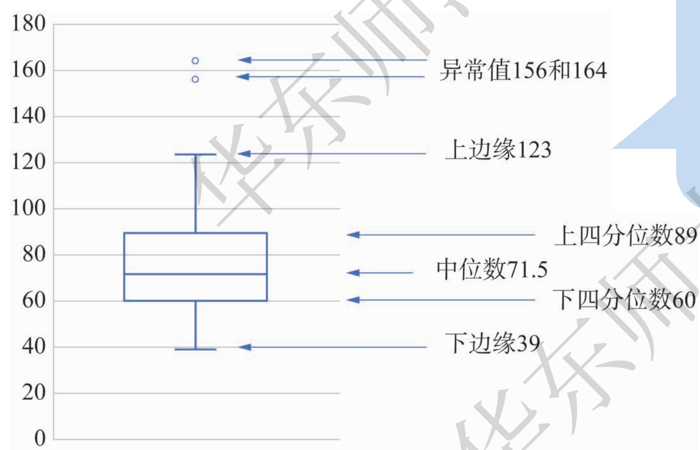


图19.3.2　某市去年 4 月 AQI 的箱线图

从上往下看，图 19.3.2 有两个空心点，是计算机自动甄别出的两个异常值，它们离其他数据较远．接着是一条横线（上边缘），表示除去上方两个异常值之后的最大值，沿竖线（触须线）往下，是标着上四分位数、中位数和下四分位数的箱体，最下面横线（下边缘）是最小值，这里没有发现异常值．像这样用最大值（除去异常值之后）、上四分位数、中位数、下四分位数和最小值（除去异常值之后）这五个指标来描述数据分布的统计图称为**箱线图**（box plot）．

它主要用到“中位数”这个概念，先用中位数把一组数据一分为二，再用中位数把分好的左、右两侧都再一分为二，也就是将数据平分，再平分，等分为四份．

如图 19.3.3，我们将这 30 个数据从小到大排列，中位数是处在中间的两个数据 70 和 73 的平均数，即 71.5，它处于总体 50%的位置．再将左侧的 15 个数据分成两等份，位于中间的 60 就是**下四分位数**（lower quartile），也称为第一四分位数，它处于总体 25%的位置；同样地，将右侧的数据也分成两等份，位于中间的 89 就是**上四分位数**（upper quartile），也称为第三四分位数，它处于总体 75%的位置．

39,41,45,54,55,58,59,60,60,62,63,64,65,69,70,73,73,73,81,82,82,86,89,90,91,103,109,123,156,164.

下四分位数 60　　中位数 71.5　　上四分位数 89

图19.3.3　下四分位数、中位数和上四分位数将所有数据分为四等份

从箱线图可以看出，这组数据包含两个异常值，有两天的 AQI 异常大，不适合用平均数作为代表，可用中位数来表示一般水平．总体而言，该市去年 4 月有约一半的天数 AQI 处于 60 和 89 之间，类别为良，还有约四分之一的天数 AQI 低于 60，另有约四分之一的天数 AQI 高于 89．因为中位数离箱体的中间有点远，说明数据的分布不是对称的，中心偏向较低的 AQI．

思考　要寻找以下信息，可以借助上面的频数分布直方图还是箱线图？

① 该市去年 4 月 AQI 有没有异常值;

② 按 AQI 排序分段后，天数最多或最少的那一段 AQI 的变化范围;

③ 该市去年 4 月 AQI 不超过 75 的天数;

④ 该市去年 4 月空气质量最好的七八天里，AQI 的变化范围.

频数分布直方图和箱线图都能描述数据的整体分布，但传达信息的侧重点有所不同. 画频数分布直方图和箱线图都需要先将一组数据排序，但频数分布直方图是将涵盖数据最小值和最大值的这一整段等距分组后，回答诸如“每一段内有多少个数据”这样的问题；而箱线图则是将所有数据等分为数据量相同的 4 个组(每组有四分之一总量个数据)，通过计算下四分位数、中位数和上四分位数来确定“箱体”的位置，从而回答诸如“中间 50%的数据处在哪个范围”这样的问题.

如果一组数据中有特别大或者特别小的异常值，计算机软件在制作箱线图时，会自动甄别并标记出来，提示此时用平均数作为这组数据的代表不太合适.

阅读材料

什么是空气质量指数(AQI)

查询空气质量预报时，你可能会看到如图 1 那样的画面——空气宝宝在微笑. 你也一定会感到愉快，可以外出活动了!

图 1

那是某地 2022 年 7 月 21 日的 24 小时空气质量预报，显示空气质量指数(AQI)介于 23 和 38 之间，类别为优.

你知道什么是 AQI 吗? 它对人们来说有怎样的提示作用呢?

AQI，即空气质量指数(air quality index)，是 2012 年我国修订的《环境空气

质量标准》所采用的技术指标．计入空气质量指数的污染物项目主要有二氧化硫（SO_2）、氮氧化物（以 NO_2 计）、可吸入颗粒物（PM_{10}）、臭氧（O_3）、一氧化碳（CO）和细颗粒物（$PM_{2.5}$）．其中 $PM_{2.5}$ 就是灰霾的主因．根据 AQI 的数值，空气质量划分成六个级别与相应的类别，分别用不同的颜色加以表示：优（绿色）、良（黄色）、轻度污染（橙色）、中度污染（红色）、重度污染（紫色）、严重污染（褐红色）．

AQI	AQI 级别	AQI 类别及表示颜色		对健康影响情况	建议采取的措施
0～50	一级	优	绿色	空气质量令人满意，基本无空气污染	各类人群可正常活动
51～100	二级	良	黄色	空气质量可接受，但某些污染物可能对极少数异常敏感人群的健康有较弱影响	极少数异常敏感人群应减少户外活动
101～150	三级	轻度污染	橙色	易感人群症状有轻度加剧，健康人群出现刺激症状	儿童、老年人及心脏病、呼吸系统疾病患者应减少长时间、高强度的户外锻炼
151～200	四级	中度污染	红色	进一步加剧易感人群症状，可能对健康人群的心脏、呼吸系统有影响	儿童、老年人及心脏病、呼吸系统疾病患者避免长时间、高强度的户外锻炼，一般人群适量减少户外运动
201～300	五级	重度污染	紫色	心脏病和肺病患者症状显著加剧，运动耐受力降低，健康人群普遍出现症状	儿童、老年人和心脏病、肺病患者应停留在室内，停止户外运动，一般人群减少户外运动
＞300	六级	严重污染	褐红色	健康人群的运动耐受力降低，有明显强烈症状，提前出现某些疾病	儿童、老年人和病人应当停留在室内，避免体力消耗，一般人群应避免户外活动

习题19.3

A 组

1. 据国家统计局网站公布的《中国统计年鉴 2021》显示，对全国居民户按 2020 年人均可支配收入进行五等份分组后，每组居民人均可支配收入如下表所示：

2020 年每组居民人均可支配收入 单位：元

	人均可支配收入
20%低收入组家庭	7 868.8
20%中间偏下收入组家庭	16 442.7
20%中间收入组家庭	26 248.9
20%中间偏上收入组家庭	41 171.7
20%高收入组家庭	80 293.8

回答以下问题：

（1）这一分组法一共将全国居民户分成几组？具体是怎么分的？

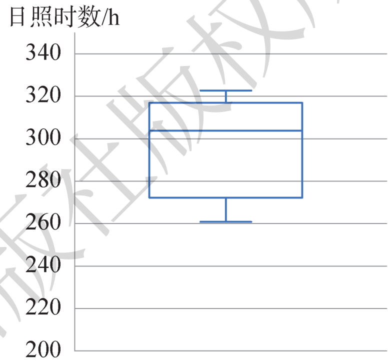
（2）表中人均可支配收入一列中“80 293.8”是什么含义？

2. 拉萨地处青藏高原，日照时间很长．下表给出了 2020 年各月拉萨的日照时数(单位：h)：

2020 年各月拉萨的日照时数 单位：h

	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
日照时数	268.8	279.4	317.2	310.9	318.9	306.4	265.6	323.0	301.0	316.8	275.5	261.2

（1）请将最小值、下四分位数、中位数、上四分位数和最大值标记在如图所示的箱线图中．



（第 2 题）

（2）拉萨 2020 年有几个月的日照时数大于上四分位数？分别是哪几个月？

（3）图中箱体的下半部分比较大，上半部分比较小，这是否意味着日照时数介于 272.2 h 和 303.7 h 之间的月份要多于介于 303.7 h 和 317.0 h 之间的月份？

B 组

3. 某班 40 名学生身高的数据信息如图所示.

（第 3 题）

请回答以下问题：

（1）从图中你能直接读出这 40 名学生身高的平均数、中位数和众数吗？

（2）一定有身高为 176 cm 的学生吗？一定有身高为 178 cm 的学生吗？

（3）依身高将同学们排序，中间 50%的学生其身高处于哪个范围？

（4）不低于 157 cm 的学生在全班学生中占比多少？

数学活动

匀速前行

体育竞技一般追求“更快、更高、更强、更团结”的精神．今天我们分组，一起合作做一个数学活动，不比速度，而是比哪个小组能够灵活地运用学过的知识来解决一个新问题，并用自己设计的方案、收集的数据、画的统计图来说明你们是怎么解决这个新问题的，从中得到了哪些收获．

这个数学活动的任务就是：比一比，哪个小组能够匀速地用 12 s 走完 12 m，并用数据说明小组任务完成得如何(每个小组以 4～6 人为宜)．

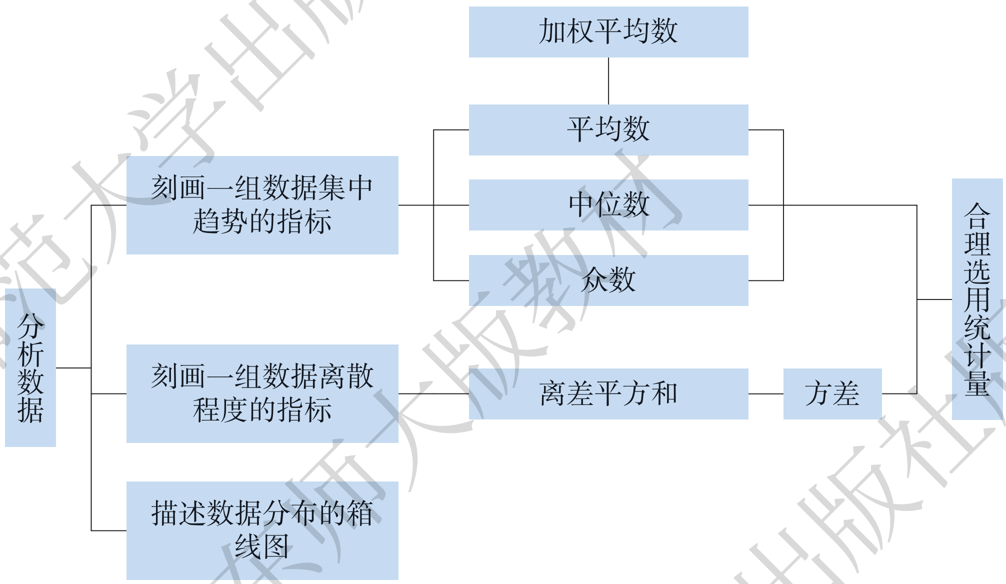
活动的理想目标主要有三个：一是在空地上定好相距 12 m 的起点与终点，并以直线相连；二是花 12 s 从起点走到终点，不早也不晚；三是行走过程保持匀速．我们以“总体上最接近理想目标”来衡量完成任务的质量．

定好距离后，大家不妨先试着走一走．然后，讨论一下为了知道自己以及每个小组是否匀速地用 12 s 走完了 12 m，需要准备哪些工具、收集什么样的数据、设计什么样的数据记录表，怎么说明你们的速度几乎始终是均匀的，在收集数据时如何分工可降低测量的误差，等等．最后，讨论一下如何借助统计图表等直观有趣的画面，汇报自己小组的任务完成情况，分享活动心得．

如果还想增加活动的难度，也可以同时融入其他动作，比如，要求各参赛者行走时手拿水杯，到终点时计量水杯中剩余的水量，再倒入自己小组的量杯中．这样，在比较小组活动成果时又增加了一个评价的方面．此外，是否还应考虑使用权重来比较合理地评价每个小组的任务完成情况？试试看，相信你们会有更新的感受．

小结

一、知识结构



二、要点

1. 数据对我们了解所考察的对象非常重要，但过多的数据有时反而让我们无法把握数据的重点，这时通过数据分析，我们可以更好地认识和了解数据. 对此，我们可以做两件事：一是制作形象的统计图表，对这组数据形成一个整体印象；二是计算代表这组数据的平均数、中位数和众数，以这几个指标概括这组数据. 当然，不是在所有问题中这三种指标都有实际意义，如果某种指标没意义，自然不必计算.

有了好的工具还要用得恰当，选取一组数据的代表时要注意平均数、中位数和众数的适用范围.

2. 对于给出的一组数据，可以通过求平均数、中位数和众数来反映数据的集中趋势，也可以用方差、离差平方和、最大值与最小值的差等来反映数据的离散程度. 对于同样的数据可以有多种分析的方法，需要根据问题的情境、数

据的特点等情况选择合适的方法.

3. 现代信息技术具有强大的数据处理功能，可以将我们从繁杂的计算和绘图工作中解放出来.

4. 我们可以借助四分位数和箱线图，了解数据的分布情况.

复习题

A 组

1. 某班 30 名学生的考试成绩如下：

76，56，80，78，71，78，90，79，92，83，81，93，84，86，98，61，75，84，90，73，80，86，84，88，81，90，78，92，89，100．

请计算这次考试全班学生成绩的平均数、中位数、众数和方差．

2. 有两组数据，第一组数据是：1，3，5，7，9；第二组数据是：21，23，25，27，29，31，33．先分别求出这两组数据的平均数，再将这两组数据合并在一起．求合并后这组数据的平均数，想一想，它是前两个平均数的平均数吗？

3. 判断下列说法是否正确，若不正确，请举出反例．

(1) n 个数的平均数就是把这 n 个数的总和除以 n 所得的数．

(2) n 个数的平均数一定是这 n 个数中的某一个．

(3) 将 n 个数由小到大排列后，如果 n 是奇数，位置在正中间的数就是这 n 个数的中位数；如果 n 是偶数，位置在正中间的那两个数的平均数才是这 n 个数的中位数．

(4) n 个数的中位数一定是这 n 个数中的某一个．

(5) 如果在 n 个数中某个或某几个数出现的频数最大，那么这个或这几个数就是这 n 个数的众数，如果找不出这样的数，那么这 n 个数就没有众数．

(6) 如果 n 个数中存在众数，那么该众数一定是这 n 个数中的某一个．

4. 已知一组数据的平均数等于 7，判断下列说法是否正确，若不正确，请举出一个反例：

(1) 如果这组数据共有三个，且其中一个大于 7，那么必有一个小于 7；

(2) 如果这组数据共有四个，且其中两个小于 7，那么必有两个大于 7．

5. 某个工程队正在修建道路．有 4 天每天修 5 m，有 2 天每天修 7 m，有 3 天每天修 10 m，有 1 天修 11 m．这 10 天中该工程队平均每天修建道路多少米？

6. 下表给出了某校七年级和九年级部分学生的身高(单位：cm)．在这些学生中，哪个年级的学生平均身高较高？哪个年级的学生身高的方差较大？请先不计算，试着回答这两个问题；再通过计算得出答案，与你预期的答案一致吗？

某校七年级和九年级部分学生的身高 单位：cm

七年级	164	165	153	146	148	154	152	156	158	150	156	160	163	156	146	150	157	148	156	142
九年级	165	164	162	151	155	169	158	173	159	156	166	154	154	153	163	152	151	158	179	166

7. 通过 19.2 节的阅读材料我们了解到，位于西北的乌鲁木齐 2022 年 7 月 1 日当日温差大于位于西南的南宁，如果比较这两地月平均气温(单位：℃)，那么结果会如何呢？下表是国家统计局在《中国统计年鉴 2021》中给出的 2020 年两地每月的平均气温，请据此回答 2020 年乌鲁木齐月平均气温的变化幅度是否大于南宁．

2020 年乌鲁木齐和南宁每月的平均气温 单位：℃

	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
乌鲁木齐	− 9.3	− 4.8	2.9	16.4	19.9	21.7	23.8	23.3	16.1	8	− 1.3	− 12.3
南宁	15.4	16.5	19	19.7	27.4	28.5	29.2	27.6	26.6	22.1	20.2	13.4

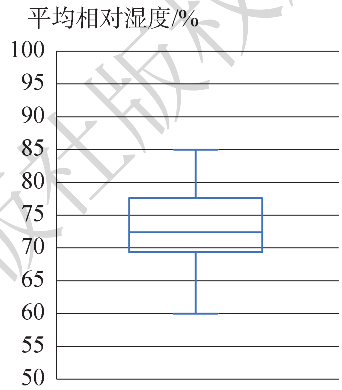
B 组

8. 下表给出了 2020 年各月杭州的平均相对湿度(%)：

2020 年各月杭州的平均相对湿度 单位：%

	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
平均相对湿度	81	73	72	60	72	85	85	64	74	70	73	69

(1) 请将最小值、下四分位数、中位数、上四分位数和最大值标记在如图所示的箱线图中．



（第 8 题）

（2）杭州 2020 年有几个月的平均相对湿度小于下四分位数？分别是哪几个月？

（3）平均相对湿度介于 60% 和 69.5% 之间的月份是否比介于 69.5% 和 72.5%之间的多？

9. 有一组数据：a，b，c，d，e，f，其中 $a=-10$，$b=0$，$c=11$，$d=17$，$e=17$，$f=31$．问：

（1）增大 a 对平均数、中位数和众数会产生影响吗？

（2）去掉 b 对平均数、中位数和众数会产生影响吗？

（3）去掉 c 对平均数、中位数和众数会产生影响吗？

（4）去掉 d 对平均数、中位数和众数会产生影响吗？

10. 某同学这学期四次数学测验成绩依次为 93 分、82 分、86 分和 90 分，期中考试成绩为 77 分． 数学老师说这学期的总评成绩的权重将按平时测验、期中考试和期末考试依次占 40%、20%和 40%计算．这位同学希望总评成绩能够达到或超过 85 分，那么期末考试这位同学至少要考多少分？（取整数）

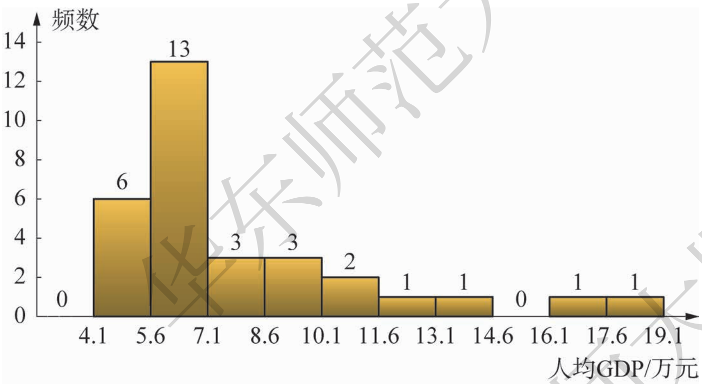
C 组

11. 我们曾经按等距分组法，画过“2021 年我国 31 个省市自治区(不含港澳台地区)人均 GDP 的频数分布直方图”（如图）．如果以各组的组中值(每组两个

端点值的平均数)代表组内各地的实际数据，请完成下面的频数分布表并估算按此分组方案，2021 年我国 31 个省市自治区(不含港澳台地区)人均 GDP 的平均数、中位数和众数．结合频数分布直方图，你认为用什么指标来代表该年我国 31 个省市自治区(不含港澳台地区)人均 GDP 比较合适?

2021 年我国 31 个省市自治区(不含港澳台地区)人均 GDP 的频数分布表

人均 GDP x/万元	组中值/万元	频数
$4.1 \leqslant x < 5.6$	4.85	6
$5.6 \leqslant x < 7.1$	6.35	13
$7.1 \leqslant x < 8.6$		3
$8.6 \leqslant x < 10.1$		3
$10.1 \leqslant x < 11.6$		2
$11.6 \leqslant x < 13.1$		1
$13.1 \leqslant x < 14.6$		1
$14.6 \leqslant x < 16.1$		0
$16.1 \leqslant x < 17.6$		1
$17.6 \leqslant x < 19.1$		1
总计		31



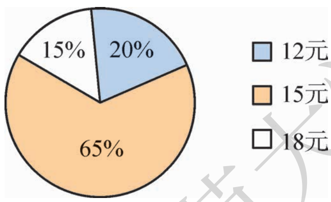
2021 年我国 31 个省市自治区(不含港澳台地区)人均 GDP 的频数分布直方图

(第 11 题)

12. 在一次业余歌手大奖赛中，三位选手的得分情况如下表所示．请据此提出一些问题考考你的同学．

选手 A	演唱得分	84.0	86.8	86.5	85.8	87.6	87.9	86.0	87.5	86.5	86.6	83.4	87.2
	声乐技巧得分	8.9	8.6	9.0	8.5	9.8	8.6	7.1	8.9	8.2	8.5	8.5	8.5
选手 B	演唱得分	82.0	82.0	82.5	82.2	82.4	82.4	82.1	82.5	81.0	82.5	83.0	84.0
	声乐技巧得分	7.8	7.5	7.8	7.5	7.2	8.3	7.8	7.2	7.2	7.5	8.0	8.0
选手 C	演唱得分	87.6	86.9	86.9	86.8	84.2	86.0	86.7	86.7	86.2	86.5	86.4	87.0
	声乐技巧得分	8.9	8.6	8.9	8.9	8.9	8.9	8.9	8.9	9.0	8.6	8.9	8.6

13. 某饮食公司为一学校提供午餐，有 12 元、15 元和 18 元三种价格的饭菜供师生选择(每人限定一份)．如图是 5 月份的销售情况统计图，如果这个月一共销售了 10 400 份饭菜，那么师生购买午餐费用的平均数、中位数和众数各是多少？



（第 13 题）

项目学习 7

寻找身边的函数

我国清代数学家李善兰在翻译《代数学》(1859 年)一书时，把“function”翻译成“函数”．中国古代“函”字与“含”字通用，有“包含”之意．为什么这么翻译？李善兰解释为：“凡式中含天，为天之函数．”这便暗含了因变量与自变量之间的变化关系．函数概念可谓包罗万象，生活中处处可见它的身影．你可知道日常生活中的“声”“光”“热”“力”“电”都蕴含着丰富的函数关系？你可听说过人的生理与心理数据也都有函数关系的影子？今天，让我们擦亮数学的双眼，开启函数的探索之旅．

所需数学知识或技能：函数概念；函数图象的画法；函数的基本性质等．

所需跨学科知识：频率、声音等物理知识；音调、音律等音乐知识；运动、心率等体育和生物学知识．

所需材料：秒表等计时工具；跳绳等运动器材；吉他等乐器；水杯等材料．

活动形式：收集数据并探究结果、创作乐曲并亲自演奏等．

成果形式：自制的手抄报、创作的小乐曲、分析报告、建议书等．

任务一　体育中的函数

我们常说，要科学地开展体育锻炼才能达到更好的效果，可见体育中也有许多规律需要我们潜心探索．体育运动与人体健康或安全的关系是密不可分的．如何运动更加健康？运动时间如何调配？运动量如何把握？这些问题都与函数有关，只有洞悉了运动中人体内相关数据的函数关系，才能更加有效地回答这些问题．请你开展实验，探究体育中的函数，并基于研究发现，提出“健康运动”的方案．

活动流程建议：

（1）提出问题．请你查阅相关资料，了解体育运动中关键的变量关系．围绕“健康运动”这一主题，以变量间的函数关系为主要研究方向，提出与之相关的研究问题．以心率这一关键变量为例，你可以探索运动类型、运动时间与心率的关系，运动时间、性别与心率的关系，在有氧运动或无氧运动中分析运动时间与心率的关系等．

（2）开展实验．请你根据研究问题，设计实验方案，并开展研究．在实验过程中，利用表格、函数图象等数学工具，观察并归纳数据中的规律．

（3）提炼结论．用数学的方法分析实验数据，探究其中变量之间的函数关系，得到研究结论，回答研究问题．进一步尝试利用新的发现提出“健康运动”的方案，创造性地提出和宣传你们的倡议．

任务二　音乐中的函数

我们可以借助数学研究声音的特性(响度、音调等)，也可以利用数学让声音更加悦耳，让声音成为音乐．音乐与数学的关系非常密切，我国古代的音乐理论“三分损益法”与古希腊时期的“五度相生律”（又称为“毕达哥拉斯律”）中包含着有理数等数学知识；中华人民共和国国歌《义勇军进行曲》的曲谱中隐含着黄金分割比例；巴赫(Bach，1685—1750)的许多乐章中都体现了函数变化的数学之美．请你深入学习，探索音乐中的函数性质，在此基础上利用数学创作出一小段乐曲，并尝试演奏出来吧！

活动流程建议：

（1）探索乐谱中的函数．不少乐曲中都隐含着数学规律，请你收集一些好听、有趣、经典的曲谱(例如巴赫的 BWV1079 等)，创造性地将其呈现在平面直角坐标系中，以函数的视角观察其变化规律．

（2）创作数学的乐曲．你听过利用斐波那契数列、圆周率等生成的乐曲吗？你能否用数学知识谱写乐章呢？基于对已有乐谱的探究，请你利用函数的性质(单调性、周期性、对称性等)自由创作一小段乐曲．将你的曲谱表征成函数图象，并补充说明你的创作过程．

（3）演奏数学的乐曲．你能亲自演奏出自己创作的音乐吗？如果没有合适的乐器，你可以借助计算机等信息技术工具实现演奏效果；你还可以利用玻璃杯等物体或其他材料，结合数学、物理、音乐等知识，自制简易的“乐器”用以演奏．

项目学习 8

数据可视化

各式各样的统计图表是分析数据必不可少的工具．只有直观地呈现数据，展示其变化规律和相互关系等特征，才能让阅读的人一目了然，准确高效地获取信息．那么，如何根据数据的特点，选择和使用合适的数据呈现方法，以达到既科学规范、清晰严谨，又美观大方、引人入胜的效果呢？茎叶图、条形图、扇形图、折线图、箱线图、频率分布直方图……各式各样的统计图表等你探索！

所需数学知识或技能：统计图表、数据分析等统计知识．

所需跨学科知识：植物、叶子等生物学知识；气温、降水等地理知识；统计图表制作、软件使用等信息技术知识．

所需材料：彩笔、纸张等海报制作工具；种子、器皿等生物学实验工具．

活动形式：提出问题、收集数据、处理数据、分析数据、生成结论等．

成果形式：调查报告、宣传海报、建议书或倡议书等．

任务一　学业成绩的比较

分析不同班级、不同学科、不同时期的成绩差异不仅仅是教师需要关心的问题，每位学生也都有必要了解其中的变化，进而分析自身的学习情况．比较分数并不仅仅是为了判断优劣，还可以发现学习的障碍、难点与问题，从而更好地开展下一阶段的学习．例如，比较某次数学考试其他班成绩与本班成绩的差异时，你不仅可以利用箱线图等分析班级整体的成绩分布，还可以分析不同题型或不同知识点的得分率，知其然亦知其所以然，使知识的查漏补缺更加高效．请你提出

相应的研究问题，获取合适的数据，通过直观的统计图表呈现不同时期或不同班级等的成绩差异，提炼结论并回答研究问题.

活动流程建议：

（1）提出问题．请你选择特定时期班级及学科的学业成绩作为研究对象，提出感兴趣的研究问题．例如，你可以比较当下两个不同班级数学成绩的差异，尝试找出其中某班的不足之处；你也可以关注自己所在班级某一学科成绩的变化，比较多次考试的结果；你还可以比较不同学科成绩之间的关系；等等.

（2）数据可视化．明确了研究问题与研究对象，便可以在教师的帮助下获取到必要的数据(注意保护数据隐私)．请你通过计算必要的统计量并绘制直观的统计图表来帮助分析数据，应不断优化数据的呈现方式，寻找更优的表征.

（3）制作海报．借助统计图表分析数据，提炼结论以回答研究问题．创造性地利用海报展示你的研究成果.

任务二　种子发芽率的比较

种子发芽率是种子质量的必检指标之一，正确评价种子的发芽率和发芽情况对种子的进一步分级、加工、播种等都尤为重要．有些植物的种子在适宜的条件下数小时内便能发芽，而有些则需要一两天甚至更长时间．不同种子的发芽条件也不相同，温度、湿度、光照等条件对其都有所影响．而对于同一类植物的种子，其发芽生长的过程也遵循一定的数学规律．请你选择一种或多种植物的种子开展实验，研究其发芽过程中的数学规律，并以合适的方式直观呈现你的数据和结果.

活动流程建议：

（1）提出问题．请你选择一种或多种植物的种子作为研究对象，提出你感兴趣的研究问题．例如，你可以比较相同条件下，两批不同类型种子的发芽率和生长过程中的差异；你也可以关注一种植物种子从发芽到生长一段时间内的变化情况，如其高度、叶片数量、总质量

等随时间的变化；等等．根据你提出的问题，设计实验方案．

（2）数据可视化．根据方案开展实验研究，收集实验数据(可随时向生物老师请教)．选择合适的统计工具，分析数据，绘制统计图表，将数据可视化．可以不断优化数据的呈现方式，让研究结论的呈现更加直观生动．

（3）制作海报．借助统计图表分析数据，提炼结论以回答研究问题．创造性地利用海报展示你们的研究成果．

任务三 城市气温与降水的比较

我国国土面积广袤，南北纬度跨越大，地跨 5 个气候带．因此，我国不同城市的气温与降水也有明显差异，哪怕都在炎热的夏季，北京、上海、广州等不同城市的气温也是不尽相同的．有人认为，现在的天气与以前不一样了，夏天更热而冬天更冷了．这是人体感知上的错觉还是确有其事？如何更加客观全面地评价一个城市的天气？哪些指标和数据更有说服力？请你选择特定的城市，收集数据，直观地呈现数据并加以分析，探讨气温与降水的变化或差异．

活动流程建议：

（1）提出问题．请你选择一个或多个城市作为研究对象，提出你感兴趣的研究问题．例如，你可以横向比较去年两个不同城市气温和降水的差异；你也可以纵向比较某一个城市近几年的气温和降水的变化；你还可以比较特定季节某些城市的天气差异；等等．

（2）数据可视化．明确了研究问题与研究对象之后，请查阅相关网站或书籍资料，收集真实的数据(可随时向地理老师请教)．请你通过计算必要的统计量并绘制直观的统计图表来帮助分析数据，应不断优化数据的呈现方式，寻找更优的表征．

（3）制作海报．借助统计图表分析数据，提炼结论以回答研究问题．创造性地利用海报展示你的研究成果．

后　记

本套教科书于 2001 年初获教育部批准立项，并于当年 3 月依据《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》正式开始编写．七年级上册于 2001 年 6 月通过教育部审查，并于当年秋季在全国七个国家级实验区投入使用．《义务教育数学课程标准(2011 年版)》于 2011 年 12 月由教育部正式颁布，根据教育部的统一安排，本套教科书进行了修订送审，并在顺利通过教育部审查后继续在相关省市使用至今．在首届全国教材建设奖评选中，本套教科书(七年级上册、七年级下册)荣获“全国优秀教材二等奖”．

2022 年 4 月，《义务教育数学课程标准(2022 年版)》正式颁布，根据教育部的统一部署，义务教育教科书新一轮修订工作正式启动．为了确保本套教科书修订工作的顺利进行，我们提前于 2018 年初至 2020 年底，在本套教科书使用地区进行了大规模的抽样问卷调查和测试，获得了改进教科书质量的第一手材料．广大师生反馈的许多共性问题，为我们进行新一轮教科书修订提供了明确的思路和启示．

按照教育部的要求，本套教科书修订稿于 2023 年 11 月 25 日至 12 月 15 日在全国九个省市开展了试教试用和一线教师审读工作．在此期间，几十位一线教师为我们进一步完善修订教科书提出了数百条意见和建议．

在此，我们对 20 多年来给予本套教科书关心的广大教科书使用地区师生表示衷心的感谢．

除已经列出的编写人员外，程靖、黄健参加了本册教科书的有关编写工作．

尽管我们对修订工作倾注了大量心血，但是现在呈现在广大师生面前的修订教科书肯定还存在有待进一步完善的地方．我们真诚希望广大师生继续关心我们的教科书，对我们的教科书不断提出新的宝贵意见．

联系电话：(021)60821761，60821770．

电子邮箱：pingping@ecnupress.com.cn．

数学

八年级　下册

中国环境标志
CHINA ENVIRONMENTAL LABELLING
绿色印刷产品

ISBN 978-7-5760-6515-2
9 787576 065152 >
定价：15.00元