教育部审定
2013

义务教育教科书

数学

SHUXUE

八年级　下册



华东师范大学出版社

华东师范大学出版社

义务教育教科书

数学

SHUXUE

八年级　下册

主　编　王建磐
副主编　王继延
　　唐复苏

华东师大版电子教材

华东师范大学出版社

致亲爱的同学

我们的小伙伴，欢迎你.

放在你面前的是依据《国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010—2012 年）》与国家《义务教育数学课程标准（2011 年版）》，为你们提供的初中阶段六册数学教科书中的第四本.

这本书与你已经学过的三本数学教科书一样，从你所熟悉的情境入手，呈现一些最基本的、丰富多彩的数学内容，为你提供一些让你思考、实践与自主探索的栏目. 书中还穿插了一些阅读材料. 不同层次的习题，应用性、探索性和开放性的各种形式的问题及综合与实践等，都为你提供了充分展示你聪明才智与数学能力的机会.

现在，请你打开这本书，与我们一起继续漫游数学世界，探索发现更多、更具魅力的数学奥秘.

代数式是你早就结识的朋友，前面我们已经熟悉了整式及其运算，并且已经在解方程和解不等式中派了用场，顺利地解决了不少实际问题. **“分式”**是解决问题时碰到的又一种代数式，同样需要我们认识分式的性质和运算. 分式与分数在许多方面有着惊人的相似，从中你可以进一步体会数学的奥秘，学会探索新知识的方法.

我们生活的世界，处在不停的运动变化之中. 例如，人的身高随着年龄的增长在不断变化，气温随着时间的推移而变化……为了刻画现实世界的运动变化，在数学上引进了“变量”和“函数”，使数学发生了根本的转折. **“函数及其图象”**将把你领入一个新的数学世界，提供解决许多实际问题的工具和方法，使你在数学王国里更加自由地翱翔.

实际生活中充满着各种各样的奇妙图形，你见过学校、工厂等单位的伸缩大门吗？那里有许多你所认识的几何图形. **“平行四边形”**和**“矩形、菱形与正方形”**这两章将陪伴你会见一些小学里已经认识的老朋友，你也将结识一些新朋友. 你将通过探索、思考，对它们的面貌特征有更深刻的理解，并将进一步学会演绎推理，解决一些有关图形的度量问题.

“数据的整理与初步处理”将帮助你学会整理与初步处理数据，合理使用平均数、中位数、众数和方差，较为准确地概括所得到的众多数据，进一步用数学语言表述自己的见解.

我们相信，这本书一定能继续帮助你在丰富多彩的数学世界里漫游、探索，充分发挥你的想象力与创造力，解决各种各样的问题.

数学世界继续欢迎你，为你打开一道道神秘的大门.

编者

目　录

第 16 章　分式

16.1　分式及其基本性质 / 2

1. 分式 / 2

2. 分式的基本性质 / 3

16.2　分式的运算 / 6

1. 分式的乘除 / 6

2. 分式的加减 / 8

阅读材料　类比 / 11

16.3　可化为一元一次方程的分式方程 / 12

16.4　零指数幂与负整数指数幂 / 17

1. 零指数幂与负整数指数幂 / 17

2. 科学记数法 / 20

阅读材料　光年和纳米 / 22

小结 / 23

复习题 / 24

第 17 章　函数及其图象

17.1　变量与函数 / 28

17.2　函数的图象 / 34

1. 平面直角坐标系 / 34

2. 函数的图象 / 36

阅读材料　笛卡儿的故事 / 42

华东师大版电子教材

17.3　一次函数 / 43
1. 一次函数 / 43
2. 一次函数的图象 / 45
3. 一次函数的性质 / 48
4. 求一次函数的表达式 / 50
阅读材料　小明算得正确吗 / 53
17.4　反比例函数 / 54
1. 反比例函数 / 54
2. 反比例函数的图象和性质 / 56
17.5　实践与探索 / 59
阅读材料　The Graph of a Function / 65
小结 / 66
复习题 / 68

第 18 章　平行四边形

18.1　平行四边形的性质 / 72
18.2　平行四边形的判定 / 81
阅读材料　稳定性 PK 不稳定性 / 91
小结 / 93
复习题 / 94

第 19 章　矩形、菱形与正方形

19.1　矩形 / 98
1. 矩形的性质 / 98

华东师大版电子教材

2. 矩形的判定 / 102
阅读材料　完美矩形 / 107
19.2　菱形 / 110
1. 菱形的性质 / 110
2. 菱形的判定 / 113
19.3　正方形 / 119
阅读材料　四边形的变身术 / 122
小结 / 123
复习题 / 124
综合与实践　图形的等分 / 127

第 20 章　数据的整理与初步处理

20.1　平均数 / 130
1. 平均数的意义 / 130
2. 用计算器求平均数 / 133
3. 加权平均数 / 134
阅读材料　平均化 / 139
20.2　数据的集中趋势 / 140
1. 中位数和众数 / 140
2. 平均数、中位数和众数的选用 / 144
阅读材料　计算机帮我们求平均数、中位数和众数 / 148
20.3　数据的离散程度 / 150
1. 方差 / 150
2. 用计算器求方差 / 154

华东师大版电子教材

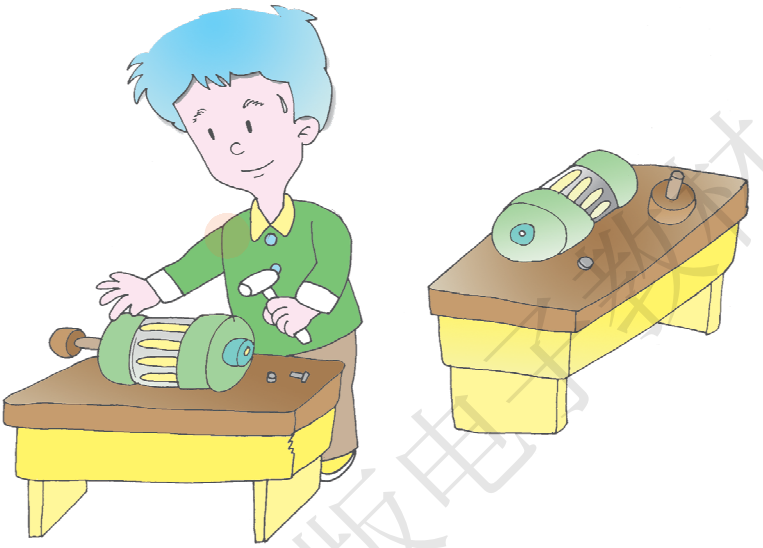
阅读材料　早穿皮袄午穿纱 / 157
小结 / 158
复习题 / 159
综合与实践　通讯录的设计 / 161

数学实验附图

方格图 / 162
格点图 / 165

华东师大版电子教材

第16章　分式



要装配30台机器，在装配好6台后，采用了新的技术，工作效率提高了一倍，结果总共只用3天就完成了任务. 原来每天能装配机器多少台？

设原来每天能装配机器x台，可列出方程：

$$\frac{6}{x}+\frac{30-6}{2x}=3.$$

上面方程左边的式子已不再是整式，这就涉及分式与分式方程的问题.

本章将学习关于分式与分式方程的一些初步知识.

华东师大版电子教材

16.1 分式及其基本性质

1. 分式

做一做

两个整数相除，可以表示成分数的形式. 两个整式相除，可以怎样表示呢？

（1）面积为 2 平方米的长方形的长为 3 米，则它的宽为_____米；

（2）面积为 S 平方米的长方形的长为 a 米，则它的宽为_____米；

（3）一箱苹果售价 p 元，总重 m 千克，箱重 n 千克，则每千克苹果的售价是_____元.

形如$\frac{A}{B}$（A、B 是整式，且 B 中含有字母，$B\neq0$）的式子，叫做**分式**（fraction）. 其中 A 叫做分式的**分子**（numerator），B 叫做分式的**分母**（denominator）.

整式和分式统称**有理式**（rational expression），即

$$\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\\ \text{分式}\end{cases}$$

例 1 下列有理式中，哪些是整式？哪些是分式？

$$\frac{1}{x},\ \frac{x}{2},\ \frac{2xy}{x+y},\ \frac{2x-y}{3}.$$

解 $\frac{x}{2}$ 和 $\frac{2x-y}{3}$ 是整式，$\frac{1}{x}$ 和 $\frac{2xy}{x+y}$ 是分式.

注意 在分式中，分母的值不能为零. 如果分母的值为零，则分式没有意义. 例如，在分式$\frac{S}{a}$中，$a\neq0$；在分式$\frac{p}{m-n}$中，$m\neq n$.

华东师大版电子教材

例 2 当 x 取什么值时，下列分式有意义？

（1）$\dfrac{x}{x-1}$；　　（2）$\dfrac{x-2}{2x+3}$.

分析 要使分式有意义，必须且只需分母的值不等于零.

解 （1）分母 $x-1\neq 0$，即 $x\neq 1$.

所以，当 $x\neq 1$ 时，分式 $\dfrac{x}{x-1}$ 有意义.

（2）分母 $2x+3\neq 0$，即 $x\neq -\dfrac{3}{2}$.

所以，当 $x\neq -\dfrac{3}{2}$ 时，分式 $\dfrac{x-2}{2x+3}$ 有意义.

2. 分式的基本性质

在进行分数的化简与运算时，常常要进行约分和通分，其主要依据是分数的基本性质. 类似地，分式有如下基本性质：

分式的分子与分母都乘以（或都除以）同一个不等于零的整式，分式的值不变.

你还记得分数的基本性质吗？

与分数类似，根据分式的基本性质，可以对分式进行约分和通分.

例 3 约分：

（1）$\dfrac{-16x^2y^3}{20xy^4}$；　　（2）$\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$.

分析 分式的约分，即要求把分子与分母的公因式约去. 为此，首先要找出分子与分母的公因式.

试用分式的基本性质说明这里是怎样进行约分的.

解 （1）$\dfrac{-16x^2y^3}{20xy^4}=-\dfrac{4xy^3\cdot 4x}{4xy^3\cdot 5y}=-\dfrac{4x}{5y}$.

（2）$\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2}=\dfrac{x+2}{x-2}$.

华东师大版电子教材

约分后，分子与分母不再有公因式. 分子与分母没有公因式的分式称为**最简分式**.

例 4 通分：

(1) $\frac{1}{a^2b}$, $\frac{1}{ab^2}$；　　(2) $\frac{1}{x-y}$, $\frac{1}{x+y}$；

(3) $\frac{1}{x^2-y^2}$, $\frac{1}{x^2+xy}$.

分析 分式的通分，即要求把几个异分母的分式分别化为与原来的分式相等的同分母的分式. 通分的关键是确定几个分式的公分母，通常取各分母所有因式的最高次幂的积作为公分母(叫做最简公分母). 例如题(1)中的两个分式$\frac{1}{a^2b}$和$\frac{1}{ab^2}$，它们的最简公分母是 a^2b^2.

解 (1) $\frac{1}{a^2b}$与$\frac{1}{ab^2}$的最简公分母为 a^2b^2，所以

$$\frac{1}{a^2b}=\frac{1\cdot b}{a^2b\cdot b}=\frac{b}{a^2b^2},$$

$$\frac{1}{ab^2}=\frac{1\cdot a}{ab^2\cdot a}=\frac{a}{a^2b^2}.$$

试用分式的基本性质说明这里是怎样进行通分的.

(2) $\frac{1}{x-y}$与$\frac{1}{x+y}$的最简公分母为$(x-y)(x+y)$，即 x^2-y^2，所以

$$\frac{1}{x-y}=\frac{1\cdot(x+y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{x+y}{x^2-y^2},$$

$$\frac{1}{x+y}=\frac{1\cdot(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{x-y}{x^2-y^2}.$$

为确定最简公分母，通常先将各分母分解因式.

(3) 因为 $x^2-y^2=$ _____，

$x^2+xy=$ _____，

所以$\frac{1}{x^2-y^2}$与$\frac{1}{x^2+xy}$的最简公分母为 _____，因此

华东师大版电子教材

$\dfrac{1}{x^2-y^2}=$ _____,

$\dfrac{1}{x^2+xy}=$ _____.

练　习

1. 军训期间，小华打靶的成绩是 m 发 9 环和 n 发 7 环，小华的平均成绩是每发多少环？



（第 1 题）

2. 约分：

（1）$\dfrac{2ax^2y}{3axy^2}$；　　（2）$\dfrac{x^2-4}{xy+2y}$；

（3）$\dfrac{2ab-2a^2}{3ab-3b^2}$.

3. 通分：

（1）$\dfrac{1}{3x^2}$，$\dfrac{5}{12xy}$；　　（2）$\dfrac{1}{x^2+x}$，$\dfrac{1}{x^2-x}$.

习题 16.1

1. 填空：

（1）已知操场环形跑道一圈长 400 米，甲、乙两人同时同地出发，沿跑道同向跑步，甲的速度为 a 米/秒，乙的速度为 b 米/秒（$a>b$），甲跑步超过乙一圈需 _____ 秒；

（2）巧克力糖的单价为每千克 a 元，奶糖的单价为每千克 b 元，将 m 千克巧克力糖和 n 千克奶糖混合，这样得到的混合糖的平均单价是每千克 _____ 元.

2. 下列有理式中，哪些是整式？哪些是分式？

$$\frac{1}{x},\quad \frac{1}{2}(x+y),\quad \frac{x}{3},\quad \frac{2}{m-x},\quad \frac{x}{x-3},\quad \frac{4x+9y}{13}.$$

华东师大版电

3. 当 x 取什么值时，下列分式有意义？

（1）$\frac{1}{2x}$；　　（2）$\frac{x-2}{x+2}$；

（3）$\frac{x+2}{4x+1}$；　　（4）$\frac{4x}{3x-5}$.

4. 约分：

（1）$\frac{(a-x)^2}{(x-a)^3}$；　　（2）$\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$.

5. 通分：

（1）$\frac{c}{ab}$，$\frac{a}{bc}$，$\frac{b}{ac}$；

（2）$\frac{1}{x^2+x}$，$\frac{-1}{x^2+2x+1}$.

6. 某机械厂生产某种零件，第一道工序需要将每根长 $10a$ 厘米、底面半径为 r 厘米的圆钢锻造为底面半径为 a 厘米的圆钢. 锻造后的圆钢长多少厘米？



（第 6 题）

16.2 分式的运算

回想分数的乘除法，如何计算 $\frac{5}{6}\times\frac{9}{10}$ 和 $\frac{5}{6}\div\frac{3}{4}$？从中可得到什么启示？

1. 分式的乘除

试一试

计算：

（1）$\frac{a^2}{b^3}\cdot\frac{2b^2}{3a}$；　　（2）$\frac{a^2}{b^3}\div\frac{a}{2b}$.

解　（1）$\frac{a^2}{b^3}\cdot\frac{2b^2}{3a}=\frac{a^2\cdot 2b^2}{b^3\cdot 3a}=\frac{2a}{3b}$.

（2）$\frac{a^2}{b^3}\div\frac{a}{2b}=\frac{a^2}{b^3}\cdot\frac{2b}{a}=\frac{a^2\cdot 2b}{b^3\cdot a}=\frac{2a}{b^2}$.

华东师大版电子

概括

分式乘分式，用分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母. 如果得到的不是最简分式，应该通过约分进行化简.

分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘.

例1 计算：

(1) $\frac{a^2x}{by^2}\cdot\frac{ay^2}{b^2x}$；　　(2) $\frac{a^2xy}{b^2z^2}\div\frac{a^2yz}{b^2x^2}$.

解 (1) $\frac{a^2x}{by^2}\cdot\frac{ay^2}{b^2x}=\frac{a^2x\cdot ay^2}{by^2\cdot b^2x}=\frac{a^3}{b^3}$.

(2) $\frac{a^2xy}{b^2z^2}\div\frac{a^2yz}{b^2x^2}=\frac{a^2xy}{b^2z^2}\cdot\frac{b^2x^2}{a^2yz}=\frac{x^3}{z^3}$.

例2 计算：$\frac{x-2}{x+3}\cdot\frac{x^2-9}{x^2-4}$.

解 原式 $=\frac{x-2}{x+3}\cdot\frac{(x+3)(x-3)}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{x-3}{x+2}$.

将分子、分母分别分解因式，并及时约分.

思考

怎样进行分式的乘方呢？试计算：

(1) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$；　　(2) $\left(\frac{a}{b}\right)^n$（$n$ 为整数，且 $n\geqslant 2$）.

解 (1) $\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b}$

$=$ _____.

(2) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{b}}_{n个}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n个}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}_{n个}}$

$=$ _____.

观察所得的结果，试总结出分式的乘方法则.

华东师大版电子教材

练　习

1. 计算：

（1）$\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c}$；　　（2）$\frac{x^2-4y^2}{3xy^2}\cdot\frac{xy}{x+2y}$；

（3）$\frac{3y}{10x}\div\frac{6y^2}{5x^2}$；　　（4）$\frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{x^2+x}{x^2}$.

2. 计算：

（1）$\left(\frac{y}{-2x}\right)^2$；　　（2）$\left(\frac{-2a}{c^2}\right)^3$.

2. 分式的加减

回想分数的加减法，如何计算 $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ 和 $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$？从中可得到什么启示？

试一试

计算：（1）$\frac{b}{a}+\frac{2}{a}$；　　（2）$\frac{2}{a^2}-\frac{3}{ab}$.

解　（1）$\frac{b}{a}+\frac{2}{a}=\frac{b+2}{a}$.

（2）$\frac{2}{a^2}-\frac{3}{ab}=\frac{2b}{a^2b}-\frac{3a}{a^2b}=\frac{2b-3a}{a^2b}$.

概括

同分母的分式相加减，分母不变，分子相加减；

异分母的分式相加减，先通分，变为同分母的分式，然后再加减.

例 3　计算：$\frac{(x+y)^2}{xy}-\frac{(x-y)^2}{xy}$.

华东师大版电子教材

解 $\dfrac{(x+y)^2}{xy}-\dfrac{(x-y)^2}{xy}$

$=\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy}$

$=\dfrac{(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)}{xy}$

$=\dfrac{4xy}{xy}=4.$

如果所得结果不是最简分式，应该通过约分进行化简.

例 4 计算：$\dfrac{3}{x-4}-\dfrac{24}{x^2-16}$.

分析 这里两个分式的分母不同，要先通分. 为此，先找出它们的最简公分母. 注意到 $x^2-16=(x+4)(x-4)$，所以最简公分母是 $(x+4)(x-4)$.

解 $\dfrac{3}{x-4}-\dfrac{24}{x^2-16}$

$=\dfrac{3}{x-4}-\dfrac{24}{(x+4)(x-4)}$

$=\dfrac{3(x+4)}{(x+4)(x-4)}-\dfrac{24}{(x+4)(x-4)}$

$=\dfrac{3(x+4)-24}{(x+4)(x-4)}$

$=\dfrac{3x-12}{(x+4)(x-4)}$

$=\dfrac{3(x-4)}{(x+4)(x-4)}$

$=\dfrac{3}{x+4}.$

练　习

1. 计算：

(1) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a}$；

(2) $\dfrac{10}{ab}-\dfrac{6}{ab}$；

(3) $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a+b}$；

(4) $\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{a}{b-a}$.

华东师大版电子教材

2. 计算：

（1）$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}$；　　（2）$\frac{b}{a}-\frac{b}{4a^2}$；

（3）$\frac{4}{a^2-1}-\frac{2}{a^2+a}$；　　（4）$\frac{4}{a+2}+a-2$.

习题 16.2

1. 计算：

（1）$\frac{ny}{mx}\cdot\frac{my}{nx}$；　　（2）$\frac{12x}{7y}\div 8x^2y$；

（3）$\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\div\frac{x-1}{x^2+x}$；　　（4）$\left(-\frac{3b}{2a}\right)^2$.

2. 计算：

（1）$\frac{b-c}{a}+\frac{b+c}{a}$；　　（2）$\frac{c}{a}-\frac{c}{b}$；

（3）$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{1-x}$；　　（4）$\frac{x^2}{x-1}-x-1$.

3. 计算：

（1）$\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\cdot x^3$；

（2）$\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+y}\cdot\left(\frac{x+y}{2x}-x-y\right)$.

4. 林林家与学校的距离为 a 千米，林林骑自行车从家到学校需要 b 分钟. 某天，林林从家骑自行车出发 c 分钟后，爸爸才从家骑自行车出发，结果爸爸与林林同时到达学校. 爸爸每分钟比林林多骑多少千米？

5. 周末，小颖跟妈妈到水果批发市场去买苹果. 那里有两种苹果，甲种苹果每箱净重 m 千克，售价 a 元；乙种苹果每箱净重 n 千克，售价 b 元. 请问，甲种苹果的单价是乙种苹果的多少倍？

华东师大版电子教材

阅读材料

类　比

学习分式时，我们注意将分式与分数进行类比，通过回忆分数的有关知识来探索、发现、建立分式的新知识.

鲁班由小茅草割破手发明了锯，维也纳医生奥恩布鲁格由父亲敲击酒桶判断酒的多少发明了扣诊法，仿生学利用生物的结构和功能原理来研制机械或各种新技术. 这些平凡而伟大的创意都源自类比.

什么是类比呢？数学家、数学教育家波利亚说过："类比就是一种相似."具体地说，**类比是一种推理形式，当已经建立两个对象在某些性质上的类似之处以后，可能（并非必定）推出它们在其他某些性质上的类似.**

这种推理形式的结构可以表示如下：

对象 A　有性质　P，Q，R，…，X

对象 B　有性质　P，Q，R，…

推测（猜想）：　B 可能也有性质 X

就拿分数和分式来说吧. 从表示形式和意义来看，分数的形式是 $\frac{a}{b}$（a、b 是整数，$b\neq 0$），它表示两个整数的商；分式的形式是 $\frac{A}{B}$（A、B 是整式，$B\neq 0$），它表示两个整式的商.

从基本性质来看，分数的分子、分母同乘以一个不等于零的数，分数的大小不变，它是分数约分和通分的依据；分式也有类似的基本性质，它是分式约分和通分的依据.

其他方面，从约分、通分到运算，甚至是最简分式与最简分数（既约分数）的概念，分式与分数都十分相似！

类比是我们学习数学的一种有效方法，我们还可以举出许多例子. 如学习整式时，常常可以和整数类比. 两个整数的和、差、积仍是整数，但两个整数的商却

华东师大版电子教材

未必是整数，从而需要引进分数；类似地，两个整式的和、差、积仍是整式，但两个整式的商未必是整式，从而需要引进分式. 整式的因式分解可以与整数的因数分解类比，等等.

类比能揭示自然界的奥秘，它是数学发现的重要方法. 但类比不具有证明的力量. 由类比得到的结论可能成立，也可能不成立，需要进一步研究，加以证明或反驳.

科学家将火星与地球作了类比，发现火星有很多与地球类似之处：火星是行星，围绕太阳运行，绕轴自转；火星上有大气层，空气成分很类似，一年中有四季的变更；火星上有水，大部分时间的温度适合地球上某些已知生物的生存. 地球上有生命存在，科学家推测：火星上也可能有生命存在！但事实究竟怎样，还需进一步的科学考证.

在数学学习时理解这一点也很重要. 例如，学习一元一次不等式，它的解法、步骤与解一元一次方程非常相似. 不等式与等式的性质也有类似的地方，但是不能全盘照搬，特别是不等式的两边同乘以一个负数时，不等号的方向要改变，在运用类比时应该引起注意.

华东师大版电子教材

16.3 可化为一元一次方程的分式方程

问题



轮船在顺水中航行 80 千米所需的时间和逆水中航行 60 千米所需的时间相同. 已知水流的速度是 3 千米/时，求轮船在静水中的速度.

分析

设轮船在静水中的速度为 x 千米/时，根据题意，得

$$\frac{80}{x+3}=\frac{60}{x-3}. \qquad (*)$$

概括

方程（$*$）中含有分式，并且分母中含有未知数，像这样的方程叫做**分式方程**.

思考

怎样解分式方程呢？有没有办法可以去掉分式方程中的分母，把它转化为整式方程呢？试动手解一解上面列出的方程（$*$）.

回顾一下解一元一次方程时是怎样去分母的，从中能否得到一点启发？

解 方程两边同乘以$(x+3)(x-3)$，约去分母，得

$$80(x-3)=60(x+3).$$

解这个整式方程，得

$$x=21.$$

由此可得问题的答案：轮船在静水中的速度为 21 千米/时.

华东师大版电子教材

概括

上述解分式方程的过程，实质上是将方程的两边都乘以同一个整式，约去分母，把分式方程转化为整式方程来解. 所乘的整式通常取方程中出现的各分式的最简公分母.

例 1 解方程：$\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{x^2-1}$.

解 方程两边同乘以(x^2-1)，约去分母，得

$$x+1=2.$$

解这个整式方程，得

$$x=1.$$

一元方程的解也称为方程的根.

解到这儿，我们能不能说 $x=1$ 就是原分式方程的解（或根）呢？细心的同学可能会发现，当 $x=1$ 时，原分式方程左边和右边的分母$(x-1)$与(x^2-1)都是 0，方程中出现的两个分式都没有意义，因此，$x=1$ 不是原分式方程的解，应当舍去. 所以原分式方程无解.

我们看到，在将分式方程变形为整式方程时，方程两边同乘以一个含有未知数的整式，并约去了分母，有时可能产生不适合原分式方程的解（或根），这种根通常称为**增根**. 因此，在解分式方程时必须进行检验.

解分式方程进行检验的关键是看所求得的整式方程的根是否使原分式方程中分式的分母为零. 有时为了简便起见，也可将它代入所乘的整式（即最简公分母），看它的值是否为零. 如果为零，即为增根. 如例 1 中的 $x=1$，代入 x^2-1，其值为 0，可知 $x=1$ 是原分式方程的增根.

华东师大版电子教材

有了上面的经验，我们再来完整地解一个分式方程.

例 2 解方程：$\dfrac{100}{x}=\dfrac{30}{x-7}$.

解 方程两边同乘以 $x(x-7)$，约去分母，得

$$100(x-7)=30x.$$

解这个整式方程，得

$$x=10.$$

检验：把 $x=10$ 代入 $x(x-7)$，得

$$10\times(10-7)\neq 0,$$

所以，$x=10$ 是原方程的解.

也可代入原方程检验，试试看.

例 3 用计算机处理数据，为了防止数据输入出错，某研究室安排两位程序操作员各输入一遍，比较两人的输入是否一致. 两人各输入 2 640 个数据，已知甲的输入速度是乙的 2 倍，结果甲比乙少用 2 小时输完. 这两个操作员每分钟各能输入多少个数据？



解 设乙每分钟能输入 x 个数据，则甲每分钟能输入 $2x$ 个数据，根据题意，得

$$\frac{2\,640}{2x}=\frac{2\,640}{x}-2\times 60.$$

解得 $x=11$.

经检验，$x=11$ 是原方程的解. 并且，当 $x=11$ 时，$2x=2\times 11=22$，所以乙用了 240 分钟，甲用了 120 分钟，甲比乙少用了 120 分钟，符合题意.

答：甲每分钟能输入 22 个数据，乙每分钟能输入 11 个数据.

华东师大版电子教材

练　习

1. 解方程：

(1) $\frac{4}{x-1}=1$；　　(2) $\frac{3}{x+1}=\frac{5}{x+3}$.

2. 解方程：

(1) $\frac{2}{x-1}=\frac{3}{2x+1}$；　　(2) $\frac{1}{x-2}+3=\frac{1-x}{2-x}$.

3. A 市与甲、乙两地的距离分别为 400 千米和 350 千米，从 A 市开往甲地列车的速度比从 A 市开往乙地列车的速度快 15 千米/时，结果从 A 市到甲、乙两地所需时间相同. 求从 A 市开往甲、乙两地列车的速度.

4. 试解决本章导图中提出的问题.

习题 16.3

1. 解方程：

(1) $\frac{2}{x}=\frac{3}{x+1}$；

(2) $\frac{x-1}{x-2}=\frac{1}{x-2}$；

(3) $\frac{x}{x-6}=\frac{x-2}{x-3}$；

(4) $\frac{2x}{2x+5}+\frac{5}{5x-2}=1$.

2. 供电局的电力维修工人要到 30 千米远的郊区进行电力抢修. 维修工人骑摩托车先走，15 分钟后，抢修车装载着所需材料出发，结果他们同时到达. 已知抢修车的速度是摩托车的 1.5 倍，求这两种车的速度.

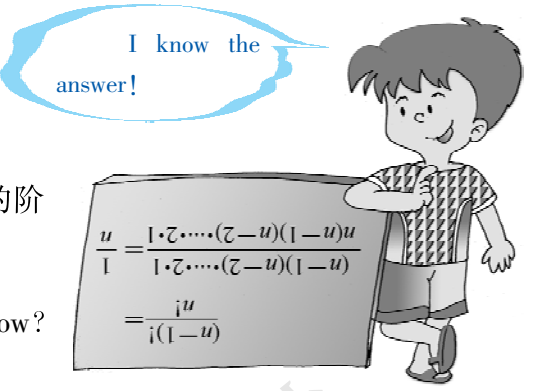
3. 甲、乙两地之间的高速公路全长 200 千米，比原来国道的长度减少了 20 千米. 高速公路通车后，某长途汽车的行驶速度提高了 45 千米/时，从甲地到乙地的行驶时间缩短了一半. 求该长途汽车在原来国道上行驶的速度.

华东师大版电子教材



The symbol 5! is called five factorial (5 的阶乘) and means $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Thus, $5! = 120$.

What is the result of $\frac{(n-1)!}{n!}$? Do you know?



16.4 零指数幂与负整数指数幂

1. 零指数幂与负整数指数幂

问题

在 12.1 节中介绍同底数幂的除法公式 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 时,有一个附加条件: $m > n$, 即被除数的指数大于除数的指数. 当被除数的指数不大于除数的指数,即 $m = n$ 或 $m < n$ 时,情况怎样呢?

探索

先考察被除数的指数等于除数的指数的情况. 例如下列算式:

$$5^2 \div 5^2,\ 10^3 \div 10^3,\ a^5 \div a^5 (a \neq 0).$$

为什么约定 $a \neq 0$?

一方面,如果仿照同底数幂的除法公式来计算,出现

华东师大版电子教材

这里出现了 5^0、10^0、a^0，怎样认识它们的含义？试根据除法的意义想一想.

$$5^2 \div 5^2 = 5^{2-2} = 5^0,$$
$$10^3 \div 10^3 = 10^{3-3} = 10^0,$$
$$a^5 \div a^5 = a^{5-5} = a^0 (a \neq 0).$$

另一方面，由于这几个式子的被除式等于除式，由除法的意义可知，所得的商都等于 1.

概括

由此启发，我们规定：

$$a^0 = 1 (a \neq 0).$$

这就是说：**任何不等于零的数的零次幂都等于 1.**

零的零次幂没有意义.

探索

我们再来考察被除数的指数小于除数的指数的情况，例如下列算式：

$$5^2 \div 5^5, \qquad 10^3 \div 10^7.$$

这里出现了 5^{-3}、10^{-4}，怎样认识它们的含义？直接算一算，想一想.

一方面，如果仿照同底数幂的除法公式来计算，出现

$$5^2 \div 5^5 = 5^{2-5} = 5^{-3},$$
$$10^3 \div 10^7 = 10^{3-7} = 10^{-4}.$$

另一方面，我们可以利用约分，直接算出这两个式子的结果为

$$5^2 \div 5^5 = \frac{5^2}{5^5} = \frac{5^2}{5^2 \times 5^3} = \frac{1}{5^3},$$
$$10^3 \div 10^7 = \frac{10^3}{10^7} = \frac{10^3}{10^3 \times 10^4} = \frac{1}{10^4}.$$

概括

由此启发，我们规定：

华东师大版电子教材

$$5^{-3}=\frac{1}{5^3},\ 10^{-4}=\frac{1}{10^4}.$$

一般地,我们规定

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}(a\neq 0,\ n\text{ 是正整数}).$$

这就是说,**任何不等于零的数的 $-n$(n 为正整数)次幂,等于这个数的 n 次幂的倒数.**

例 1 计算:

(1) 3^{-2};　　(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^0\times 10^{-1}$.

解 (1) $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$.

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^0\times 10^{-1}=1\times\frac{1}{10^1}=\frac{1}{10}$.

例 2 用小数表示下列各数:

(1) 10^{-4};　　(2) 2.1×10^{-5}.

解 (1) $10^{-4}=\frac{1}{10^4}=0.000\,1$.

(2) $2.1\times 10^{-5}=2.1\times\frac{1}{10^5}=2.1\times 0.000\,01$

$=0.000\,021$.

探索

我们知道,正整数指数幂有如下运算性质(12.1 节):

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;

(2) $a^m\div a^n=a^{m-n}(a\neq 0)$;

(3) $(a^m)^n=a^{mn}$;

(4) $(ab)^n=a^n\cdot b^n$.

上述各式中,m、n 都是正整数,在性质(2)中还要求 $m>n$.

华东师大版电子教材

现在，我们已经引进零指数幂和负整数指数幂，指数的范围扩大到了全体整数，上述幂的运算性质是否还成立呢？也就是说，以上这些性质中，原来的限制是否可以取消，只要 m、n 是整数就可以了呢？我们不妨取 m、n 的一些特殊值，来检验一下上述性质是否成立.

例如，取 $m = 2$，$n = -3$，我们来检验性质(1)：

$$a^m \cdot a^n = a^2 \cdot a^{-3} = a^2 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a},$$

而

$$a^{m+n} = a^{2+(-3)} = a^{-1} = \frac{1}{a},$$

所以，这时性质(1)成立.

再取几个 m、n 的值(其中至少有一个是负整数或零)试一试.

类似地，我们可以检验幂的其他运算性质的正确性. 请同学们自己试一试.

2. 科学记数法

在 2.12 节中，我们曾用科学记数法表示一些绝对值较大的数，即利用 10 的正整数指数幂，把一个绝对值较大的数表示成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 n 是正整数，$1 \leqslant |a| < 10$. 例如，864 000 可以写成 8.64×10^5.

类似地，我们可以利用 10 的负整数指数幂，用科学记数法表示一些绝对值较小的数，即将它们表示成 $a \times 10^{-n}$ 的形式，其中 n 是正整数，$1 \leqslant |a| < 10$. 例如，0.000 021 可以表示成 2.1×10^{-5}.

练　习

1. 计算：

(1) $(-0.1)^0$；　　(2) $\left(\frac{1}{2012}\right)^0$；

华东师大版电子教材

(3) 2^{-2};　　(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

2. 用 10 的负整数指数幂填空:

(1) 1 秒是 1 微秒的 1 000 000 倍,1 微秒 = _____秒;

(2) 1 毫克 = _____千克;

(3) 1 微米 = _____米;

(4) 1 纳米 = _____微米;

(5) 1 平方厘米 = _____平方米;

(6) 1 毫升 = _____立方米.

3. 用科学记数法表示下列各数:

(1) 0.000 03;　　(2) −0.000 006 4;

(3) 0.000 031 4;　　(4) 2 013 000.

4. 计算下列各式,并且把结果化为只含有正整数指数幂的形式:

(1) $(a^{-3})^2(ab^2)^{-3}$;　　(2) $(2mn^2)^{-2}(m^{-2}n^{-1})^{-3}$.

习题 16.4

1. 计算:

(1) $5^{10}\div 25^4$;　　(2) $(-117)^0$;

(3) 4^{-2};　　(4) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$.

2. 计算下列各式,要求在结果中不出现负整数指数幂:

(1) $(x^{-3}yz^{-2})^2$;

(2) $(a^3b^{-1})^{-2}(a^{-2}b^2)^2$;

(3) $(2m^2n^{-3})^3(-mn^{-2})^{-2}$.

3. 已知空气的单位体积质量是 0.001 239 g/cm^3,试用科学记数法表示该数.(单位仍用“g/cm^3”)

华东师大版电子教材

阅读材料

光年和纳米

在阅读报纸、杂志或科技书刊时，有时我们会看到“光年”、“纳米”这两个名称，你知道它们的含义吗？

光年(light year)是天文学中使用的长度单位，符号为 l. y.，主要用于计量太阳系外天体之间的距离. 1 光年是指光在真空中一年时间所走的距离，它可由速度(光速)和时间(一年)算出来：

真空中的光速为 $c = 299\,792.458$ 千米／秒，

1 年 $\approx 60 \times 60 \times 24 \times 365.25$(秒)，

故 1 光年 $\approx 299\,792.458 \times 60 \times 60 \times 24 \times 365.25$

$\approx 9.46 \times 10^{12}$(千米).

这就是说，一光年约等于 9.46 万亿千米.

离太阳最近的恒星(半人马座比邻星)与太阳的距离为 4.22 光年. 银河系的直径约为 10 万光年. 人类所观测的宇宙深度已达到 150 亿光年. 你能算出这些距离等于多少千米吗？从中你可以体会到用光年作单位的优越性.

光年用来计量非常大的距离，而纳米(nanometer)则是表示微小距离的单位，符号为 nm. 1 纳米 $=10^{-9}$ 米(即$\frac{1}{10^9}$米). 由于 1 米 $= 10^3$ 毫米，所以可以算出 1 纳米 $= 10^{-6}$ 毫米，它相当于 1 毫米的一百万分之一. 而 1 毫米相当于我们通常使用的刻度尺上的一小格，可想而知，1 纳米是多么的小.

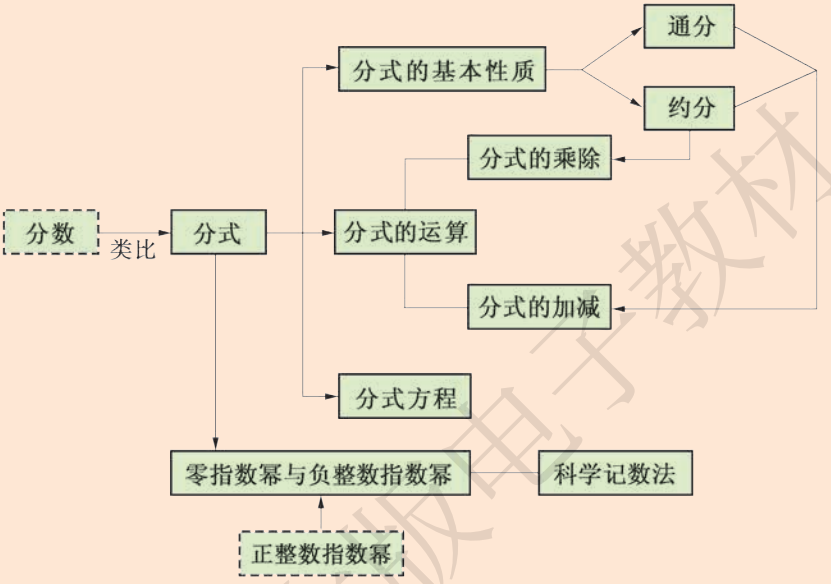
当粒子的大小处在 1～100 纳米范围内，可称为纳米粒子. 纳米粒子的尺寸小，表面积大，具有高度的活性. 因此，利用纳米粒子可制备活性极高的催化剂，在火箭固体燃料中掺入铝的纳米微粒，可提高燃烧效率. 利用铁磁纳米材料可制成磁性信用卡、磁性钥匙，以及高性能录像带等. 利用纳米材料等离子共振频率的可调性可制成隐形飞机的涂料. 纳米材料的表面积大，对外界环境(物理的和化学的)十分敏感，在制造传感器方面是有前途的材料，目前已开发出测量温度、热辐射和检测各种特定气体的传感器. 纳米材料在生物学和医学工程中也有重要应用.

纳米材料科学是 20 世纪 80 年代末诞生并正在崛起的科技新领域，它已成为人们普遍关注的一个科技热点.

华东师大版电子教材

小结

一、知识结构



二、要点

1. 分式的基本性质及分式的运算与分数的情形类似,在学习分式时,要注意与分数进行类比.

2. 解分式方程的基本思想是把含有未知数的分母去掉,将分式方程转化为整式方程来解. 这时可能会出现增根,必须进行检验. 要理解增根产生的原因,体会检验的必要性,并会进行检验.

3. 引进零指数幂与负整数指数幂后,幂的概念和运算性质扩充到了整数指数幂的范围. 有了负整数指数幂,绝对值较小的数也可以用科学记数法来表示.

华东师大版电子教材

复习题

A 组

1. 填空：

（1）某梨园 m 平方米产梨 n 千克，平均每平方米产梨_____千克；

（2）某工厂原计划 a 天完成 b 件产品，现在需要提前 n 天完成，每天要比原来多生产产品_____件；

（3）德国著名物理学家普朗克发现：能量子 $=h\times$ 频率. 这里的 h 被称为普朗克常数，约为 0.000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 663 焦·秒，用科学记数法可简洁地记为_____焦·秒；

（4）一种微粒的半径是 4×10^{-5} 米，用小数表示为_____米；

（5）一个纳米粒子的直径是 35 纳米，若用科学记数法表示，则为_____米.

2. 计算：

（1）$\left(-1\frac{1}{7}\right)^{0}$；　　（2）$0.01^{-1}$；

（3）5^{-2}；　　（4）$(-0.1)^{-2}$.

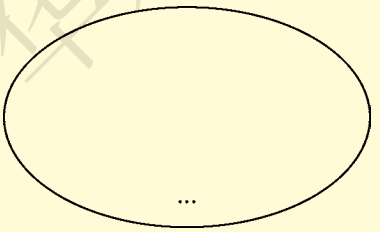
3. 用科学记数法表示下列各数：

（1）100 000；　　（2）0.000 01；

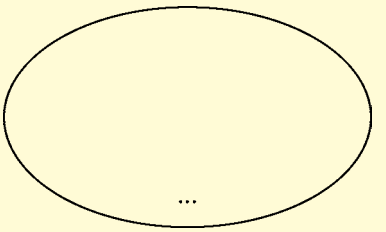
（3）$-112\,000$；　　（4）$-0.000\,112$.

4. 把下列各有理式分别填入相应的圈中：

$$\frac{1}{x^2},\quad \frac{1}{5}(x+y),\quad \frac{3}{-x},\quad 0,\quad \frac{a}{3},\quad \frac{ab}{2}+\frac{1}{c},\quad \frac{x}{2}+y.$$



整式



分式

5. 写出下列各等式中未知的分子或分母：

（1）$\frac{1-x^2}{(x+1)^2}=\frac{?}{x+1}$；　　（2）$\frac{?}{c^2+7c}=\frac{1}{c+7}$；

华东师大版电子教材

(3) $\frac{a-2}{?}=\frac{1}{2a+7}$;　　(4) $\frac{3x}{2x+3}=\frac{9x^2-6x}{?}$.

6. 约分：

(1) $\frac{ab}{2a^2}$;　　(2) $\frac{-3x^2y}{9xyz}$;

(3) $\frac{x^2-3}{2x^3-6x}$;　　(4) $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$.

7. 通分：

(1) $\frac{1}{ax}$, $\frac{1}{bx}$;　　(2) $\frac{b}{a-x}$, $\frac{c}{ay-xy}$;

(3) $\frac{2}{x+1}$, $\frac{3}{x+2}$;　　(4) $\frac{1}{2x+5}$, $\frac{2}{4x^2-25}$.

8. 计算：

(1) $\frac{xy(x+y)}{(x-y)^2}\cdot\frac{x-y}{xy+y^2}$;　　(2) $\left(\frac{y}{6x^2}\right)^2\div\left(-\frac{y^2}{4x}\right)^2$;

(3) $\frac{(a-b)^2}{ab}-\frac{a^2-b^2}{ab}$;　　(4) $\frac{3}{a-1}-\frac{2}{2-a}$.

9. 解下列分式方程：

(1) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$;　　(2) $\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x-2}$;

(3) $\frac{1}{x^2+5x-6}=\frac{1}{x^2+x+6}$.

10. 某校 n 名学生参加市法律知识竞赛，他们的成绩分别为 a_1, a_2, …, a_n，这 n 名学生的平均成绩为多少？

11. 甲、乙两辆汽车分别从 A、B 两城同时沿高速公路驶向 C 城. 已知 A、C 两城的路程为 450 千米，B、C 两城的路程为 400 千米，甲车比乙车的速度快 10 千米/时，结果两辆车同时到达 C 城. 求两车的速度.

B 组

12. 计算：

(1) $\frac{a^2}{a-b}-a-b$;　　(2) $\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^2\div\frac{x-1}{x+1}$;

北京师大版电子教材

(3) $\dfrac{2ab}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{2bc}{(a-b)(c-a)}$;　　(4) $\left(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}\right)\div\dfrac{xy}{x^2-y^2}$.

13. 某服装制造厂要在开学前赶制 3000 套校服，为了尽快完成任务，厂领导合理调配，加强第一线人力，使每天完成的校服比原计划多了 20%，结果提前 4 天完成任务. 问原计划每天能完成多少套校服？

14. 一辆货车送货上山，并按原路下山. 上山速度为 a 千米/时，下山速度为 b 千米/时. 求货车上、下山的平均速度.

C 组

15. (1) 已知 $a+\dfrac{1}{a}=2$，求 $a^2+\dfrac{1}{a^2}$的值；

(2) 已知 $a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{3}{2}$，求 $a^2+\dfrac{1}{a^2}$的值.

16. 观察下面依次排列的一串单项式：

$$x,\ -2x^2,\ 4x^3,\ -8x^4,\ 16x^5,\cdots$$

(1) 从第二个单项式起，计算每一个单项式与它前面的单项式的商，你有什么发现？

(2) 如果按你发现的规律继续写下去，第 10 个单项式是什么？

华东师大版电子教材

第17章　函数及其图象



大千世界处在不停的运动变化中，如何来研究这些运动变化规律呢？数学上常用变量与函数来刻画各种运动变化.

这一章我们将学习有关函数及其图象的初步知识，并研究两类常见的函数——一次函数和反比例函数. ▶▶▶

17.1 变量与函数

问题 1

图 17.1.1 是某地一天内的气温变化图.

这张图告诉我们哪些信息?

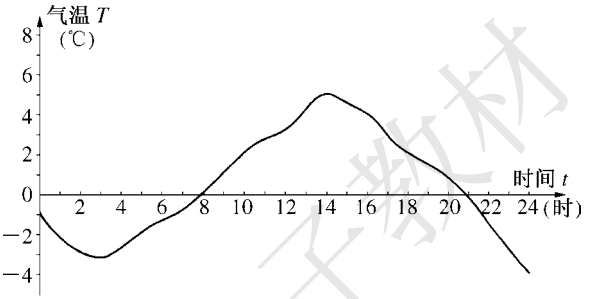


图 17.1.1

看图回答:

(1) 这天的 6 时、10 时和 14 时的气温分别为多少?任意给出这天中的某一时刻,说出这一时刻的气温.

(2) 这一天中,最高气温是多少?最低气温是多少?

(3) 这一天中,什么时段的气温在逐渐升高?什么时段的气温在逐渐降低?

这张图展示了各时刻的气温,并可看出一天的气温变化规律.

从图中我们可以看到,随着时间 t(时)的变化,气温 T(℃)也随之变化.

问题 2

小蕾在过 14 岁生日的时候,看到了爸爸为她记录的各周岁时的体重,如下表:

周岁	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
体重(kg)	7.9	12.2	15.6	18.4	20.7	23.0	25.6	28.5	31.2	34.0	37.6	41.2	44.9

观察上表,说一说随着年龄的增长,小蕾的体重是如何变化的?在哪一段时间内体重增加较快?

华东师大版电子教材

问题 3

收音机刻度盘上的波长和频率分别是用米(m)和千赫兹(kHz)为单位标刻的. 下面是一些对应的数值:

波长 λ(m)	300	500	600	1 000	1 500
频率 f(kHz)	1 000	600	500	300	200

细心的同学可能会发现:每一列 λ 与 f 的对应值的乘积是一个定值,即

$$\lambda f = 300\,000,$$

或者说

$$f = \frac{300\,000}{\lambda}.$$

可以看出:波长 λ 越大,频率 f 就_____.

问题 4

圆的面积随着半径的增大而增大. 如果用 r 表示圆的半径,S 表示圆的面积,则 S 与 r 之间满足下列关系:

$S =$ _____.

利用这个关系式,试求出半径为 1 cm、1.5 cm、2 cm、2.6 cm、3.2 cm 时圆的面积,并将结果填入下表:

半径 r(cm)	1	1.5	2	2.6	3.2	…
圆面积 S(cm^2)						…

概括

在上面的问题中,我们研究了一些数量关系,它们都

华东师大版电子教材

在其他三个问题中，有哪些变量？

刻画了某些变化规律. 这里出现了各种各样的量，特别值得注意的是出现了一些数值会发生变化的量. 例如问题 1 中，刻画气温变化规律的量是时间 t 和气温 T，气温 T 随着时间 t 的变化而变化，它们可以取不同的数值. 像这样在某一变化过程中，可以取不同数值的量，叫做**变量**(variable).

试说出上面四个问题中的自变量与因变量.

上面各个问题中，都出现了两个变量，它们互相依赖，密切相关. 一般地，如果在一个变化过程中，有两个变量，例如 x 和 y，对于 x 的每一个值，y 都有唯一的值与之对应，我们就说 x 是**自变量**(independent variable)，y 是**因变量**(dependent variable)，此时也称 y 是 x 的**函数**(function).

表示函数关系的方法通常有三种：

(1) 解析法. 如问题 3 中的 $f=\dfrac{300\ 000}{\lambda}$，问题 4 中的 $S=\pi r^2$，函数关系是用表达式表示的，它们又称函数关系式；

(2) 列表法. 如问题 2 中小蕾的体重表，问题 3 中波长与频率的关系表；

(3) 图象法. 如图 17.1.1 中的气温曲线.

在问题的研究过程中，还有一种量，它的取值始终保持不变，我们称之为**常量**(constant). 如问题 3 中的 300 000，问题 4 中的 π 等都是常量.

在研究函数时，必须注意自变量的取值范围. 实际问题中，自变量的取值必须符合实际意义. 例如，上述问题 4 中，自变量 r 表示圆的半径，不能为负数和零，即它的取值范围为一切正实数.

练　习

1. 举出 3 个日常生活中遇到的变量与函数的例子.

2. 下表是某城市 2012 年统计的中小学男学生各年龄组的平均身高：

年龄组(岁)	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
平均身高(cm)	117	121	125	130	135	142	148	155	162	167	170	172

华东师大版电子教材

观察此表，回答下列问题：

（1）该市 14 岁男学生的平均身高是多少？

（2）该市男学生的平均身高从哪一岁开始增加特别迅速？

（3）这里反映了哪些变量之间的关系？其中哪个是自变量？哪个是因变量？

3. 写出下列各问题中的函数关系式，并指出自变量的取值范围：

（1）圆的周长 C 是半径 r 的函数；

（2）火车以 60 千米/时的速度行驶，它驶过的路程 s（千米）是所用时间 t（时）的函数；

（3）n 边形内角和的度数 S 是边数 n 的函数.

试一试

（1）填写如图 17.1.2 所示的 10 以内正整数的加法表，然后把所有填有 10 的格子涂黑，看看你能发现什么？

（2）如果把这些涂黑的格子横向的加数用 x 表示，纵向的加数用 y 表示，y 是 x 的函数，试写出这个函数关系式.

（3）当涂黑的格子横向的加数为 3 时，纵向的加数是多少？当纵向的加数为 6 时，横向的加数是多少？

9									
8									
7									
6									
5									
4		6							
3									
2			5						
1	2								
+	1	2	3	4	5	6	7	8	9

图 17.1.2

例 1 等腰三角形顶角的度数 y 是底角度数 x 的函数，试写出这个函数关系式，并求出自变量 x 的取值范围.

解 根据等腰三角形的性质和三角形内角和定理，可知

$$2x + y = 180,$$

有

$$y = 180 - 2x.$$

由于等腰三角形的底角只能是锐角，所以自变量的取值范围是 $0 < x < 90$.

华东师大版电子教材

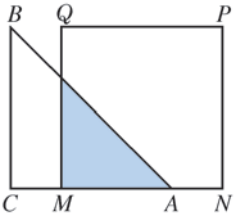


图 17.1.3

例 2 如图 17.1.3，已知等腰直角三角形 ABC 的直角边长与正方形 $MNPQ$ 的边长均为 10 cm，CA 与 MN 在同一条直线上，开始时点 A 与点 M 重合，让 $\triangle ABC$ 向右移动，最后点 A 与点 N 重合.

（1）试写出两图形重叠部分的面积 $y(\text{cm}^2)$ 与线段 MA 的长度 $x(\text{cm})$ 之间的函数关系式.

（2）当点 A 向右移动 1 cm 时，重叠部分的面积是多少？

这里自变量 x 的取值范围是什么？

解 （1）重叠部分的面积 y 与线段 MA 的长度 x 之间的函数关系式为

$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

可以这样说：当自变量 $x = 1$ 时，函数值 $y = \frac{1}{2}$.

（2）点 A 向右移动 1 cm，即 $x = 1$.

当 $x = 1$ 时，$y = \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}$.

所以当点 A 向右移动 1 cm 时，重叠部分的面积是 $\frac{1}{2}\ \text{cm}^2$.

练　习

1. 当 $x = -2$ 和 $x = 3$ 时，分别求出下列函数的函数值：

（1）$y = \frac{5x + 7}{2}$；　　（2）$y = x^2 - x - 2$.

2. 分别写出下列各问题中的函数关系式及自变量的取值范围：

（1）某地民用电费标准为每度 0.50 元，电费 y（元）是用电度数 x 的函数；

（2）已知等腰三角形的面积为 20 cm^2，设它的底边长为 x（cm），底边上的高 y（cm）是 x 的函数；

（3）在一个半径为 10 cm 的圆形纸片中剪去一个半径为 r（cm）的同心圆，得到一个圆环，设圆环的面积为 $S(\text{cm}^2)$，S 是 r 的函数.

3. 一架雪橇沿一斜坡滑下，经过时间 t（秒）滑下的路程 s（米）由下式给出：$s = 10t + 2t^2$. 假如从坡顶滑到坡底的时间为 8 秒，试问坡长为多少？

华东师大版电子教材

习题 17.1

1. 分别写出下列各函数的关系式，并指出自变量的取值范围：

（1）三角形的一边长为 5 cm，它的面积 $S(\text{cm}^2)$ 是这边上的高 $h(\text{cm})$ 的函数；

（2）设直角三角形中一个锐角的度数为 α，另一个锐角的度数 β 是 α 的函数；

（3）某种报纸的单价为 1.50 元，购买这种报纸 x 份的总价 y（元）是 x 的函数.

2. 分别写出下列各问题中的函数关系式，并指出自变量的取值范围：

（1）一个正方形的边长为 3 cm，它的边长减少 x cm 后，得到的新正方形周长为 y cm，y 是 x 的函数；

（2）寄一封重量在 20 克以内的市内平信，需邮资 0.80 元，寄 n 封这样的信所需邮资 y（元）是 n 的函数；

（3）长方形的周长为 12 cm，它的面积 $S(\text{cm}^2)$ 是它的一条边长 $x(\text{cm})$ 的函数.

3. 当 $x = 2$ 及 $x = -3$ 时，分别求出下列函数的函数值：

（1）$y = (x + 1)(x - 2)$；

（2）$y = 2x^2 - 3x + 2$；

（3）$y = \dfrac{x + 2}{x - 1}$.

4. 填写如图所示的 10 以内正整数的乘法表，然后把所有填有 24 的格子涂黑. 若用 x 表示涂黑的格子横向的乘数，y 表示涂黑的格子纵向的乘数，试写出 y 与 x 之间的函数关系式.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9									
8									
7									
6									
5									
4									
3		6							
2				8					
1									

（第 4 题）

华东师大版电子教材

17.2 函数的图象

由 17.1 节的问题 1，我们知道，气温变化图可以直观地表示出不同时刻的气温，反映出气温变化的规律.

一般地，函数常常可以用它的图象来表示，利用函数的图象可以帮助我们直观地研究函数. 那么，什么是函数的图象？怎样画出函数的图象呢？这一节我们将对此作一些初步的研究. 为此，先学习一个非常有用的工具——平面直角坐标系.

1. 平面直角坐标系

回忆

你去过电影院吗？还记得在电影院里是怎么找座位的吗？



图 17.2.1

如图 17.2.1，因为电影票上都标有“×排×座”的字样，所以找座位时，先找到第几排，再找到这一排的第几座就可以了. 也就是说，电影院里的座位完全可以由两个数确定下来.

在数学中，我们可以用一对有序实数来确定平面上点的位置. 为此，在平面上画两条原点重合、互相垂直且具有相同单位长度的数轴（图 17.2.2），这就建立了平面**直角坐标系**（rectangular coordinates system）*. 通常把其中水平的数轴叫做 x 轴或横轴，取向右为正方向；铅直的数轴叫做 y 轴或纵轴，取向上为正方向；两条数轴的交点 O 叫做坐标原点.

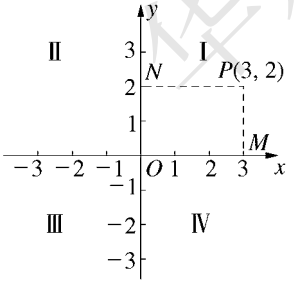


图 17.2.2

* 为了纪念法国数学家笛卡儿（René Descartes，1596－1650），通常称为“笛卡儿直角坐标系”.

在平面直角坐标系中，任意一点都可以用一对有序实数来表示. 例如，图 17. 2. 2 中的点 P，从点 P 分别向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足分别为点 M 和点 N. 这时，点 M 在 x 轴上对应的数为 3，称为点 P 的**横坐标**(abscissa)；点 N 在 y 轴上对应的数为 2，称为点 P 的**纵坐标**(ordinate). 依次写出点 P 的横坐标和纵坐标，得到一对有序实数 $(3, 2)$，称为点 P 的**坐标**(coordinate). 这时点 P 可记作 $P(3, 2)$.

在平面直角坐标系中，两条坐标轴把平面分成如图 17. 2. 2 所示的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四个区域，分别称为第一、二、三、四象限. 坐标轴上的点不属于任何一个象限.

试一试

1. 在图 17. 2. 2 中分别描出坐标是 $(2, 3)$、$(-2, 3)$、$(3, -2)$ 的点 Q、S、R，$Q(2, 3)$ 与 $P(3, 2)$ 是同一个点吗？$S(-2, 3)$ 与 $R(3, -2)$ 是同一个点吗？

2. 写出图 17. 2. 3 中的点 A、B、C、D、E、F 的坐标. 观察你所写出的这些点的坐标，思考：

(1) 在四个象限内的点的坐标各有什么特征？

(2) 两条坐标轴上的点的坐标各有什么特征？

这里得到的结果告诉我们什么？

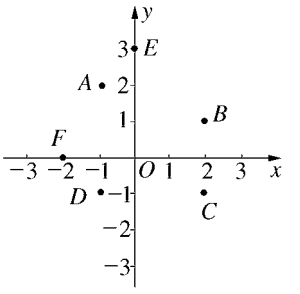


图 17. 2. 3

思考

我们知道，数轴上的点和全体实数是一一对应的. 上面的“试一试”也给我们这样的启发：平面直角坐标系中的点和有序实数对也是一一对应的. 你能说出这句话的含义吗？

练　习

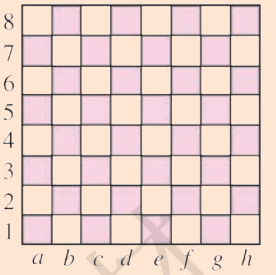
1. 在平面直角坐标系中描出点 $A(2, -3)$，分别找出它关于 x 轴、y 轴及原点的对称点，并写出这些点的坐标.

北京师大出版集团电子教材

2. 观察你在第 1 题中写出的各点的坐标，能否发现：关于 x 轴对称的两点的坐标之间有什么关系？关于 y 轴对称的两点的坐标之间有什么关系？关于原点对称的两点的坐标之间又有什么关系？

3. 在如图所示的国际象棋棋盘中，双方四只马的位置分别是点 $A(b, 3)$、$B(d, 5)$、$C(f, 7)$、$D(h, 2)$，请在图中描出它们的位置.

4. 你用过计算机中的画图软件吗？当你的鼠标在空白的工作区移动时，状态栏上就会显示两个变化的数字，这实际上就是你的鼠标的“坐标”. 你还能举出一些日常生活中的坐标的例子吗？



（第 3 题）

2. 函数的图象

回顾

在 17.1 节的问题 1 中，我们曾经从图 17.1.1 的气温曲线上获得许多信息，回答了一些问题. 现在让我们来回顾一下，作一些理性的思考. 先考虑一个简单的问题：你是如何在图中找到各个时刻的气温的？

“早上 6 点的气温是零下 1℃”，在图中体现在哪里？

图 17.1.1 中，有一个平面直角坐标系，它的横轴是 t 轴，表示时间；它的纵轴是 T 轴，表示气温. 这一气温曲线实际上给出了某日的气温 T（℃）与时刻 t（时）之间的函数关系. 例如，上午 10 时的气温是 2℃，表现在气温曲线上，就是可以找到这样的对应点，它的坐标是 $(10, 2)$. 实质上也就是说，当 $t = 10$ 时，对应的函数值 $T = 2$. 气温曲线上每一个点的坐标 (t, T)，表示时刻为 t（时）的气温是 T（℃）.

气温曲线是用图象表示函数的一个实际例子. 那么，什么是函数的图象呢？

华东师大版电子教材

概括

一般来说，函数的图象是由平面直角坐标系中一系列的点组成的. 图象上每一点的坐标(x, y)代表了函数的一对对应值，它的横坐标x表示自变量的某一个值，纵坐标y表示与该自变量对应的函数值.

例1 画出函数$y = \frac{1}{2}x^2$的图象.

分析 要画出一个函数的图象，关键是要画出图象上的一些点，为此，首先在自变量的取值范围内，适当取一些自变量的值，并求出对应的函数值.

解 取自变量x的一些值，例如$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$，计算出对应的函数值. 为表达方便，可列表如下：

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	$\cdots$

由这一系列的对应值，可以得到一系列的有序实数对：

$\cdots, (-3, 4.5), (-2, 2), (-1, 0.5), (0, 0), (1, 0.5), (2, 2), (3, 4.5), \cdots$

在平面直角坐标系中，描出这些有序实数对（坐标）的对应点，如图17.2.4所示.

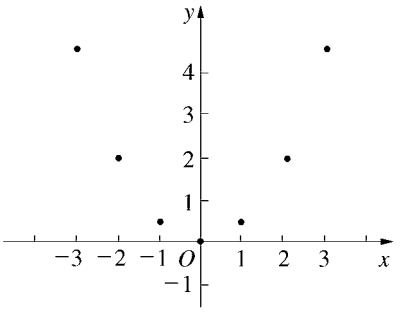


图17.2.4

再多算一些对应值，增补一些对应点，你能发现什么？是不是这些点好像逐渐“连”起来了？

华东师大版电子教材

通常，用光滑曲线依次把这些点连起来，便可得到这个函数的图象，如图 17.2.5 所示.

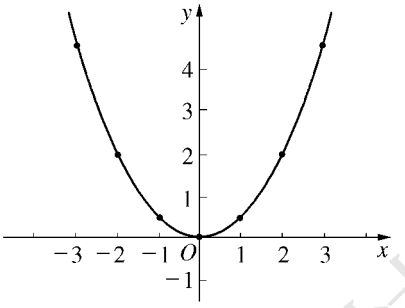


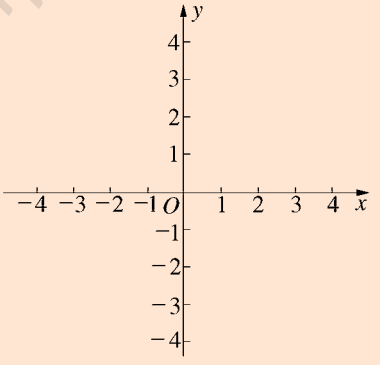
图 17.2.5

这里画函数图象的方法，可以概括为列表、描点、连线三步，通常称为描点法.

练　习

1. 在所给的平面直角坐标系中画出函数 $y=\frac{1}{2}x$ 的图象.（先填写下表，再描点、连线）

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…								…



（第 1 题）

2. 画出函数 $y=-\frac{6}{x}$ 的图象.

华东师大版电子教材

例 2 王教授和孙子小强经常一起进行早锻炼，主要活动是爬山. 有一天，小强让爷爷先上山，然后追赶爷爷，两人都爬上了山顶. 图 17.2.6 中的两条线段分别表示小强和爷爷离开山脚的距离 y（米）与爬山所用时间 x（分）之间的函数关系（从小强开始爬山时计时），看图回答下列问题：

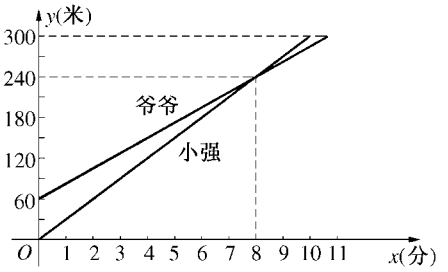


图 17.2.6

为了表达的方便，这里平面直角坐标系的横轴和纵轴上取的单位长度不一致，这不影响对问题的表达和理解.

（1）小强让爷爷先上山多少米？

（2）山顶离山脚的距离有多少米？谁先爬上山顶？

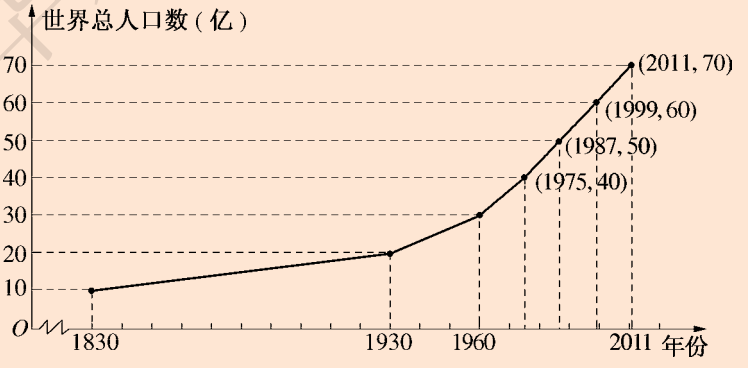
（3）小强何时赶上爷爷？这时距山脚的距离是多少？

练　习

1. 下图为世界总人口数的变化图. 根据图象回答：

（1）从 1830 年到 2011 年，世界总人口数呈怎样的变化趋势？

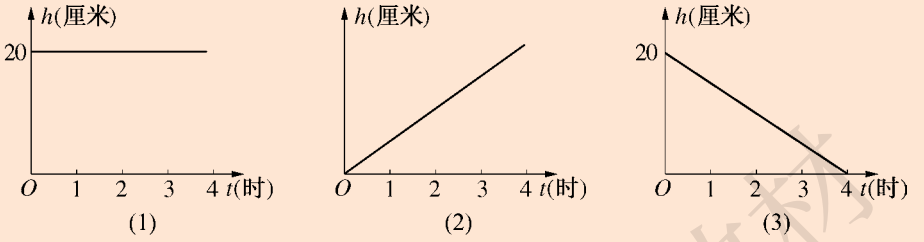
（2）哪段时间世界总人口数变化较快？



（第 1 题）

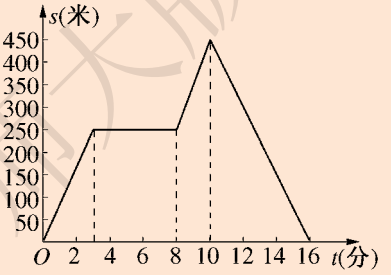
华东师大版电子教材

2. 一支蜡烛长 20 厘米，点燃后每小时燃烧掉 5 厘米，下列 3 幅图象中，哪幅能大致刻画出这支蜡烛点燃后剩下的长度 h（厘米）与点燃时间 t（时）之间的函数关系？



（第 2 题）

3. 小明从家里出发，外出散步，到一个公共阅报栏前看了一会儿报后，继续散步了一段时间，然后回家. 下图描述了小明在散步过程中离家的距离 s（米）与散步所用时间 t（分）之间的函数关系. 你能根据图象说出小明散步过程中的一些具体信息吗？



（第 3 题）

可要注意自变量的取值范围哟！

试一试

画出 17.1 节例 2(1) 中函数的图象，并结合图象指出重叠部分面积的最大值.

华东师大版电子教材

习题 17.2

1. 判断下列说法是否正确：

（1）点(2，3)和点(3，2)表示同一个点；

（2）点(－4，1)与点(4，－1)关于原点对称；

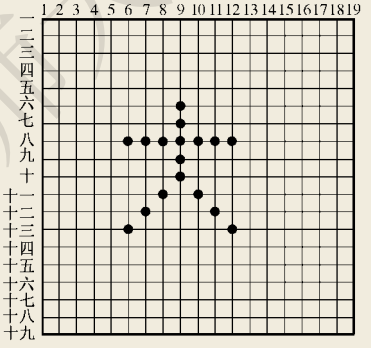
（3）坐标轴上的点的横坐标和纵坐标至少有一个为0；

（4）第一象限内的点的横坐标与纵坐标均为正数.

2. 在平面直角坐标系中描出下列各点，顺次用线段将这些点连起来，并将最后一个点与第一个点连起来，看看得到的是什么图形？

$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$，$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$，$\left(-3\frac{1}{2}, 1\right)$，$\left(-1\frac{1}{2}, 3\right)$，$\left(-2\frac{1}{2}, 3\right)$，$\left(-\frac{1}{2}, 6\right)$，$(-1, 6)$，$(0, 8)$，$(1, 6)$，$\left(\frac{1}{2}, 6\right)$，$\left(2\frac{1}{2}, 3\right)$，$\left(1\frac{1}{2}, 3\right)$，$\left(3\frac{1}{2}, 1\right)$，$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$，$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

3. 下图是一个围棋棋盘，我们可以用类似于平面直角坐标系的方法表示各个棋子的位置. 例如，图中右下角那个棋子的位置可以表示为(12，十三). 请写出图中几个棋子的“位置”(至少写出四个).



（第3题）

4. 画出下列函数的图象，并判断大括号内各点是否在该函数的图象上：

（1）$y = 3x - 1$，$\{(0, -1), (-2, -7), (1, -2), (2.5, 6.5)\}$；

（2）$y = \frac{2}{x+1}\ (x \geqslant 0)$，$\left\{(0, 2), \left(2, \frac{2}{3}\right), (3, 1)\right\}$.

5. 已知等腰三角形的周长为12 cm，底边长y(cm)是腰长x(cm)的函数.

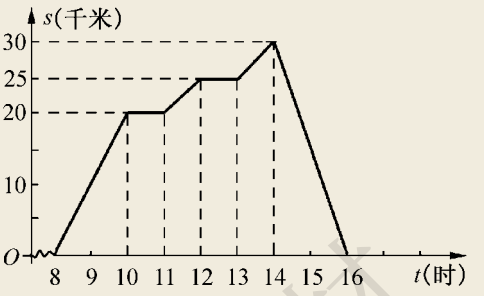
（1）写出这个函数关系式；

华东师大版电子教材

（2）求自变量 x 的取值范围；

（3）画出这个函数的图象.

6. 周末，小李 8 时骑自行车从家里出发，到野外郊游，16 时回到家里. 他离家的距离 s（千米）与时间 t（时）之间的函数关系可以用图中的折线表示. 根据图象回答下列问题：



（第 6 题）

（1）小李到达离家最远的地方是什么时间？

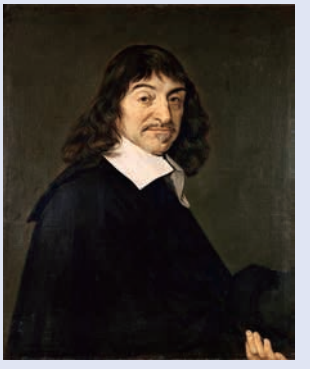
（2）小李何时第一次休息？

（3）11 时到 12 时，小李骑了多少千米？

（4）返回时，小李的平均车速是多少？

阅读材料

笛卡儿的故事



直角坐标系，通常称为笛卡儿直角坐标系，它是以法国哲学家、数学家和自然科学家笛卡儿的名字命名的.

笛卡儿从小就喜爱沉思默想，寻根问底. 他的父亲很懂得儿童教育法，针对这一特点，常让笛卡儿随自己的心意去学习，不加任何限制.

1612 年，笛卡儿以优异的成绩从中学毕业，同年秋天，来到普瓦捷大学攻读法律. 四年以后，又以优异的成绩获得学位和律师资格. 当时，他对学校所学知识的贫乏已经感到极不耐烦，于是，他决定迈开双脚，去阅读世界这本大书，开始了他的军旅生活.

笛卡儿首先来到荷兰. 有一天，他看见许多人正盯着城墙上一块告示牌子议论纷纷. 笛卡儿请身旁的一位长者把告示上的荷兰文译成法文或拉丁文. 原来，这是一道数学难题，谁要是答出来，就可以得到一笔奖金，还将被授予“布雷达数

华东师大版电子教材

学家”的荣誉称号. 两天以后,笛卡儿带来了正确的解答,使那位长者大为惊讶. 在交谈中,笛卡儿才知道,这位长者是当时颇有名气的多特大学校长贝克曼. 从此,他俩一起讨论科学问题,贝克曼向笛卡儿介绍数学的最新进展,给了他许多有待研究的问题. 笛卡儿从这次成功中看到了自己的数学才能,激起了钻研数学的兴趣.

笛卡儿 1621 年回到巴黎,1628 年为避开俗事而移居荷兰,专心从事研究和写作,1649 年应瑞典女王克丽斯蒂娜的邀请来到斯德哥尔摩任教,次年因病逝世.

笛卡儿首先导入运动着的点的坐标概念,使用代数的方法研究几何,创立了解析几何,使数学发生了划时代的变化. “笛卡儿的变数”被革命导师恩格斯誉为“数学中的转折点”.

由于笛卡儿的哲学和数学思想影响日益深远,法国政府在 1767 年将他的骨灰迎回国内,在他的墓碑上镌刻着:笛卡儿,欧洲文艺复兴以来,第一个为人类争取并保证理性权利的人.

17.3 一次函数

1. 一次函数

问题 1

小明暑假第一次去北京. 汽车驶上 A 地的高速公路后,小明观察里程碑,发现汽车的速度是 95 千米/时. 已知 A 地直达北京的高速公路全程为 570 千米,小明想知道汽车从 A 地驶出后,距北京的路程和汽车在高速公路上行驶的时间有什么关系,以便根据时间估计自己距北京的路程.



华东师大版电子教材

分析 汽车距北京的路程随着行车时间的变化而变化. 要想找出这两个变化着的量之间的关系,并据此得出相应的值,显然,应该探究这两个变量之间的函数关系式. 为此,我们设汽车在高速公路上的行驶时间为 t 小时,汽车距北京的路程为 s 千米,则不难得到 s 与 t 之间的函数关系式:

$$s = 570 - 95t. \tag{1}$$

先找出问题中的变量并用字母表示,再探求变量之间的函数关系式.

问题 2



弹簧下端悬挂重物,弹簧会伸长. 弹簧的长度 y(厘米)是所挂重物质量 x(千克)的函数. 已知一根弹簧在不挂重物时长 6 厘米. 在一定的弹性限度内,每挂 1 千克重物弹簧伸长 0.3 厘米. 求这个函数关系式.

解 因为每挂 1 千克重物弹簧伸长 0.3 厘米,所以挂 x 千克重物时弹簧伸长 $0.3x$ 厘米. 又因不挂重物时弹簧的长度为 6 厘米,所以挂 x 千克重物时弹簧的长度为 $(0.3x + 6)$ 厘米,即有

$$y = 0.3x + 6. \tag{2}$$

这就是所求的函数关系式. (其中自变量 x 的取值范围由问题的“弹性限度”确定)

问题 1、2 中得到的两个函数关系式(1)、(2)有什么共同点?

概括

上述函数的关系式都是用自变量的一次整式表示的,我们称它们为**一次函数**(linear function).

一次函数通常可以表示为 $y = kx + b$ 的形式,其中 k、b 是常数,$k \neq 0$.

特别地,当 $b = 0$ 时,一次函数 $y = kx$(常数 $k \neq 0$)也叫做**正比例函数**(direct proportional function).

问题 1、2 中得到的函数,都是一次函数.

华东师大版电子教材

思考

前两节所看到的函数中，哪些是一次函数？

练　习

1. 仓库内原有粉笔 400 盒. 如果每个星期领出 36 盒，求仓库内余下的粉笔盒数 Q 与星期数 t 之间的函数关系式.
2. 今年植树节，同学们种的树苗高约 1.80 米. 据介绍，这种树苗在 10 年内每年长高约 0.35 米. 求树高（米）与年数之间的函数关系式，并算一算 4 年后这些树约有多高.



（第 2 题）

3. 小徐的爸爸为小徐存了一份教育储蓄. 首次存入 1 万元，以后每个月存入 500 元，存满 3 万元为止. 试用函数关系式刻画存款增长的规律，并求几个月后可存满全额？
4. 以上 3 道题中的函数都是一次函数吗？为什么？

2. 一次函数的图象

前面，我们已经学习了用描点法画函数的图象，也知道通常可以结合图象研究函数的性质和应用. 那么，一次函数的图象是什么形状呢？

做一做

在同一个平面直角坐标系中画出下列函数的图象：

（1）$y = \frac{1}{2}x$；　　（2）$y = \frac{1}{2}x + 2$；

（3）$y = 3x$；　　（4）$y = 3x + 2$.

观察所画出的这些一次函数的图象，你能发现什么？

华东师大版电子教材

几个点可以确定一条直线？画一次函数的图象时，只需要取几个点？

概括

一次函数 $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ 的图象是一条直线. 通常也称为直线 $y = kx + b$. 特别地，正比例函数 $y = kx$ $(k \neq 0)$ 的图象是经过原点$(0, 0)$的一条直线.

讨论

观察“做一做”中画出的四个一次函数的图象，比较下列各对一次函数的图象有什么共同点，有什么不同点：

(1) $y = 3x$ 与 $y = 3x + 2$；

(2) $y = \frac{1}{2}x$ 与 $y = \frac{1}{2}x + 2$；

(3) $y = 3x + 2$ 与 $y = \frac{1}{2}x + 2$.

能否从中发现一些规律？对于直线 $y = kx + b$ (k、b 是常数，$k \neq 0$)，常数 k 和 b 的取值对于直线的位置各有什么影响？

我们可以发现，两个一次函数，当系数 k 相同，b 不相同时(如 $y = 3x$ 与 $y = 3x + 2$)，有

共同点：_____；

不同点：_____.

而当 b 相同，k 不相同时 $\left(\text{如 } y = 3x + 2 \text{ 与 } y = \frac{1}{2}x + 2\right)$，有

共同点：_____；

不同点：_____.

例 1 分别在同一个平面直角坐标系中画出下列函数的图象：

(1) $y = 2x$ 与 $y = 2x + 3$；

(2) $y = 2x + 1$ 与 $y = \frac{1}{2}x + 1$.

华东师大版电子教材

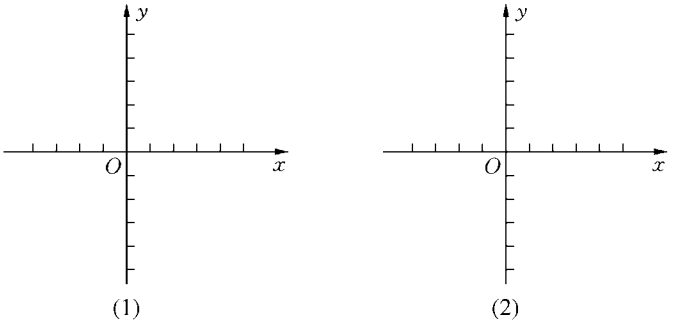


图 17.3.1

画一次函数的图象时，你取的是哪两个点？怎样取比较简便？

练　习

1. 在同一个平面直角坐标系中画出下列函数的图象，并说出它们有什么关系：

（1）$y = -2x$；　　（2）$y = -2x - 4$.

2. 填空：

（1）将直线 $y = 3x$ 向下平移 2 个单位，得到直线_____；

（2）将直线 $y = -x - 5$ 向上平移 5 个单位，得到直线_____.

例 2　求直线 $y = -2x - 3$ 与 x 轴和 y 轴的交点，并画出这条直线.

解　x 轴上的点的纵坐标等于 0，y 轴上的点的横坐标等于 0. 交点同时在直线 $y = -2x - 3$ 上，它的坐标 (x, y) 应满足 $y = -2x - 3$. 于是，由 $y = 0$ 可求得 $x = -1.5$，点 $(-1.5, 0)$ 就是直线与 x 轴的交点；由 $x = 0$ 可求得 $y = -3$，点 $(0, -3)$ 就是直线与 y 轴的交点.

如图 17.3.2，过点 $(-1.5, 0)$ 和点 $(0, -3)$ 作直线，就是所求的直线 $y = -2x - 3$.

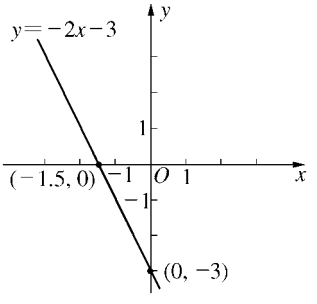


图 17.3.2

这里是取哪两个特殊点来作直线的？有什么好处？

华东师大版电子教材

例 3 问题 1 中，汽车距北京的路程 s（千米）与汽车在高速公路上行驶的时间 t（时）之间的函数关系式是 $s = 570 - 95t$，试画出这个函数的图象.

分析 在实际问题中，我们可以在表示时间的 t 轴和表示路程的 s 轴上分别选取适当的单位长度，画出平面直角坐标系，如图 17.3.3 所示.

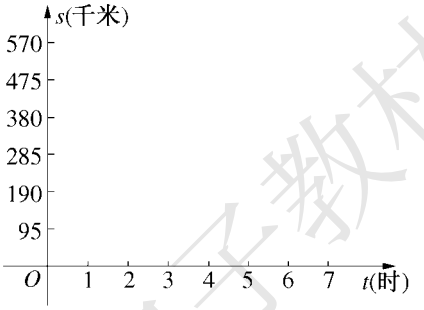


图 17.3.3

这里的图象是直线的一部分（一条线段），线段的两个端点反映怎样的实际情境？

画出这个函数的图象，并讨论：

这里自变量 t 的取值范围是什么？函数的图象是怎样的图形？

练　习

1. 求下列直线与 x 轴和 y 轴的交点，并在同一个平面直角坐标系中画出它们的图象：

   （1）$y = 4x - 1$；　　（2）$y = -\frac{2}{3}x + 2$.

2. 利用问题 1 中函数的图象，求汽车在高速公路上行驶 4 小时后，小明距北京的路程.

3. 一次函数的性质

我们知道，函数反映了现实世界中量的变化规律，那么一次函数有什么性质呢？

华东师大版电子教材

观察

如图 17.3.4，在函数 $y = \frac{2}{3}x + 1$ 的图象中，我们看到：当一个点在直线上从左向右移动（自变量 x 从小变到大）时，它的位置也在逐步从低到高变化（函数 y 的值也从小变到大）.

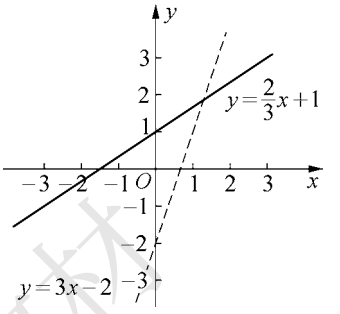


图 17.3.4

这就是说，函数值 y 随自变量 x 的增大而_____.

函数 $y = 3x - 2$ 的图象（图 17.3.4 中的虚线）是否也有这种现象呢？

探索

如图 17.3.5，再观察函数 $y = -x + 2$ 和 $y = -\frac{3}{2}x - 1$ 的图象，作类似的研究. 这两个函数有什么共同性质？它与前两个函数有什么不同？

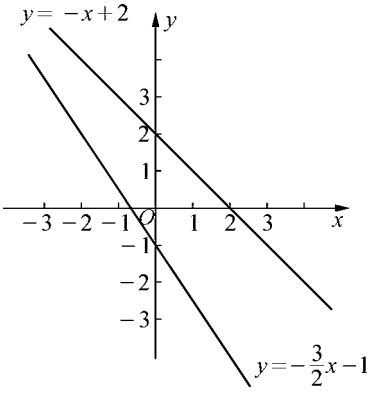


图 17.3.5

从对以上四个函数的研究结果中，你能否概括出关于一次函数性质的一般结论？

概括

一次函数 $y = kx + b$（$k \neq 0$）有下列性质：

（1）若 $k > 0$，y 随 x 的增大而增大，这时函数的图象从左到右上升；

（2）若 $k < 0$，y 随 x 的增大而_____，这时函数的图象从左到右_____.

这些性质在问题 1 和问题 2 中，反映怎样的实际意义？

华东师大版电子教材

做一做

画出函数 $y = -2x + 2$ 的图象，结合图象回答下列问题：

（1）这个函数中，随着自变量 x 的增大，函数值 y 是增大还是减小？它的图象从左到右怎样变化？

（2）当 x 取何值时，$y = 0$？

（3）当 x 取何值时，$y > 0$？

练　习

1. 已知函数 $y = (m-3)x - \frac{2}{3}$（m 是常数），回答下列问题：

（1）当 m 取何值时，y 随 x 的增大而增大？

（2）当 m 取何值时，y 随 x 的增大而减小？

2. 已知点 $(-1, a)$ 和点 $\left(\frac{1}{2}, b\right)$ 都在直线 $y = \frac{2}{3}x + 3$ 上，试比较 a 和 b 的大小. 你能想出几种判断方法？

4. 求一次函数的表达式

例 4　温度计是利用水银（或酒精）热胀冷缩的原理制作的，温度计中水银（或酒精）柱的高度 y（厘米）是温度 x（℃）的一次函数. 某种型号的实验用水银温度计能测量 -20℃至 100℃的温度，已知 10℃时水银柱高 10 厘米，50℃时水银柱高 18 厘米. 求这个函数的表达式.

分析　已知 y 是 x 的一次函数，它的表达式必有 $y = kx + b$（$k \neq 0$）的形式，问题就归结为求 k 和 b 的值. 两个已知条件实际上给出了 x 和 y 的两组对应值：当 $x = 10$ 时，$y = 10$；当 $x = 50$ 时，$y = 18$. 分别将它们代入关系式 $y = kx + b$，进而求得 k 和 b 的值.

华东师大版电子教材

解 设所求函数表达式是 $y = kx + b$ $(k \neq 0)$，根据题意，得

这里将求函数表达式问题转化为什么问题来解决？

$$\begin{cases} 10k + b = 10, \\ 50k + b = 18. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} k = 0.2, \\ b = 8. \end{cases}$$

所以，所求函数表达式是

$$y = 0.2x + 8,$$

其中 x 的取值范围是 $-20 \leqslant x \leqslant 100$.

这种先设待求函数表达式（其中含有待定系数），再根据条件列出方程或方程组，求出待定系数，从而得到所求结果的方法，叫做**待定系数法**（method of undetermined coefficient）.

做一做

已知一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(-1, 1)$ 和点 $(1, -5)$，求当 $x = 5$ 时的函数值.

讨论

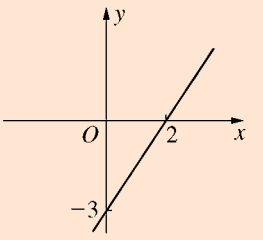
1. 在“做一做”中，已知条件是一次函数图象上两个点的坐标，它反映了自变量 x 与因变量 y 的值之间怎样的对应关系？

2. 题目并没有要求写出函数表达式，解题时却通常首先求出函数表达式，它在这里起了什么作用？

华东师大版电子教材

练　习

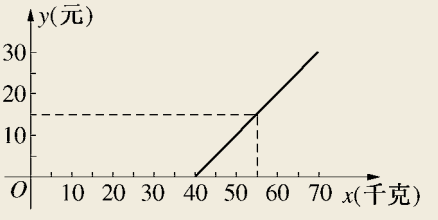
1. 已知一次函数的图象如图所示，写出这个函数的表达式.
2. 写出两个一次函数，使它们的图象都经过点（－2，3）.



（第 1 题）

习题 17.3

1. 已知等腰三角形的周长是 18 cm，腰长 y（cm）是底边长 x（cm）的函数，试写出这个函数的关系式，并写出自变量的取值范围.
2. 某市出租车计费标准如下：行程不超过 3 千米，收费 8 元；超过 3 千米部分，按每千米 1.60 元计算. 求车费 P（元）和行驶路程 s（千米）之间的函数关系式，并分别求出当路程为 2.5 千米和 7 千米时应付的车费.
3. 填空：
   （1）直线 $y = 4x - 3$ 经过点（____，0）、（0，____）；
   （2）直线 $y = -\frac{1}{3}x + 2$ 经过点（____，0）、（0，____）.
4. 分别在同一个平面直角坐标系中画出下列一次函数的图象，并指出每小题中两条直线的位置关系：
   （1）$y = -x + 2$ 与 $y = -x - 1$；　　（2）$y = 3x - 2$ 与 $y = \frac{2}{3}x - 2$.
5. 画出直线 $y = -2x + 3$，并借助图象找出：
   （1）直线上横坐标是 2 的点；
   （2）直线上纵坐标是 −3 的点；
   （3）直线上到 y 轴的距离等于 2 的点.
6. 如图是某长途汽车站旅客携带行李收费示意图. 试说明收费方法，并写出行李费 y（元）与行李重量 x（千克）之间的函数关系式.

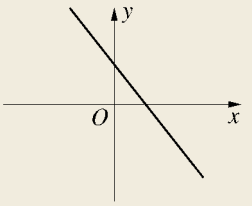


（第 6 题）

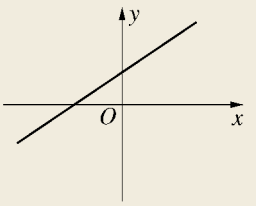
华东师大版电子教材

7. 一次函数 $y = kx + b$ 的图象位置大致如图所示，试分别确定 k、b 的正负号，并说出函数的性质.

（1）



（2）



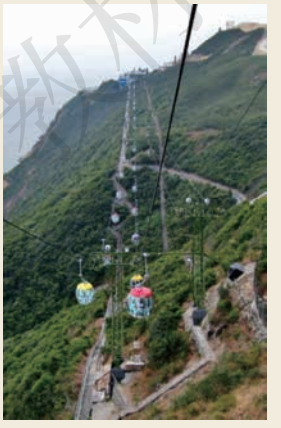
（第 7 题）

8. 根据下列条件求出相应的函数表达式：

（1）直线 $y = kx + 5$ 经过点 $(-2, -1)$；

（2）一次函数中，当 $x = 1$ 时，$y = 3$；当 $x = -1$ 时，$y = 7$.

9. 陈华暑假去某地旅游，导游要求大家上山时多带一件衣服，并在介绍当地山区地理环境时说，海拔每增加 100 米，气温下降 0.8℃. 陈华在山脚下看了一下随身带的温度计，气温为 34℃，试写出山上气温 T（℃）与该处距山脚垂直高度 h（m）之间的函数关系式. 当陈华乘缆车到达山顶时，发现温度为 29.6℃，求山高.



（第 9 题）

华东师大版电子教材

阅读材料

小明算得正确吗

爸爸准备为小明买一双新的运动鞋，但要小明自己算出穿几码的鞋. 小明回家量了一下妈妈 36 码的鞋子长 23 厘米，爸爸 41 码的鞋子长 25.5 厘米. 那么自己穿的 21.5 厘米长的鞋子是几码呢？

想了一下，小明动笔了：

设鞋长是 x 厘米，鞋子的码数是 y，那么 y 与 x 之间的函数关系式可能是

$$y = kx + b \ (k \neq 0).$$

这里有两个待定系数：k 和 b. 小明把妈妈和爸爸所穿鞋子的长度和码数两组对应值分别代入上式，得

$$\begin{cases} 23k + b = 36, \\ 25.5k + b = 41. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} k = 2, \\ b = -10. \end{cases}$$

所以 y 和 x 之间的函数关系式可能是

$$y = 2x - 10.$$

小明想了想，又去隔壁问了小东哥哥，了解到他所穿的 38 码的鞋子长 24 厘米，回来后代入检验，恰好适合所得到的函数关系式，高兴地说："对了，对了！"很快，他算出了自己鞋子的码数：

$$2 \times 21.5 - 10 = 33.$$

小明的假设和计算是否正确呢？

华东师大版电子教材

17.4 反比例函数

1. 反比例函数

问题 1

甲、乙两地相距 120 千米，汽车匀速从甲地驶往乙地. 显然，汽车的行驶时间由行驶速度确定，时间是速度的函数，试写出这个函数的关系式.

分析

和其他实际问题一样，要探求两个变量之间的关系，应先选用适当的符号表示变量，再根据题意列出相应的函数关系式.

设汽车行驶的速度是 v 千米/时，从甲地到乙地的行驶时间是 t 小时. 因为在匀速运动中，时间 = 路程 ÷ 速度，所以

$$t = _____. \qquad (1)$$

问题 2

学校课外生物小组的同学准备自己动手，用旧围栏建一个面积为 24 平方米的长方形饲养场. 设它的一边长为 x（米），求另一边的长 y（米）与 x 之间的函数关系式.



分析

根据长方形的面积公式，可知

$$xy = 24,$$

故

$$y = _____. \qquad (2)$$

（1）和（2）这两个函数关系式有什么共同点？

概括

这些函数的关系式都具有 $y = \frac{k}{x}$ 的形式. 一般地，形如 $y = \frac{k}{x}$（k 是常数，$k \neq 0$）的函数叫做**反比例函数**（inverse proportional function）. 反比例函数中，自变量的取值范围是不等于 0 的一切实数.

问题 1、2 中得到的函数，都是反比例函数.

华东师大版电子教材

练　习

1. 列出下列问题中的函数关系式，并指出它们是什么函数：

（1）三角形的面积 S 是常数时，它的某一边的长 y 是该边上的高 x 的函数；

（2）食堂存煤 15 000 千克，可使用的天数 t 是平均每天的用煤量 Q（千克）的函数.

2. 试用描点作图法画出问题 2 中函数的图象.

2. 反比例函数的图象和性质

在上面练习第 2 题中，我们画出了问题 2 中函数 $y = \frac{24}{x}$ 的图象，发现它并不是直线. 那么它是怎样的曲线呢？现在我们来考察反比例函数的图象，探究它有什么性质.

例 1　画出函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象.

解　这个函数中自变量 x 的取值范围是不等于零的一切实数，列出 x 与 y 的对应值表：

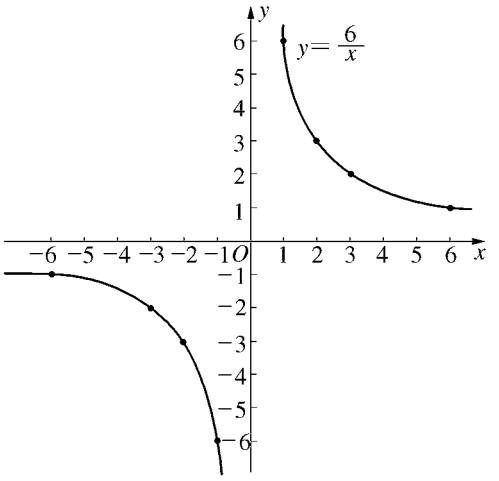
x	…	−6	−3	−2	−1	…	1	2	3	6	…
y	…	−1	−2	−3	−6	…	6	3	2	1	…

为什么不能将所有这些点用一条曲线连起来？

由这些有序实数对，先在平面直角坐标系中描出相应的点（−6，−1）、（−3，−2）、（−2，−3）等，再用光滑曲线分别将第一象限和第三象限内的各点依次连起来，就得到反比例函数的图象，如图 17.4.1 所示.

这种图象有两支，通常称为**双曲线**（hyperbola）.

华东师大版电子教材



这两条曲线会与 x 轴、y 轴相交吗？为什么？

图 17.4.1

试一试

画出函数 $y=-\frac{6}{x}$ 的图象.

讨论

1. 函数 $y=-\frac{6}{x}$ 的图象在哪两个象限？和函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象有什么不同？

2. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在哪两个象限由什么确定？

3. 试由所画出的两个函数的图象，总结一下反比例函数的变化规律：随着自变量 x 的增大，函数值 y 将怎样变化？

概括

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 有下列性质：

华东师大版电子教材

这一性质在问题 1 和问题 2 中反映怎样的实际意义?

(1) 若 $k>0$,函数的图象在第_____、_____象限,在每个象限内,曲线从左向右下降,也就是说,当 $x>0$(或 $x<0$)时,y 随 x 的增大而_____;

(2) 若 $k<0$,函数的图象在第_____、_____象限,在每个象限内,曲线从左向右上升,也就是说,当 $x>0$(或 $x<0$)时,y 随 x 的增大而_____.

思考

这里与一次函数不同,强调了“在每个象限内”,应该怎么理解?

例 2 已知 y 是 x 的反比例函数,当 $x=2$ 时,$y=\frac{2}{3}$,求这个反比例函数的表达式.

分析 我们在学习一次函数时,已经学会了应用待定系数法求一次函数的表达式. 同样,我们可以用待定系数法求这个反比例函数的表达式.

请你完成本题的解答.

解 设这个反比例函数为_____(其中 k 为待定系数).

由已知,当 $x=2$ 时,$y=\frac{2}{3}$,可得_____.

可以求得 $k=$_____,

所以这个反比例函数的表达式是_____.

练 习

1. 写出下列问题中两个变量间的函数关系式,指出哪些是正比例函数,哪些是反比例函数,哪些既不是正比例函数也不是反比例函数:

(1) 小红 1 分钟可以制作 2 朵花,x 分钟可以制作 y 朵花;

(2) 体积为 100 cm^3 的长方体,高为 h cm 时,底面积为 S cm^2;

华东师大版电子教材

(3) 用一根长 50 cm 的铁丝弯成一个长方形，一边长为 x cm 时，面积为 y cm^2；

(4) 小李接到一项检修管道的任务，已知管道长 100 m，每天能检修10 m，x 天后剩下的未检修管道长为 y m.

2. 在同一个平面直角坐标系中画出函数 $y = \frac{3}{x}$ 与 $y = -\frac{3}{x}$ 的图象.

习题 17.4

1. 试举出两个实际生活中反比例函数的例子.

2. 由下列条件求反比例函数的表达式：

(1) 当 $x = \frac{3}{2}$ 时，$y = \frac{4}{3}$；　　(2) 图象经过点 $(-3, 2)$.

3. 画出下列函数的图象：

(1) $y = \frac{1}{x}$；　　(2) $y = -\frac{10}{x}$.

4. 已知 y 是 x 的反比例函数，且当 $x = 3$ 时，$y = 8$.

(1) 求这个函数的表达式；

(2) 求当 $x = 2\frac{2}{3}$ 时，y 的值；

(3) 当 x 取何值时，$y = \frac{3}{2}$?

17.5 实践与探索

问题 1

学校每个月都有一些复印任务，原来由甲复印社承接，按每 100 页 40 元计费. 现在乙复印社表示：若学校

华东师大版电子教材

先按月付给一定数额的承包费，则可按每 100 页 15 元收费. 两复印社每月收费情况如图 17.5.1 所示.

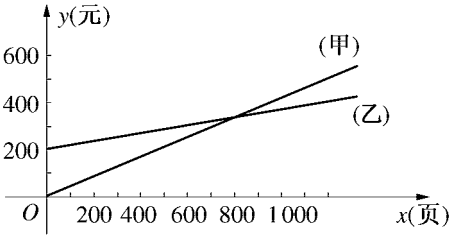


图 17.5.1

请同学们解答并交流.

根据图象回答：

（1）乙复印社的每月承包费是多少？

（2）当每月复印多少页时，两复印社实际收费相同？

（3）如果每月复印页数在 1 200 页左右，那么选择哪个复印社比较合算？

思考

（1）“收费相同”在图象上怎样反映出来？

（2）如何在图象上看出复印费的多少？

联想

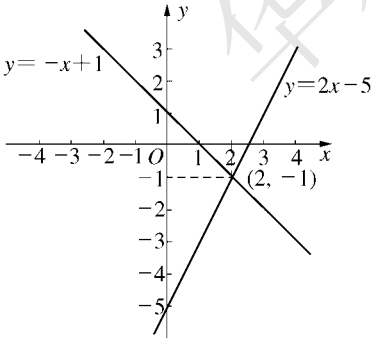


图 17.5.2

我们看到，两个一次函数图象的交点处，自变量和对应的函数值同时满足两个函数的关系式. 而这两个关系式可以看成关于 x、y 的两个方程，所以交点的坐标就是这两个方程组成的方程组的解.

例如，图 17.5.2 中的两条直线：$y = 2x - 5$ 和 $y = -x + 1$，它们的交点坐标 $(2, -1)$ 就是方程组 $\begin{cases} y = 2x - 5, \\ y = -x + 1 \end{cases}$ 的解 $\begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$

华东师大版电子教材

例 利用一次函数的图象，求二元一次方程组 $\begin{cases} y = x + 5, \\ x + 2y = -2 \end{cases}$ 的解.

分析 方程组中第一个方程已经是一次函数的形式，第二个方程可变形为一次函数的形式：$y = -\frac{1}{2}x - 1$.

如图 17.5.3，分别作出一次函数 $y = x + 5$ 和 $y = -\frac{1}{2}x - 1$ 的图象，得到它们交点的坐标 $(-4, 1)$，即方程组的解为 $\begin{cases} x = -4, \\ y = 1. \end{cases}$

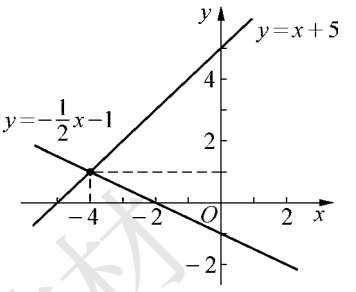


图 17.5.3

练 习

1. 在 17.3 节问题 1 中，已知小明由 A 地乘车前往北京，汽车距北京的路程与行驶时间之间的函数关系式为 $s = 570 - 95t$，若另有小李同时从北京乘车沿同一公路回 A 地，其函数关系式为 $s = 105t$. 这里 t 表示汽车行驶的时间（时），s 表示汽车距北京的路程（千米）. 在同一个平面直角坐标系中画出这两个函数的图象，并说明交点的实际意义.

2. 利用图象解下列方程组：

(1) $\begin{cases} y = -2x - 1, \\ y = \frac{1}{2}x + 4; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x - y = 2, \\ x + y = -5. \end{cases}$

问题 2

画出函数 $y = \frac{3}{2}x + 3$ 的图象，根据图象，说明：

(1) x 取什么值时，函数值 y 等于零？

(2) x 取什么值时，函数值 y 大于零？

华东师大版电子教材

思考

由问题2，想一想：一元一次方程 $\frac{3}{2}x+3=0$ 的解、不等式 $\frac{3}{2}x+3>0$ 的解集与函数 $y=\frac{3}{2}x+3$ 的图象有什么关系？

练　习

1. 不等式 $\frac{3}{2}x+3\leqslant 0$ 的解集与函数 $y=\frac{3}{2}x+3$ 的图象有什么关系？

2. 编制一道相关的练习题，继续探究一次函数与一元一次方程、一元一次不等式的联系.

问题3

为了研究某合金材料的体积 $V(\mathrm{cm}^3)$ 随温度 $t(℃)$ 变化的规律，对一个用这种合金制成的圆球测得相关数据如下：

t(℃)	−40	−20	−10	0	10	20	40	60
$V(\mathrm{cm}^3)$	998.3	999.2	999.6	1 000	1 000.3	1 000.7	1 001.6	1 002.3

能否据此寻求 V 和 t 之间的函数关系式？

请你动手试一试，求出函数的关系式.

分析　在平面直角坐标系中描出这些数值所对应的点，我们发现，这些点大致位于同一条直线上，可知 V 和 t 之间近似地符合一次函数关系. 我们可以用一条直线去尽可能地与这些点相贴近，求出近似的函数关系式. 如图17.5.4所示的就是一条这样的直线，较接近的点可考虑取(10，1 000.3)和(60，1 002.3).

你也可以将直线稍稍挪动一下，换上其他适当的两点，试一试.

华东师大版电子教材

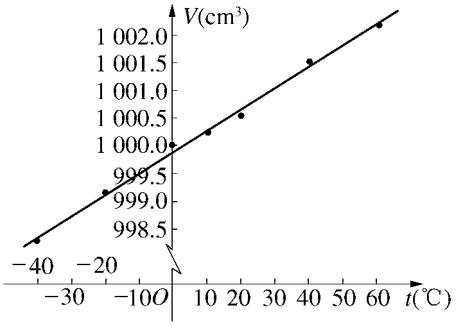


图 17.5.4

概括

我们曾采用待定系数法求得一次函数和反比例函数的表达式. 但是现实生活中的数量关系是错综复杂的,在实践中得到一些变量的对应值,有时很难精确地判断它们有怎样的函数关系,需要我们根据经验分析,进行近似计算和修正,列出比较接近的函数表达式.

练　习

小吴观察了学校新添置的一批课桌椅,发现它们可以根据人的身高调节高度. 他测量了一套课桌椅上的四档高度,得到如下数据:

凳高 x(cm)	37	40	42	45
桌高 y(cm)	70	75	78	82.5

请你和同学一起讨论,研究 y 与 x 可能满足什么函数关系.



华东师大版初三教材

习题 17.5

1. 联系一次函数的图象，回答下列问题：

（1）当 $k > 0$ 时，函数 $y = kx$ 的图象经过哪几个象限？当 $k < 0$ 时呢？

（2）当 $k > 0$，$b > 0$ 时，函数 $y = kx + b$ 的图象不经过哪个象限？当 $k > 0$，$b < 0$ 时呢？

2. 已知直线 $y = 2x + 1$ 和 $y = 3x + b$ 的交点在第三象限，写出常数 b 可能的两个取值.

3. 当 x 取何值时，函数 $y = 4x - 3$ 的图象在第四象限？

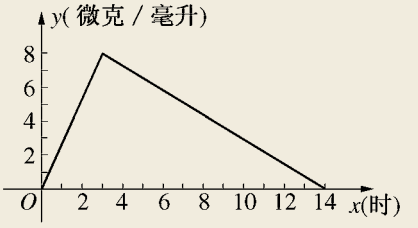
4. 利用一次函数的图象，求二元一次方程组 $\begin{cases} y = 3x - 6, \\ x + y = 4 \end{cases}$ 的解.

5. 已知一个一次函数的图象与一个反比例函数的图象交于点 $P(-2, 1)$、$Q(1, m)$.

（1）分别求出这两个函数的表达式.

（2）在同一个平面直角坐标系中画出这两个函数的图象，根据图象回答：当 x 取何值时，一次函数的值大于反比例函数的值？

6. 药品研究所开发一种抗菌新药. 经多年动物实验，首次用于临床人体试验. 测得成人服药后血液中药物浓度 y（微克/毫升）与服药后时间 x（时）之间的函数关系如图所示.



（第 6 题）

（1）根据图象说出服药后多少时间血液中药物浓度最高；

（2）根据图象分别求出血液中药物浓度上升阶段和下降阶段 y 与 x 之间的函数关系式.

7. 学校准备去白云山春游. 甲、乙两家旅行社原价都是每人 60 元，且都表示对学生优惠. 甲旅行社表示：全部 8 折收费；乙旅行社表示：若人数不超过 30 人全部按 9 折收费，超过 30 人则全部按 7 折收费.

（1）试分别写出甲、乙两家旅行社实际收取的总费用 y（元）与参与春游学生人数 x 之间的函数关系式（其中对乙旅行社应按人数是否超过 30 人分两种情况列出）；

（2）讨论选择哪家旅行社较合算；

（3）试在同一个平面直角坐标系中画出题（1）中写出的两个函数的图象，并根据图象解释题（2）讨论的结果.

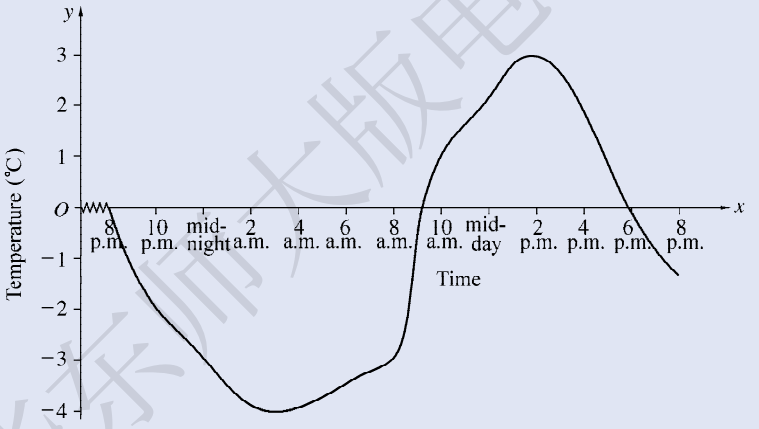
华东师大版电子教材

阅读材料

The Graph of a Function

A function is a rule that assigns exactly one output value to each input value. A function can be presented by its graph, which, by definition, is obtained by drawing the input-output pairs in a coordinate plane as the input varies. Thus, one can read from the graph the output value of the function once the input value is given. In many cases, some other properties of the function can also be seen directly from the graph.

For example, the following graph shows the air temperature as a function of the time in some place during 24 hours in January. That is, the time is regarded as the input, and the air temperature at the given time as the corresponding output of the function.



Can you tell me:

(a) What was the temperature at 4 p. m.?

(b) When was the temperature −3℃?

(c) What was the lowest temperature?

(d) When was it warmest?

(e) When was the temperature zero?

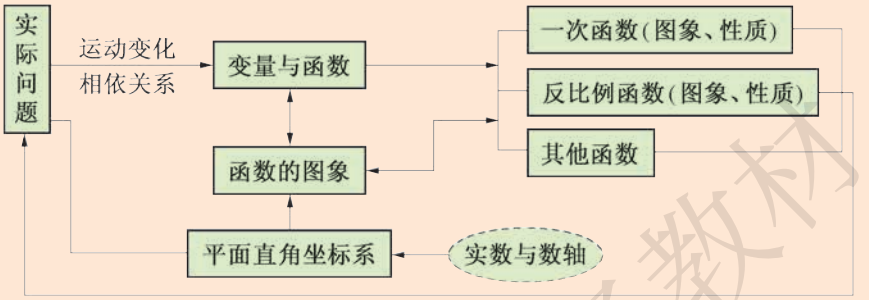
(f) For how long was the temperature below −2℃?

(素材取自 *Mathematics Course 3*, Prentice Hall 和 *SMP Interact Book 1*, Cambridge University Press)

华东师大版电子教材

小结

一、知识结构



二、要点

1. 现实世界处在不停的运动变化中. 我们通过一些实际问题,引进了变量的概念,并从变量之间的对应来刻画运动变化,建立函数的概念. 同时,通过实例,理解常用的函数表示法.

2. 与数轴建立了直线上的点与实数之间的对应一样,平面直角坐标系建立了平面上的点与有序实数对(点的坐标)之间的对应,它们是数形结合的基础.

“函数的图象”是平面直角坐标系在本章中的一个应用. 用图象表示函数——图象上每一点的坐标表示函数的自变量与因变量的一对对应值. 图象的直观性,可以帮助我们探索和研究函数的性质. 例如,一个函数的图象,如果从左到右是上升(或下降)的,它反映了这个函数的性质:当自变量增加时,函数值随之增加(或减少).

3. 本章重点研究一次函数(包括正比例函数)和反比例函数. 这是两种常见的简单函数,它刻画了现实世界两类常见的运动变化规律. 例如一次函数,又称线性函数,它刻画了一种均匀变化的规律.

我们经历了对这两种函数研究的全过程:从实际问题开始,考察一些运动现象(例如匀速运动、弹簧的伸长等),找出反映运动变化的变量,并用符号表示(例如时间 t、路程 s 等);分析运动现象中的数量关系,列出函数关系式;分析所列函数关系式的特点,抽象出一次函数(反比例函数)的概念;用描点法画出函数(举数字系数的例子)的图

华东师大版电子教材

象，并通过观察图象，概括出一次函数（反比例函数）的性质；应用. 这样，我们不仅理解了这两种函数的意义、图象和性质，而且感受到研究函数的常见方法.

4. 实际问题中常需要根据一定条件确定一次函数和反比例函数的表达式，通常采用待定系数法，这是一个重要的数学方法，以后还会有更多的应用.

5. 数学知识之间有着密切的联系. 本章探讨了一次函数与一次方程、一次不等式之间的联系，加深了我们对有关知识的理解，提高了我们的综合应用能力.

华东师大版电子教材

复习题

A 组

1. 选择题

(1) 点(0, −2)在(　　).

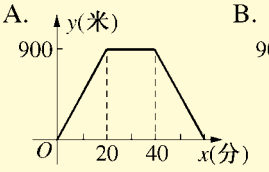
A. x 轴上　　B. y 轴上

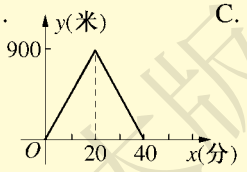
C. 第三象限　　D. 第四象限

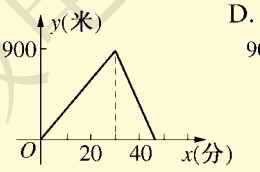
(2) 若点 $P(2m-1, 3)$ 在第二象限,则 m 的取值范围是(　　).

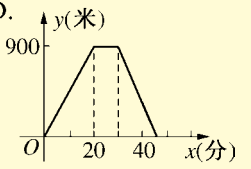
A. $m > \frac{1}{2}$　　B. $m < \frac{1}{2}$　　C. $m \geqslant -\frac{1}{2}$　　D. $m \leqslant \frac{1}{2}$

(3) 小红的爷爷饭后出去散步,从家里出发走 20 分钟到一个离家 900 米的街心花园,与朋友聊天 10 分钟后,用 15 分钟返回家里. 下面图形中表示小红爷爷离家的距离 y(米)与离家的时间 x(分)之间函数关系的是(　　).

A.


B.


C.


D.


2. 分别写出下列函数的关系式,指出是哪种函数,并确定其中自变量的取值范围:

(1) 在时速为 60 km 的匀速运动中,运动路程 s(km)是时间 t(h)的函数;

(2) 某校要在校园中辟出一块面积为 64 m^2 的长方形土地做花圃,这个花圃的长 y(m)是宽 x(m)的函数.

3. 填空:

(1) 已知函数 $y = -5x + 3$,当 $x =$ _____ 时,函数值为 0;

(2) 已知函数 $y = \frac{5}{x}$. 当 $x = 1$ 时,$y =$ _____;当 $x =$ _____ 时,$y = 1$.

4. 画出下列函数的图象:

(1) $y = -\frac{x}{4}$;　　(2) $y = 2 - 3x$;　　(3) $y = -\frac{3}{x}$.

5. 在直线 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 上分别找出满足下列条件的点,并写出它的坐标:

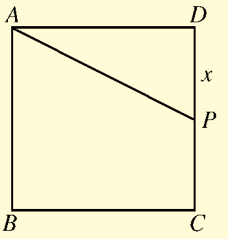
(1) 横坐标是 −4;

(2) 和 x 轴的距离是 2 个单位.

华东师大版电子教材

6. 一次函数的图象经过点(3, 3)和点(1, −1). 求这个函数的表达式,并画出图象.

7. 如图,正方形 $ABCD$ 的边长为4, P 为边 DC 上的一点. 设 $DP = x$, 求 $\triangle APD$ 的面积 y 与 x 之间的函数关系式,并画出这个函数的图象.



(第7题)

8. 地表以下岩层的温度 y(℃)随着深度 x(km)的变化而变化. 某处 y 与 x 之间的关系在一定范围内可以近似地表示成公式: $y = 35x + 20$. 试分别求出该处地表以下深7 km、10 km、15 km处的岩层温度.

9. 酒精的体积随温度的升高而增大,在一定范围内近似于一次函数关系. 现测得一定量的酒精在0℃时的体积是5.250升,在40℃时的体积是5.481升. 求这些酒精在10℃和30℃时的体积各是多少?

B组

10. 已知点 $A(-3, a)$ 与点 $B(3, 4)$ 关于 y 轴对称,求 a 的值.

11. (1) 在平面直角坐标系中描出下列各组的点,并分别用线段把它们连起来:

① (1, 0), (3, 0); ② (1, −1), (1, −3);

③ (0, 1), (0, 3); ④ (−1, 1), (−1, 3);

⑤ (0, 2), (4, 0); ⑥ (−1, −1), (−3, −3).

(2) 上面连成的各线段的中点的坐标分别是什么? 仔细观察各中点的坐标与两个端点的坐标,你能发现它们之间有怎样的关系吗?

12. 从地面到高空11 km之间,气温随高度的升高而下降,每升高1 km,气温下降6℃;高于11 km时,气温几乎不再变化. 设某处地面气温为20℃,该处离地面 x km处的气温为 y℃.

(1) 当 $0 \leqslant x \leqslant 11$ 时,求 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 画出该处气温 y 关于高度 x(包括高于11 km)的函数的图象;

(3) 分别求出该处在离地面4.5 km及13 km处的气温.

C 组

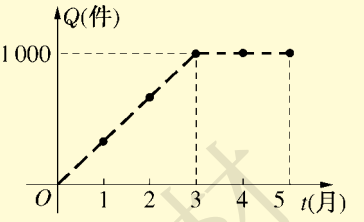
13. 某厂今年前 5 个月某种产品的月产量 Q(件)是时间 t(月)的函数,它的图象如图所示,则对这种产品来说,下列说法正确的是(　　).

A. 1 月至 3 月每月产量逐月增加,4、5 两月每月产量逐月减少

B. 1 月至 3 月每月产量逐月增加,4、5 两月每月产量与 3 月持平

C. 1 月至 3 月每月产量逐月增加,4、5 两月停止生产

D. 1 月至 3 月每月产量不变,4、5 两月停止生产



(第 13 题)

14. 将函数 $y = 2x + 3$ 的图象平移,使它经过点 $(2, -1)$,求平移后的直线所对应的函数关系式. 你能想出几种不同的平移方法? 请和同学交流一下.

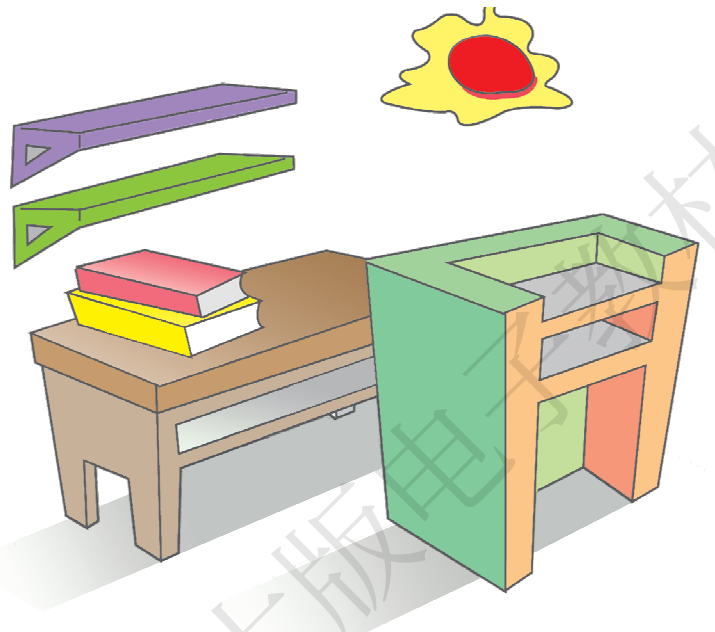
15. 直线 $y = \frac{2}{3}x - 2$ 分别交 x 轴、y 轴于 A、B 两点,O 是原点.

(1) 求 $\triangle AOB$ 的面积.

(2) 过 $\triangle AOB$ 的顶点能不能画出直线把 $\triangle AOB$ 分成面积相等的两部分? 若能,可以画出几条? 写出这样的直线所对应的函数表达式.

华东师大版电子教材

第18章　平行四边形



平行四边形是我们常见的一种图形，它具有十分和谐的对称美．它是什么样的对称图形呢？它具有哪些基本性质，又如何识别平行四边形呢？

读下去，你就会发现这些答案了．

本章将着重探索一种常见的中心对称图形——平行四边形．

华东师大版电子教材

18.1 平行四边形的性质

平行四边形是随处可见的几何图形，本章导图中的桌面、书的封面……甚至连在阳光照耀下它们的影子都形如平行四边形.

回忆

我们知道，有两组对边分别平行的四边形叫做**平行四边形**(parallelogram).

你能从图 18.1.1 所示的图形中找出平行四边形吗?

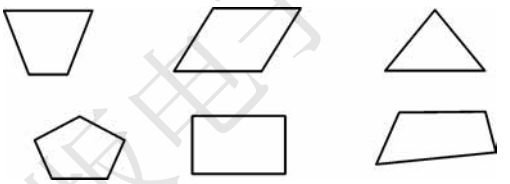


图 18.1.1

根据定义，平行四边形的一个主要性质是两组对边分别平行. 由此，可知平行四边形的相邻两个内角互补. 除此之外，它还有什么性质呢?

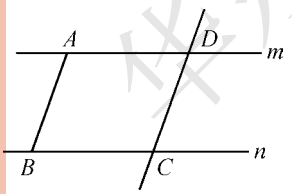


图 18.1.2

平行四边形 $ABCD$ 可以记作$\square ABCD$.

试一试

如图 18.1.2，作一个平行四边形.

步骤：

1. 任意画一条直线 m；
2. 在直线 m 上任取点 A，在直线 m 外任取点 B，连结 AB；
3. 过点 B 作直线 m 的平行线 n，在直线 n 上任取点 C；
4. 过点 C 作直线 AB 的平行线，交直线 m 于点 D，就得到$\square ABCD$.

华东师大版电子教材

探索

如图 18.1.3，用剪刀把▱*ABCD* 剪下，放在另一张纸上，并沿▱*ABCD* 的边沿，画出一个四边形，记为 *EFGH*. 则四边形 *EFGH* 和▱*ABCD* 完全一样，也是平行四边形. 它们的对应边、对应角都分别相等.

在▱*ABCD* 中，连结 *AC*、*BD*，它们的交点记为点 *O*.

用一枚图钉穿过点 *O*，将▱*ABCD* 绕点 *O* 旋转 180°. 观察旋转后的▱*ABCD* 和纸上所画的▱*EFGH* 是否重合.

你能从中得出▱*ABCD* 的一些边角关系吗？

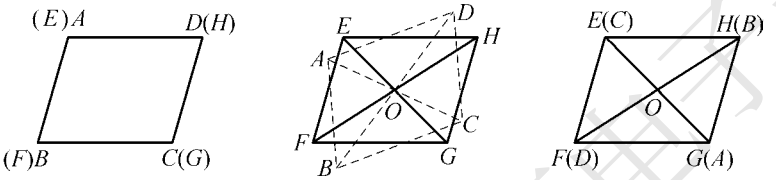


图 18.1.3

请用中心对称的有关结论说明这些边角关系.

我们发现，旋转 180°之后两个平行四边形完全重合，即平行四边形是中心对称图形，对角线的交点 *O* 就是对称中心. 由此可以得到

$$AB = CD,\quad AD = CB,$$

$$\angle A = \angle C,\ \angle B = \angle D.$$

我们可以用演绎推理证明上述探索得到的结论.

已知：如图 18.1.4，▱*ABCD*.

求证：$AB = CD$，$AD = CB$，$\angle A = \angle C$，$\angle ABC = \angle CDA$.

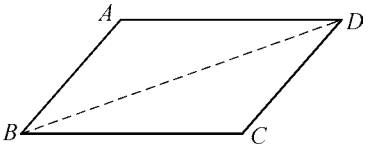


图 18.1.4

分析 我们已经知道，证明边相等或角相等的一个重要方法是找出它们分别所属的三角形，然后证明这两个三角形全等. 从上面旋转纸片的探索过程，可以发现一条对角线恰好将平行四边形分成两个全等的三角形.

证明 连结 *BD*.

∵ 四边形 *ABCD* 是平行四边形，

华东师大版电子教材

$\therefore$ $AB/\!/DC$, $AD/\!/BC$(平行四边形的两组对边分别平行),

$\therefore$ $\angle ABD = \angle CDB$,

$\angle ADB = \angle CBD$.

又 $\because$ $BD = DB$,

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

$\therefore$ $AB = CD$, $AD = CB$, $\angle A = \angle C$.

由 $\angle ABD = \angle CDB$ 和 $\angle ADB = \angle CBD$,得

$\angle ABD + \angle CBD = \angle CDB + \angle ADB$,

即 $\angle ABC = \angle CDA$.

以上的相等关系可以概括为平行四边形的性质定理:

平行四边形的性质定理 1　平行四边形的对边相等.

平行四边形的性质定理 2　平行四边形的对角相等.

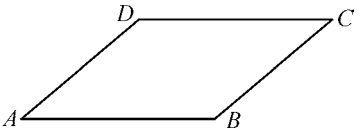


图 18.1.5

例 1　如图 18.1.5,在$\square ABCD$ 中, $\angle A = 40°$. 求其他各内角的大小.

解　在$\square ABCD$ 中,

$\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$(平行四边形的对角相等).

$\because$ $\angle A = 40°$,

$\therefore$ $\angle C = 40°$.

又 $\because$ $AD /\!/ BC$,

$\therefore$ $\angle A + \angle B = 180°$,

$\therefore$ $\angle B = 180° - \angle A$

$= 180° - 40° = 140°$,

$\therefore$ $\angle D = \angle B = 140°$.

平行四边形的邻角互补.

例 2　如图 18.1.6,在$\square ABCD$ 中, $AB = 8$,周长等于 24. 求其余三条边的长.

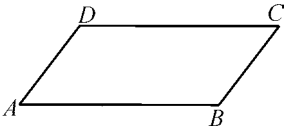


图 18.1.6

解　在$\square ABCD$ 中,

$AB = DC$, $AD = BC$(平行四边形的对边相等).

$\because$ $AB = 8$,

$\therefore$ $DC = 8$,

又 $\because$ $AB + BC + DC + AD = 24$,

$\therefore$ $AD = BC = \frac{1}{2}(24 - 2AB) = 4$.

华东师大版电子教材

试一试

如图 18.1.7，在方格纸上画两条互相平行的直线，在其中一条直线上任取若干点，过这些点作另一条直线的垂线，用刻度尺量出平行线之间这些垂线段的长度.



图 18.1.7

你能发现什么结论？试用平行四边形的性质定理加以说明.

两条直线平行，其中一条直线上的任一点到另一条直线的距离，叫做这两条平行线之间的距离.

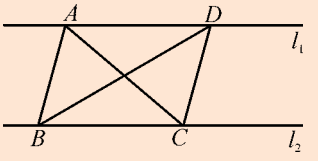
经过度量，我们发现这些垂线段的长度都相等. 由此我们得到平行线的又一个性质：

平行线之间的距离处处相等.

练　习

1. 在 $\square ABCD$ 中，$\angle A = 120°$，求其余各内角的度数.

2. 如图，如果直线 $l_1 // l_2$，那么 $\triangle ABC$ 的面积和 $\triangle DBC$ 的面积是相等的. 你能说出理由吗？你还能在这两条平行线之间画出其他与 $\triangle ABC$ 面积相等的三角形吗？



（第 2 题）

3. 用一根长度为 36 cm 的铁丝围成一个平行四边形，各边的长度恰好都是 3 的整数倍，试找出所有满足条件的平行四边形，并分别求出各边的长.

例 3　已知平行四边形的周长是 24，相邻两边的长度相差 4，求该平行四边形相邻两边的长.

解　如图 18.1.8，设 AB 的长为 x，则 BC 的长为 $x+4$.

根据已知，可得

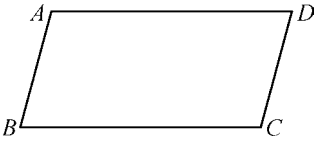


图 18.1.8

华东师大版电子教材

$$2(AB + BC) = 24,$$

即 $$2(x + x + 4) = 24,$$

$$4x + 8 = 24,$$

解得 $$x = 4.$$

所以，该平行四边形相邻两边的长分别为 4 和 8.

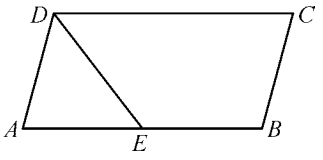


图 18.1.9

例 4 已知：如图 18.1.9，在$\square ABCD$中，$\angle ADC$的平分线与 AB 相交于点 E. 求证：$BE + BC = CD$.

证明 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB = CD$（平行四边形的对边相等），

$AB \parallel CD$（平行四边形的对边平行），

$\therefore \angle CDE = \angle AED$.

又 $\because$ DE 是$\angle ADC$的平分线，

$\therefore \angle ADE = \angle CDE$，

$\therefore \angle ADE = \angle AED$，

$\therefore AD = AE$.

又 $\because AD = BC$（平行四边形的对边相等），

$\therefore AE = BC$.

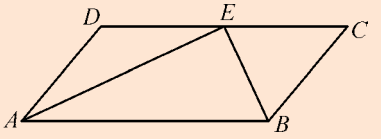
$\therefore BE + BC = BE + AE = AB = CD$.

练　习

1. 已知平行四边形的周长是 32 cm，相邻两边的长相等，求该平行四边形各边的长.

2. 如果平行四边形的一组邻边的长相等，且等于其较短的对角线的长，而此对角线的长为 4 cm，求此平行四边形各内角的大小及各边的长.

3. 如图，在$\square ABCD$中，AE 平分$\angle BAD$，BE 平分$\angle ABC$，且 AE、BE 相交于 CD 上的一点 E. 求证：$AE \perp BE$.



（第 3 题）

华东师大版电子教材

观察

在第 73 页图 18.1.3 那样的探索过程中，你观察到 OA 与 OC、OB 与 OD 各有什么关系？

任意画几个平行四边形，量量看，是否都是这样.

我们已经发现，$\square ABCD$ 是一个中心对称图形，对角线的交点 O 就是对称中心，有

$$OA = OC,\ OB = OD.$$

由此可得：

平行四边形的性质定理 3　平行四边形的对角线互相平分.

我们可以用演绎推理证明这个结论.

已知：如图 18.1.10，$\square ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O.

求证：$OA = OC,\ OB = OD.$

观察图形，OA 与 OC、OB 与 OD 分别属于哪两个三角形？

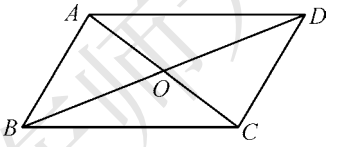


图 18.1.10

分析　要证明相等的 OA 与 OC、OB 与 OD 分别属于 $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$，因此只需证明这两个三角形全等即可.

你能写出证明的完整过程吗？

例 5　如图 18.1.11，$\square ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O，$\triangle AOB$ 的周长为 15，$AB = 6$，那么对角线 AC 与 BD 的和是多少？

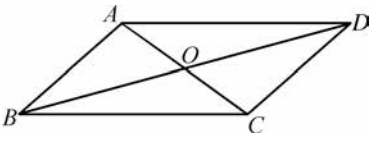


图 18.1.11

解　在 $\square ABCD$ 中，

$\because\ AB = 6,\ AO + BO + AB = 15,$

华东师大版电子教材

$\therefore\ AO + BO = 15 - 6 = 9.$

又 $\because\ AO = OC,\ BO = OD$（平行四边形的对角线互相平分），

$\therefore\ AC + BD$

$= 2AO + 2BO = 2(AO + BO) = 2 \times 9 = 18.$

观察图形，OE 与 OF 分别属于哪两个三角形？

例 6 如图 18.1.12，$\square ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O，EF 过点 O 且与边 AB、CD 分别相交于点 E 和点 F. 求证：$OE = OF$.

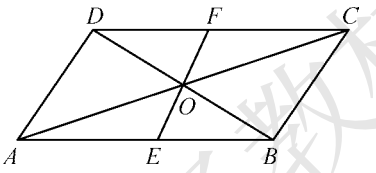


图 18.1.12

分析 要证明 $OE = OF$，只要证明它们所在的两个三角形全等即可.

证明 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore\ OB = OD$（平行四边形的对角线互相平分）.

又 $\because\ AB \parallel DC$，

$\therefore\ \angle EBO = \angle FDO.$

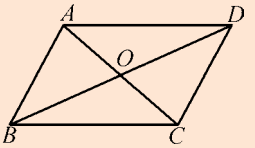
又 $\because\ \angle BOE = \angle DOF,$

$\therefore\ \triangle BEO \cong \triangle DFO.$

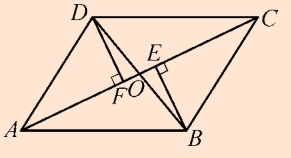
$\therefore\ OE = OF.$

练　习

1. 如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，指出图中各对相等的线段.



（第 1 题）

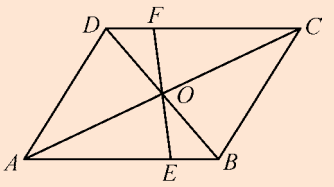


（第 2 题）

2. 如图，在 $\square ABCD$ 中，O 是对角线 AC、BD 的交点，$BE \perp AC$，$DF \perp AC$，垂足分别为点 E、F. 求证：$OE = OF$.

华东师大版电子教材

3. 如图，在$\square ABCD$中，EF过对角线的交点O，且与边AB、CD分别相交于点E、F，$AB=4$，$AD=3$，$OF=1.3$. 求四边形$BCFE$的周长.



（第3题）

例7 如图18.1.13，$\square ABCD$的对角线AC与BD相交于点O，其周长为16，且$\triangle AOB$的周长比$\triangle BOC$的周长小2. 求边AB和BC的长.

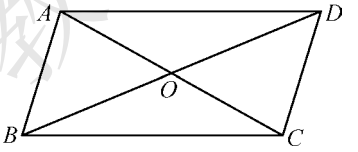


图18.1.13

解 $\because$ 四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore OA=OC$（平行四边形的对对角线互相平分）.

$\because \triangle AOB$的周长$+2=\triangle BOC$的周长，

$\therefore AB+OA+OB+2=BC+OB+OC$，

即$AB+2=BC$.

又$\because \square ABCD$的周长等于16，

$\therefore 2(AB+BC)=16$，

即$4AB+4=16$.

$\therefore AB=3$，$BC=5$.

例8 如图18.1.14，在$\square ABCD$中，对角线$AC=21$ cm，$BE\perp AC$，垂足为点E，且$BE=5$ cm，$AD=7$ cm. 求AD和BC之间的距离.

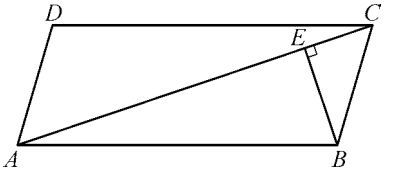


图18.1.14

解 设AD和BC之间的距离为x，则$\square ABCD$的面积等于$AD\cdot x$.

$\because S_{\square ABCD}=2S_{\triangle ABC}=AC\cdot BE$，

$\therefore AD\cdot x=AC\cdot BE$，

即$7x=21\times 5$，

$\therefore x=15$(cm).

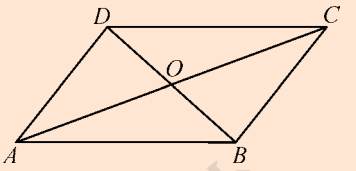
即AD和BC之间的距离为15 cm.

你知道其中的理由吗？

华东师大版电子教材

练　习

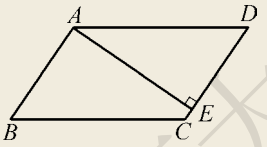
1. $\square ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 相交于点 O，已知 $AB = 8\ \text{cm}$，$BC = 6\ \text{cm}$，$\triangle AOB$ 的周长是18 cm. 求 $\triangle AOD$ 的周长.
2. 如图，如果 $\triangle AOB$ 与 $\triangle AOD$ 的周长之差为 8，而 $AB : AD = 3 : 2$，那么 $\square ABCD$ 的周长为多少？
3. 在 $\square ABCD$ 中，两条对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$BC = 5$，$AC = 6$，$BD = 8$. 求 $\triangle AOB$ 的周长.



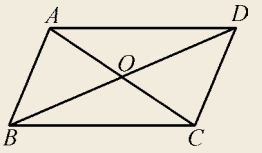
（第 2 题）

习题 18.1

1. 如图，在 $\square ABCD$ 中，AE 垂直于 CD，垂足为点 E. 如果 $\angle B = 55°$，那么 $\angle D$ 与 $\angle DAE$ 分别等于多少度？

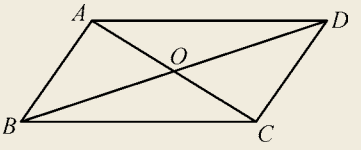


（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在 $\square ABCD$ 中，已知 AC、BD 相交于点 O，两条对角线长的和为 22 厘米，CD 的长为 5 厘米. 求 $\triangle OCD$ 的周长.
3. 在 $\square ABCD$ 中，$\angle A$ 与 $\angle B$ 的度数之比为 2 ∶ 3. 求这个平行四边形各内角的大小.
4. 如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$\triangle AOB$ 的周长与 $\triangle AOD$ 的周长之和为 11.4 cm，两条对角线长之和为 7 cm. 求这个平行四边形的周长.

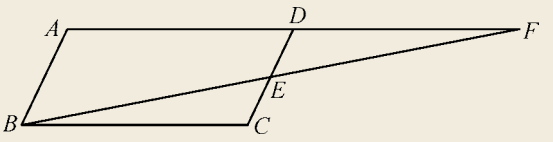


（第 4 题）

5. 求证：夹在两条平行线间的平行线段相等.

华东师大版电子教材

6. 如图，在$\square ABCD$中，点E为CD的中点，连结BE并延长交AD的延长线于点F. 求证：点E是BF的中点，点D是AF的中点.



（第6题）

18.2 平行四边形的判定

我们已经知道，如果一个四边形是平行四边形，那么它的两组对边分别平行，且是一个中心对称图形，具有如下一些性质：

1. 两组对边分别相等；
2. 两组对角分别相等；
3. 两条对角线互相平分.

那么，怎样判定一个四边形是否是平行四边形呢？当然，我们可以根据平行四边形的定义加以判定：两组对边分别平行的四边形是平行四边形. 那么是否还存在其他的判定方法呢？

由平行四边形的性质，逆向思考，你认为可能有哪些判定方法？

思考

由平行四边形的性质“平行四边形的两组对边分别相等”，逆向思考，互换条件与结论，试写出它的逆命题. 你认为它是一个真命题吗？

	条件	结论
平行四边形的两组对边分别相等		
逆命题		

祥东师大版电子教材

试一试

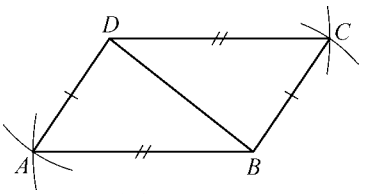


图 18.2.1

如图 18.2.1，作一个两组对边分别相等的四边形.

步骤：

1. 任取两点 B、D；

2. 分别以点 B 和点 D 为圆心、任意长为半径，分别在线段 BD 的两侧画弧；

3. 再分别以点 B 和点 D 为圆心、适当长为半径画弧，与前面所画的弧分别交于点 A 和点 C；

4. 顺次连结各点，即得两组对边分别相等的四边形 $ABCD$.

把你作的四边形和其他同学作的进行比较，看看是否都是平行四边形.

可以发现，尽管每个人取的边长不一样，但只要对边分别相等，所作的就都是平行四边形.

由此可以得到判定平行四边形的一种方法：

平行四边形的判定定理 1　两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

下面我们用演绎推理证明这个结论.

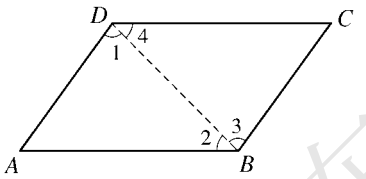


图 18.2.2

已知：如图 18.2.2，在四边形 $ABCD$ 中，$AB = CD$，$BC = DA$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

分析　要证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，现在只有平行四边形的定义这一种方法，即必须证明 $AB \parallel CD$，$AD \parallel CB$，因此需要连结对角线构造内错角.

证明　连结 BD.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CDB$ 中，

$\because\ AB = CD$，$AD = CB$，$BD = DB$，

$\therefore\ \triangle ABD \cong \triangle CDB$.

$\therefore\ \angle 1 = \angle 3$，$\angle 2 = \angle 4$.

$\therefore\ AD \parallel CB$，$AB \parallel CD$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）.

华东师大版电子教材

思考

如果只知道四边形的一组对边相等，显然这一条件还不足以保证它是一个平行四边形. 从边的角度看，把你认为需要再增加的条件填在下面的空框内：

一组对边相等 + ＿＿＿＿＿＿ ⇒ 平行四边形

如果只知道一组对边相等，可以考虑再加上平行的条件，得到一个猜想：“一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.”

试一试

如图 18.2.3，作一个有一组对边平行且相等的四边形.

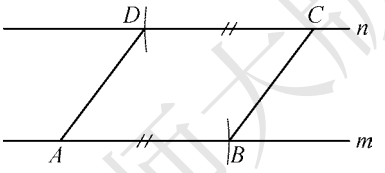


图 18.2.3

你也可利用格点图，作一个这样的四边形.

步骤：

1. 任意画两条平行线 m、n；
2. 在直线 m、n 上分别截取 AB、CD，使 $AB = CD$；
3. 分别连结点 B、C 和点 A、D，即得到一组对边平行且相等的四边形 $ABCD$.

观察你所画的图形，它是平行四边形吗？

我们发现这样作出的四边形是平行四边形.

下面用演绎推理证明上述猜想.

已知：如图 18.2.4，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$ 且 $AB = CD$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

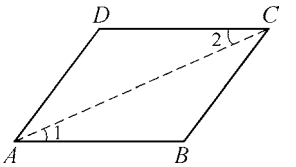


图 18.2.4

华东师大版电子教材

分析 要证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可以用平行四边形的定义，也可以用前面得到的平行四边形的判定定理 1.

证明 连结对角线 AC.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中，

$\because\ AB \parallel CD$,

$\therefore\ \angle 1 = \angle 2$.

又 $\because\ AB = CD$, $AC = CA$,

$\therefore\ \triangle ABC \cong \triangle CDA$.

$\therefore\ BC = DA$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形（两组对边分别相等的四边形是平行四边形）.

你还能用其他方法证明吗？

由此我们得到平行四边形的另一种判定方法：

平行四边形的判定定理 2　一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

“平行且相等”常用符号“$\between$”来表示. 如图 18.2.4，$AB = CD$ 且 $AB \parallel CD$，可以记作“$AB \between CD$”，读作“AB 平行且等于 CD”.

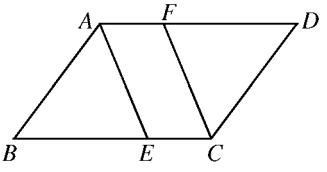


图 18.2.5

例 1 如图 18.2.5，在 $\square ABCD$ 中，点 E、F 分别在对边 BC 和 DA 上，且 $AF = CE$. 求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.

分析 我们已经有了三种判定平行四边形的方法，根据已知条件 $AF = CE$，若运用刚刚得到的判定定理 2，则只需证明 $AF \parallel CE$.

证明 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore\ AD \parallel CB$（平行四边形的对边平行），

即 $AF \parallel CE$.

又 $\because\ AF = CE$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 为平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形）.

当所要证的命题可以使用多种方法证明时，可根据题目的条件选择较简捷的证明方法.

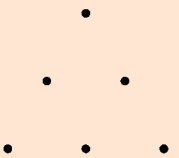
思考

还可以用其他方法证明例 1 吗？哪种方法较为简捷？

华东师大版电子教材

练　习

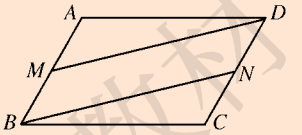
1. 在如图的格点图中，每一格点与它周围各个格点的距离相等. 以格点为顶点，你能画出多少个平行四边形？
2. 如图，在$\square ABCD$中，E、F分别是边AB和CD的中点. 求证：$EF = BC$.
3. 如图，在$\square ABCD$中，已知M和N分别是AB和DC上的中点，那么四边形$BNDM$也是平行四边形吗？试用多种方法证明你的猜想.



（第1题）



（第2题）



（第3题）

思考

由平行四边形的性质“平行四边形的两条对角线互相平分”，逆向思考，互换条件与结论，试写出它的逆命题. 你认为它是一个真命题吗？

	条件	结论
平行四边形的两条对角线互相平分		
逆命题		

试一试

如图18.2.6，作一个两条对角线互相平分的四边形.

步骤：

1. 任意画两条相交直线m、n，记交点为O；
2. 以点O为中心，分别在直线m、n上截取OB与

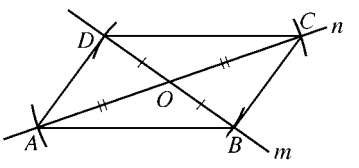


图18.2.6

华东师大版电子教材

OD、OA 与 OC，使 $OB = OD$，$OA = OC$，顺次连结所得的四点，即得到一个两条对角线互相平分的四边形 $ABCD$.

它是平行四边形吗？

相信你与你的同伴都会发现所作的四边形是一个平行四边形.

由此我们又得到平行四边形的一种判定方法：

平行四边形的判定定理 3　对角线互相平分的四边形是平行四边形.

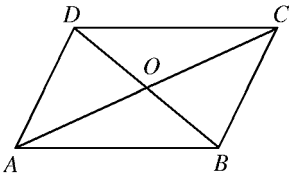
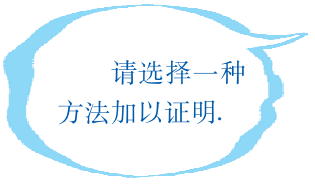


图 18.2.7

我们可以用演绎推理证明这一结论.

已知：如图 18.2.7，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 相交于点 O，$OA = OC$，$OB = OD$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



分析　要证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可以用定义，也可以用平行四边形的两条判定定理.

例 2　如图 18.2.8，在▱$ABCD$ 中，点 E、F 是对角线 AC 上的两点，且 $AE = CF$. 求证：四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

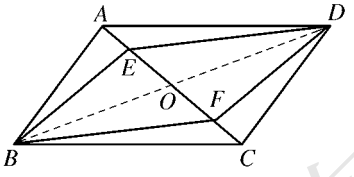


图 18.2.8

分析　连结 BD，交 AC 于点 O，由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可得 $OB = OD$. 如果能证明 $OE = OF$，就可以根据“对角线互相平分的四边形是平行四边形”得到四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

证明　连结 BD，交 AC 于点 O.

∵　四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴　$OB = OD$，$OA = OC$（平行四边形的对角线互相平分）.

又∵　$AE = CF$，

∴　$OA - AE = OC - CF$，

即 $OE = OF$，

∴　四边形 $BFDE$ 是平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）.

华东师大版电子教材

思考

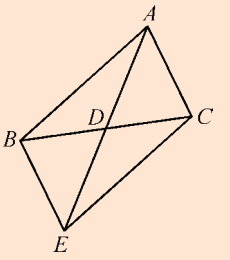
现在我们总共学习了多少种判定平行四边形的方法（包括定义）？这些判定方法与平行四边形的性质之间，又有怎样的关系呢？

读一读

由平行四边形的性质，联想平行四边形的判定方法，通过合情推理，提出猜想. 这是一个由原命题到逆命题的逆向思维的过程，今后在探索和研究其他几何问题时还会继续运用.

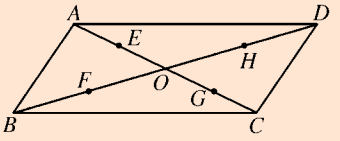
练　习

1. 如图，延长△ABC的中线AD至点E，使$DE=AD$，那么四边形$ABEC$是平行四边形吗？为什么？



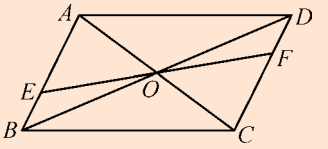
（第1题）

2. 如图，在▱$ABCD$中，两条对角线AC和BD相交于点O，E、F、G、H分别是AO、BO、CO、DO的中点，以图中标明字母的点为顶点，尽可能多地画出平行四边形.



（第2题）

3. 在四边形$ABCD$中，$AB\parallel CD$，对角线AC、BD相交于点O，EF过点O交AB于点E，交CD于点F，且$OE=OF$. 求证：四边形$ABCD$是平行四边形.



（第3题）

华东师大版电子教材

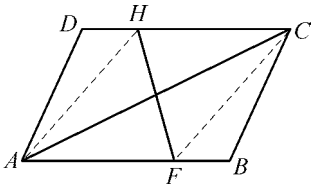


图 18.2.9

例 3 如图 18.2.9，在▱*ABCD* 中，点 *F*、*H* 分别在边 *AB*、*CD* 上，且 *BF* = *DH*. 求证：*AC* 和 *HF* 互相平分.

分析 因为 *AC* 和 *HF* 是四边形 *AFCH* 的对角线，所以要证明 *AC* 和 *HF* 互相平分，只需证明四边形 *AFCH* 是平行四边形.

证明 分别连结 *AH*、*CF*.

∵ 四边形 *ABCD* 是平行四边形，

∴ *AB* // *CD*（平行四边形的对边平行），

AB = *CD*（平行四边形的对边相等）.

又 ∵ *BF* = *DH*，

∴ *AB* − *BF* = *CD* − *DH*，

即 *AF* = *CH*，

∴ 四边形 *AFCH* 是平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形），

∴ *AC* 和 *HF* 互相平分（平行四边形的对角线互相平分）.

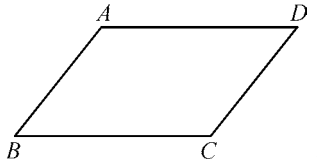


图 18.2.10

例 4 如图 18.2.10，在四边形 *ABCD* 中，∠*A* = ∠*C*，∠*B* = ∠*D*. 求证：四边形 *ABCD* 是平行四边形.

分析 根据 ∠*A* = ∠*C*，∠*B* = ∠*D*，可以证明四边形 *ABCD* 的两组对边分别平行，从而根据定义可得四边形 *ABCD* 是平行四边形.

证明 在四边形 *ABCD* 中，

∵ ∠*A* + ∠*B* + ∠*C* + ∠*D* = 360°，

∠*A* = ∠*C*，∠*B* = ∠*D*，

∴ 2(∠*A* + ∠*B*) = 360°，

即 ∠*A* + ∠*B* = 180°，

∴ *AD* // *CB*.

同理可证 *AB* // *CD*.

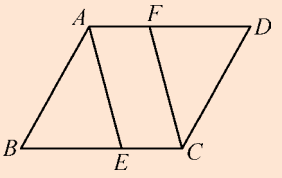
∴ 四边形 *ABCD* 是平行四边形（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）.

华东师大版电子教材

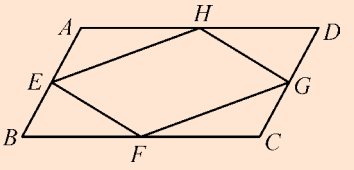
练　习

1. 如图，在$\square ABCD$中，点E、F分别在边BC、AD上，且$AE \parallel CF$. 求证：$AE = CF$.

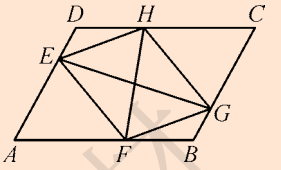
2. 如图，在$\square ABCD$中，E、F、G、H分别是边AB、BC、CD、DA的中点. 求证：四边形$EFGH$是平行四边形.



（第1题）



（第2题）



（第3题）

3. 如图，在$\square ABCD$中，$AF = CH$，$DE = BG$. 求证：EG和HF互相平分.

例5　如图18.2.11，四边形$AEFD$和$EBCF$都是平行四边形. 求证：四边形$ABCD$是平行四边形.

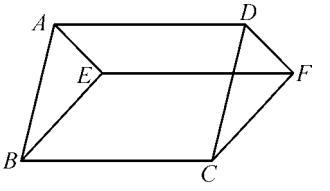


图18.2.11

证明　∵ 四边形$AEFD$是平行四边形，

∴ $AD \parallel\!\!\!= EF$.

又∵ 四边形$EBCF$是平行四边形，

∴ $BC \parallel\!\!\!= EF$.

∴ $AD \parallel\!\!\!= BC$.

∴ 四边形$ABCD$是平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形）.

例6　如图18.2.12，G、H是$\square ABCD$对角线AC上的两点，且$AG = CH$，E、F分别是边AB和CD的中点. 求证：四边形$EHFG$是平行四边形.

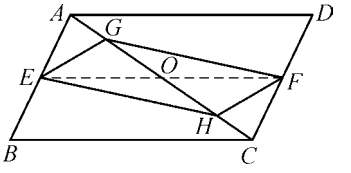


图18.2.12

证明　连结EF交AC于点O.

∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $AB \parallel\!\!\!= CD$.

又∵ E、F分别是边AB、CD的中点，

∴ $AE = CF$.

又∵ $AB \parallel CD$，

∴ $\angle EAO = \angle FCO$.

华东师大版电子教材

在△AOE 和△COF 中，

∵ $\angle EAO = \angle FCO$，

$\angle AOE = \angle COF$，

$AE = CF$，

∴ △AOE ≌△COF，

∴ $OE = OF$，$OA = OC$.

又∵ $AG = CH$，

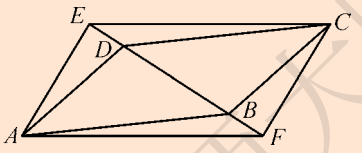
∴ $OG = OH$.

∴ 四边形 $EHFG$ 是平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）.

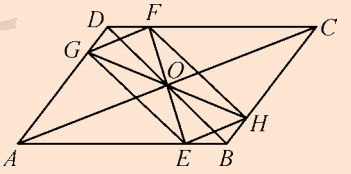
练　习

1. 在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$\angle B = \angle D$. 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

2. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，AE、CF 分别与直线 DB 相交于点 E 和点 F，且 $AE \parallel CF$，分别连结点 C、E 和点 A、F. 求证：四边形 $AFCE$ 是平行四边形.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，□$ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，直线 EF 过点 O，且与 AB、DC 分别相交于点 E 和点 F，直线 GH 过点 O 且与 AD、BC 分别相交于点 G 和点 H. 求证：四边形 $GEHF$ 是平行四边形.

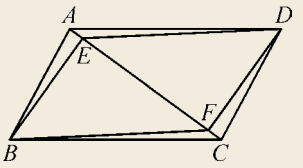
习题 18.2

1. 用两个全等的三角形，按照不同的方法拼成四边形，可以拼成几个不同的四边形？它们都是平行四边形吗？为什么？

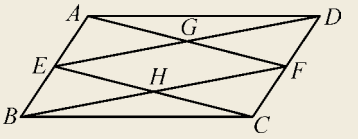
2. 如图，在□$ABCD$ 中，E、F 是对角线 AC 上的两点，$BE \perp AC$ 于点 E，$DF \perp AC$ 于点 F. 求证：四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

华东师大版电子教材

3. 如图，在$\square ABCD$中，E、F分别是边AB、CD的中点，AF与DE相交于点G，CE与BF相交于点H. 求证：四边形$EHFG$是平行四边形.

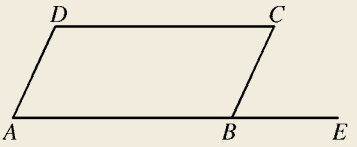


（第2题）

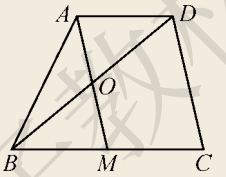


（第3题）

4. 如图，点A、B、E在同一条直线上，$AB = DC$，$\angle C = \angle CBE$. 求证：$AD = BC$.



（第4题）



（第5题）

5. 如图，在四边形$ABCD$中，M是边BC的中点，AM、BD互相平分并交于点O. 求证：$AM \parallel DC$.



阅读材料

稳定性 PK 不稳定性

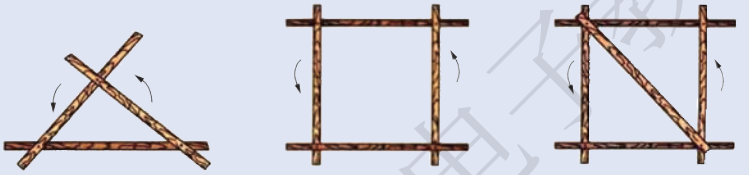
你知道英国剑桥大学的数学桥吗？那是一座古老的灰色木质桁架桥，又被称为牛顿桥，或牛顿数学桥. 传说这座桥最初是由数学家牛顿设计和制造的，没有用一根钉子. 后来有学生好奇，将桥拆下来，探究其中的奥秘，不料重新拼装时，却无法复原，只好用钉子帮忙，成为现在看到的模样. 当然这只是一个动人的传说，激励年轻学生自己动手尝试，“自己尝试”正是剑桥大学的一种优良的传统学风.

剑河上的数学桥，结构严谨，桥身相邻桁架之间都构成11.25°的夹角. 在18世纪，这种设计称为几何结构，而每根斜撑的木杆都很长，充分发挥三角形的稳定性，所以这是一座名副其实的“数学桥”.

华东师大版电子教材



你瞧,这里用到了你熟悉的三角形的稳定性. 将三根木条用钉子钉成一个三角形木架,要想扭动它,使它改变形状,那可是难上加难. 而将四根木条用钉子钉成一个四边形木架,只需轻轻一推,它就会立即变形. 但若在四边形木架上再钉上一根木条,将它的一对顶点连结起来,那就无法扭动,十分稳定了.



(1) (2) (3)

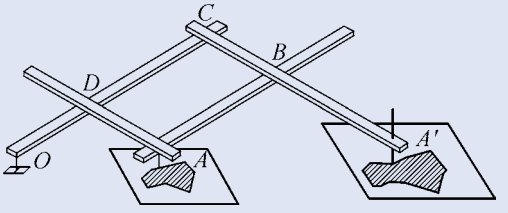
由此看来,平行四边形具有不稳定性. 但你可知道,正是这种不稳定性,给我们的生活带来了极大的方便. 例如,某些工厂和公司的电动伸缩门、商店的铁拉门、活动衣架等,要是没有平行四边形的不稳定性,它们还无法正常使用呢.







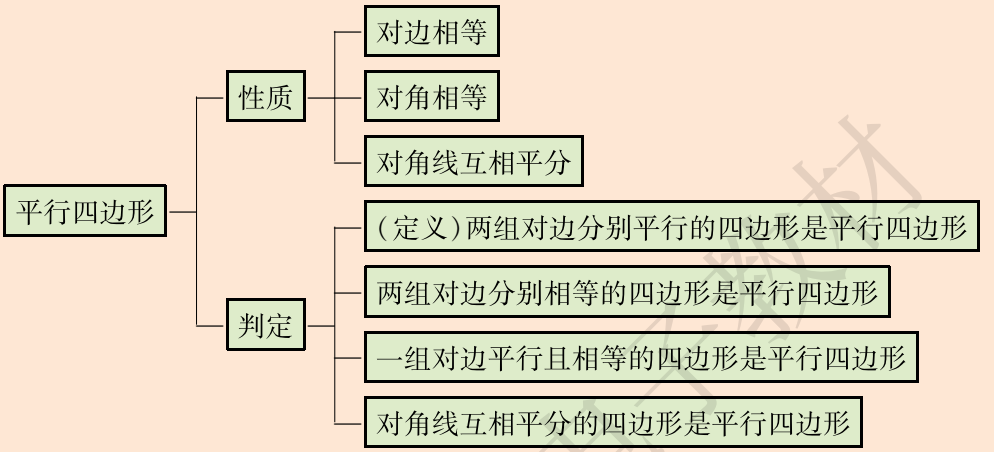
早年,一些工程技术人员还使用过一种放缩尺绘制图形,将一个原本较小的图形放大若干倍,使其更为明晰、清楚. 当然,现在有了计算机和相应的软件,已经不再需要诸如此类的简单工具了.



可见,数学广泛存在于我们的日常生活中,无论何时何地,都有数学之美!

小结

一、知识结构



二、要点

1. 本章的主要内容是平行四边形的性质与判定. 探索并证明了平行四边形的三个性质定理:平行四边形的对边相等、对角相等、对角线互相平分. 还探索并证明了平行四边形的三个判定定理:两组对边分别相等的四边形是平行四边形;一组对边平行且相等的四边形是平行四边形;对角线互相平分的四边形是平行四边形.

2. 本章把合情推理与演绎推理相结合,运用动态的变换方法,通过动手操作与多种思维方式(包括逆向思维等),探索猜想平行四边形的性质与判定方法,进而依据基本事实与一些已知的定理,通过演绎推理加以证明. 体现了“让几何动起来”的思想,展示了“探索——归纳与猜想——证明”的全过程,这是我们认识平面图形,解决相关几何问题的一种重要方法.

华东师大版电子教材

复习题

A 组

1. 判断题(对的在括号内填“✓”,错的在括号内填“×”)

(1) 平行四边形的两组对边分别平行. (　　)

(2) 平行四边形的四个内角都相等. (　　)

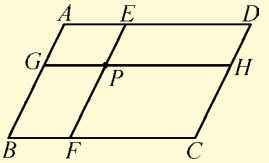
(3) 平行四边形相邻两个内角的和等于 180°. (　　)

(4) 如果平行四边形相邻两边的长分别是 3、5,那么它的周长是 16. (　　)

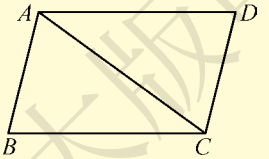
(5) 如果在$\square ABCD$ 中,$\angle A=40°$,那么$\angle B=50°$. (　　)

2. 如图,点 P 是$\square ABCD$ 内一点,过点 P 作直线 EF、GH 分别平行于 AB、BC,与$\square ABCD$ 分别交于 G、F、H、E,试找出图中的平行四边形,与你的同伴比一比,看谁找得多.

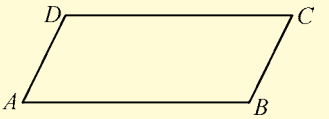
3. 如图,在$\square ABCD$ 中,$\angle BAC=68°$,$\angle ACB=36°$. 求 $\angle D$ 和 $\angle BCD$ 的大小.



(第 2 题)



(第 3 题)

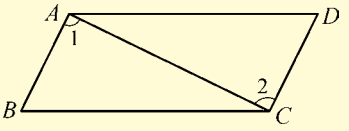


(第 4 题)

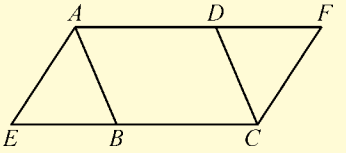
4. 如图,在$\square ABCD$ 中,$\angle A+\angle C=140°$. 求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 的大小.

5. 已知平行四边形中相邻两边的长度的比是 3∶4,其中较长的边长是 6 cm. 求这个平行四边形的周长.

6. 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$\angle B=\angle D$,$\angle 1=\angle 2$. 求证:四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



(第 6 题)



(第 7 题)

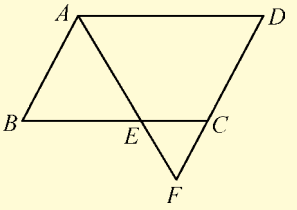
7. 如图,延长$\square ABCD$ 的边 AD 到点 F,使 $DF=DC$,延长 CB 到点 E,使 $BE=BA$,分别连结点 A、E 和点 C、F. 求证:$AE=CF$.

8. 求证:平行四边形对角线的交点到一组对边的距离相等.

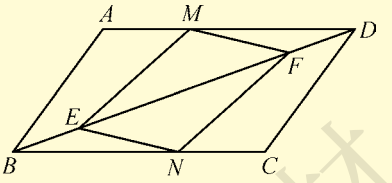
华东师大版电子教材

B 组

9. 如图，E 是$\square ABCD$ 边 BC 上的一点，且 $AB = BE$，连结 AE，并延长 AE 与 DC 的延长线交于点 F，$\angle F = 60°$. 求这个平行四边形各内角的大小.



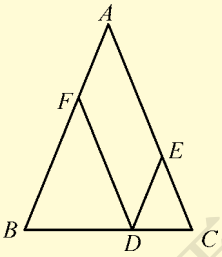
（第 9 题）



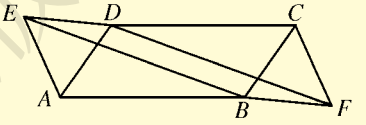
（第 10 题）

10. 如图，在$\square ABCD$ 中，点 M、N 分别在边 AD、BC 上，点 E、F 在对角线 BD 上，且 $DM = BN$，$BE = DF$. 求证：四边形 $MENF$ 是平行四边形.

11. 如图，D 是等腰三角形 ABC 底边 BC 上的一点，点 E、F 分别在边 AC、AB 上，且 $DE \parallel AB$，$DF \parallel AC$. 试问 DE、DF 与 AB 之间有什么关系？请说明理由.



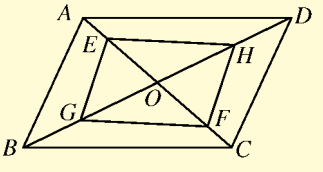
（第 11 题）



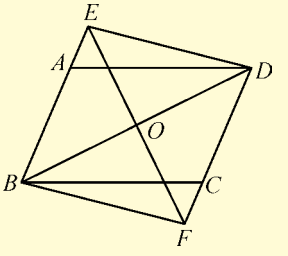
（第 12 题）

12. 如图，以$\square ABCD$ 的边 AD、BC 为边分别向外作等边三角形 ADE 和 BCF. 求证：四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

13. 如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，点 E、F 在边 AC 上，点 G、H 在边 BD 上，且 $AE = CF$，$BG = DH$. 求证：$GF = HE$.



（第 13 题）



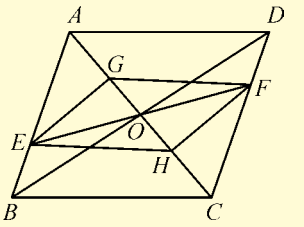
（第 14 题）

14. 如图，点 O 为$\square ABCD$ 的对角线 BD 的中点，直线 EF 经过点 O，分别交 BA、DC 的延长线于点 E、F，分别连结点 B、F 和点 D、E. 求证：四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

华东师大版电子教材

15. 如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，EF 经过点 O 且分别交 AB、CD 于点 E、F，点 G、H 分别为 OA、OC 的中点. 求证：四边形 $EHFG$ 是平行四边形.

16. 尽可能多地用各种方法画一个平行四边形.

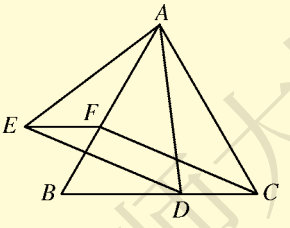


（第 15 题）

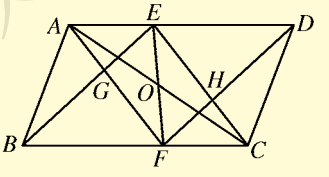
C 组

17. 如图，$\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，$CD = BF$. 求证：四边形 $CDEF$ 是平行四边形.

18. 如图，在 $\square ABCD$ 中，过对角线 AC 的中点 O 作直线 EF 分别与 AD、BC 交于点 E、F，连结 BE、AF 相交于点 G，连结 EC、FD 相交于点 H，图中有几个平行四边形，为什么？



（第 17 题）



（第 18 题）

19. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E、F 分别为边 BC、AB、AC 上的点，连结 FD，并延长至点 G. 已知 $FD \parallel AB$，你认为再增加什么条件，可以使得线段 AG 与 ED 互相平分？画出图形，试试看，相信你一定会得到满意的答案.

华东师大版电子教材

第19章　矩形、菱形与正方形



你见过这样的大门吗？它能伸缩自如，开启和关闭都十分方便．你可以看到门上含有不少几何图形，其中有你所熟悉的平行四边形，有些还是一些特殊的平行四边形．

本章将着重探索一些特殊的平行四边形的性质与判定方法．

华东师大版教材

19.1 矩　形

1. 矩形的性质

试一试

如图 19.1.1，用四根木条做一个平行四边形的活动木框，将其直立在地面上并轻轻推动，你会发现什么？

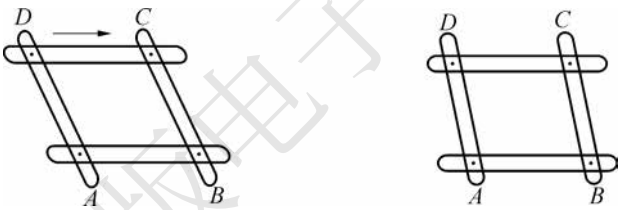


图 19.1.1

你知道为什么还保持平行四边形的形状吗？

可以发现，角的大小改变了，但不管如何，它仍然保持平行四边形的形状.

我们若改变平行四边形的内角，使其一个内角恰好为直角，就得到一种特殊的平行四边形，也就是我们早已熟悉的长方形，即**矩形**（rectangle），如图 19.1.2 所示. 矩形是有一个角为直角的平行四边形.

矩形是一种特殊的平行四边形.

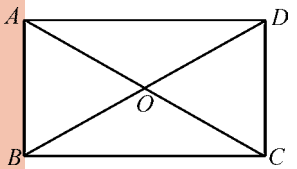


图 19.1.2

思考

作为一种特殊的平行四边形，矩形具有平行四边形的一般性质，同时也具有一些特殊的性质. 观察图 19.1.2 所示的矩形，将你的发现填入下表.

华东师大版电子教材

	对称性	边	角	对角线
平行四边形的一般性质	中心对称			
矩形的特殊性质				

我们发现，作为特殊的平行四边形，矩形既是中心对称图形，也是轴对称图形，对称轴为通过对边中点的直线.

矩形有几条对称轴?

由此，很容易猜想矩形所具有的一些特殊性质：

矩形的性质定理 1　矩形的四个角都是直角.

矩形的性质定理 2　矩形的对角线相等.

对于性质定理 1，如图 19.1.3，我们很容易根据矩形的定义和平行四边形角的性质加以证明.



图 19.1.3

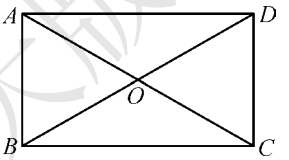


图 19.1.4

对于性质定理 2，如图 19.1.4，我们可以找到对角线 AC、BD 分别所在的三角形，借助性质定理 1 证明这两个三角形全等，从而得到结论.

请给出完整的证明过程.

例 1　如图 19.1.5，矩形 $ABCD$ 被两条对角线分成四个小三角形，如果四个小三角形周长的和是 86 cm，矩形的对角线长是 13 cm，那么该矩形的周长是多少?

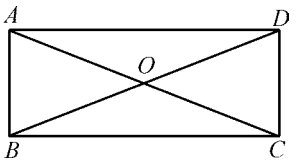


图 19.1.5

解 ∵ $\triangle AOB$、$\triangle BOC$、$\triangle COD$ 和 $\triangle AOD$ 四个小三角形周长的和为 86 cm，

$$\begin{aligned}\therefore\ & AB+BC+CD+DA+2(OA+OB+OC+OD)\\ &=AB+BC+CD+DA+2(AC+BD)\\ &=86.\end{aligned}$$

又 ∵ $AC=BD=13$（矩形的对角线相等），

$$\begin{aligned}\therefore\ AB+BC+CD+DA &=86-2(AC+BD)\\ &=86-4\times 13\\ &=34(\text{cm}),\end{aligned}$$

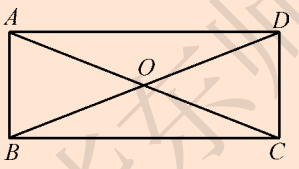
即矩形 $ABCD$ 的周长等于 34 cm.

练　习

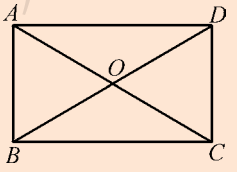
1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，试找出图中相等的线段与相等的角.

2. 如图，矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，$\angle AOD=120°$. 求证：$AC=2AB$.

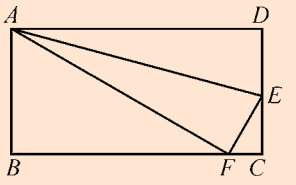
3. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 在边 CD 上. 将该矩形沿 AE 折叠，恰好使点 D 落在边 BC 上的点 F 处，如果 $\angle BAF=60°$，求 $\angle DAE$ 的大小.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

例 2　如图 19.1.6，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，$BE\perp AC$，垂足为点 E. 试求 BE 的长.

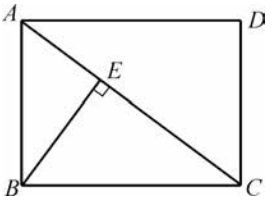


图 19.1.6

华东师大版电子教材

解 在矩形 $ABCD$ 中，$\angle ABC = 90°$，

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

又 $\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}AC \cdot BE$，

$$\therefore BE = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{3 \times 4}{5} = 2.4.$$

例 3 如图 19.1.7，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，AE 垂直且平分线段 BO，垂足为点 E，$BD = 15$ cm. 求 AC、AB 的长.

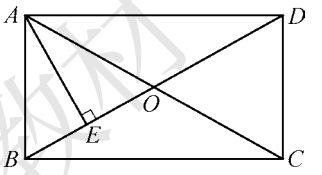


图 19.1.7

解 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AC = BD = 15$（矩形的对角线相等），

$$\therefore AO = \frac{1}{2}AC = 7.5.$$

$\because AE$ 垂直平分 BO，

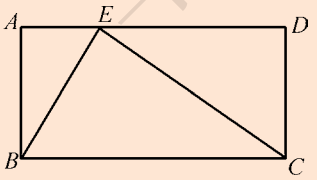
$\therefore AB = AO = 7.5.$

即 AC 的长为 15 cm，AB 的长为 7.5 cm.

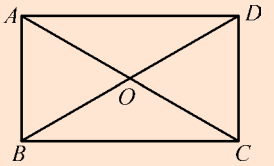
练 习

1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，E 是 AD 边上的一点. 试说明 $\triangle BCE$ 的面积与矩形 $ABCD$ 的面积之间的关系.

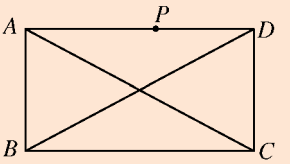
2. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$\angle AOB = 60°$，$AB = 3.6$. 求 AC 与 AD 的长.（精确到 0.1）



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，点 P 是矩形 $ABCD$ 的边 AD 上的一个动点，矩形的两条边长 AB、BC 分别为 8 和 15. 求点 P 到矩形的两条对角线 AC 和 BD 的距离之和.（提示：记对角线 AC 和 BD 的交点为点 O，连结 OP）

华东师大版电子教材

2. 矩形的判定

我们已经知道，有一个角是直角的平行四边形是矩形，这是矩形的定义，我们可以依此判定一个四边形是否是矩形. 除此之外，我们能否找到其他判定矩形的方法呢？

矩形是特殊的平行四边形，具有如下性质：

1. 四个角都是直角；
2. 两条对角线相等.

这些性质，对我们寻找判定矩形的方法有什么启示？

思考

让我们先思考有关的角. 由矩形的性质“四个角都是直角”，你可能会想到，如果一个四边形的四个角都是直角，那它肯定是一个矩形. 的确如此，但是，条件能否再减少一些，三个角是直角的四边形是矩形吗？

试一试

如图 19.1.8，作一个三个角都是直角的四边形.

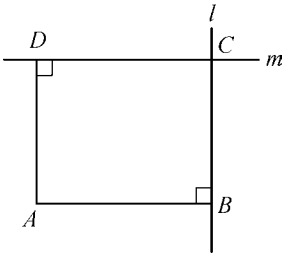


图 19.1.8

步骤：

1. 任意作两条互相垂直的线段 AB、AD；
2. 过点 B 作垂直于 AB 的直线 l；
3. 过点 D 作垂直于 AD 的直线 m，交 l 于点 C，即得一个三个角都是直角的四边形 $ABCD$.

观察你所作的图形，它是一个矩形吗？

你能证明这个结论吗？

由此可以得到判定矩形的一种方法：

矩形的判定定理 1　有三个角是直角的四边形是矩形.

华东师大版电子教材

思考

现在让我们再思考有关的线段.“对角线相等”是矩形所特有的性质.那么从对角线的角度,你可以得到关于矩形判定的什么猜想?与你的同伴交流一下,看看你们的想法是否一致、可行.

由此,我们可以得到一个猜想:“如果一个平行四边形的两条对角线相等,那么这个平行四边形是矩形.”

试一试

如图 19.1.9,作一个对角线相等的平行四边形.

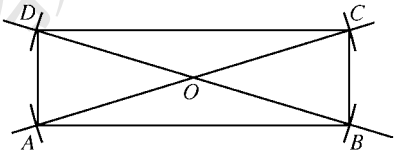


图 19.1.9

步骤:

1. 任意作两条相交的直线,交点记为 O;

2. 以点 O 为圆心、适当长为半径画弧,在两条直线上分别截取相等的四条线段 OA、OB、OC、OD;

3. 顺次连结所得的四点,即得一个对角线相等的平行四边形 $ABCD$.

和你的同伴交流一下,看看这个平行四边形是否是矩形.

由此可以得到判定矩形的另一种方法:

矩形的判定定理 2　对角线相等的平行四边形是矩形.

下面我们用演绎推理予以证明.

已知:如图 19.1.10,四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$AC = BD$.

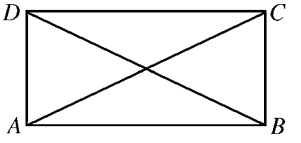


图 19.1.10

求证:四边形 $ABCD$ 是矩形.

证明　∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB \parallel DC$,

∴ $\angle ABC + \angle DCB = 180°$.

又∵ $AC = DB$, $BC = CB$,

∴ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$,

∴ $\angle ABC = \angle DCB = 90°$,

∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形(有一个角是直角的平行四边形是矩形).

华东师大版电子教材

这一判定方法在日常生活中经常被应用. 例如,木工师傅在制作门框或其他矩形形状的物体时,常用测量对角线的方法,来检验产品是否符合要求.

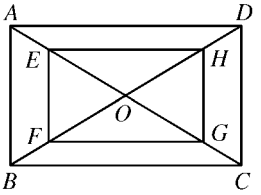


图 19.1.11

例 4 如图 19.1.11,点 O 是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 的交点,E、F、G、H 分别是 AO、BO、CO、DO 上的一点,且 $AE = BF = CG = DH$. 求证:四边形 $EFGH$ 是矩形.

分析 根据已知条件,我们可以先证明四边形 $EFGH$ 是平行四边形,再证明对角线 EG 和 FH 相等,即可得证.

证明 ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $AO = BO = CO = DO$.

∵ $AE = BF = CG = DH$,

∴ $OE = OF = OG = OH$,

∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

∵ $EO + OG = FO + OH$,

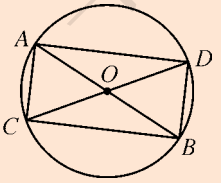
即 $EG = FH$,

∴ 四边形 $EFGH$ 是矩形(对角线相等的平行四边形是矩形).

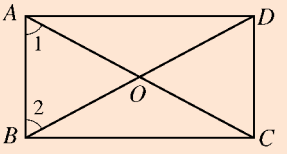
练 习

1. 如图,AB、CD 是⊙O 的两条直径,四边形 $ACBD$ 是矩形吗?证明你的结论.

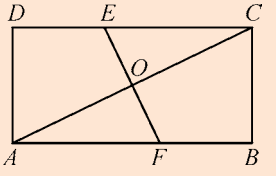
2. 如图,在▱$ABCD$ 中,$\angle 1 = \angle 2$. 此时,四边形 $ABCD$ 是矩形吗?为什么?



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$BF = DE$,AC 和 EF 互相平分并交于点 O,$\angle B = 90°$. 求证:四边形 $ABCD$ 是矩形.

华东师大版电子教材

例 5 如图 19.1.12，四边形 $ABCD$ 是由两个全等的正三角形 ABD 和 BCD 组成的，M、N 分别为 BC、AD 的中点. 求证：四边形 $BMDN$ 是矩形.

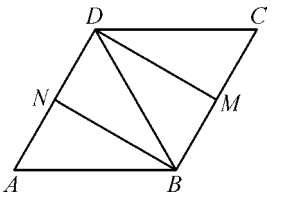


图 19.1.12

分析 由已知条件，可知 $BN \perp AD$，$DM \perp BC$，因此，在四边形 $BMDN$ 中，已有两个角是直角，只需再证明另一个角也是直角即可得到它是一个矩形.

证明 $\because$ $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 是全等的正三角形，

$\therefore$ $\angle ADB = \angle CDB = 60°$.

又$\because$ M、N 分别为 BC、AD 的中点，

$\therefore$ $BN \perp AD$，$DM \perp BC$，$\angle BDM = 30°$，

$\therefore$ $\angle DNB = \angle DMB = 90°$，

$\angle MDN = \angle ADB + \angle BDM = 90°$，

$\therefore$ 四边形 $BMDN$ 是矩形（有三个角是直角的四边形是矩形）.

例 6 如图 19.1.13，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$AD \perp BC$，垂足为点 D，AG 是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle FAC$ 的平分线，$DE \parallel AB$，交 AG 于点 E. 求证：四边形 $ADCE$ 是矩形.

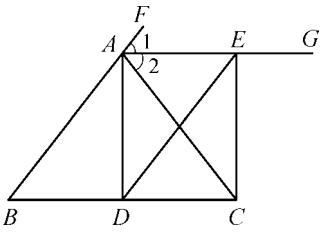


图 19.1.13

分析 根据已知条件 $AB = AC$，我们可以先通过证明四边形 $ABDE$ 是平行四边形，得到 $DE = AB = AC$，因此可以利用“对角线相等的平行四边形是矩形”这一判定定理.

证明 $\because$ $AB = AC$，$AD \perp BC$，

$\therefore$ $\angle B = \angle ACB$，$BD = DC$.

又$\because$ AE 是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle CAF$ 的平分线，

$\therefore$ $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle CAF = \frac{1}{2}(\angle B + \angle ACB) = \angle B$，

$\therefore$ $AE \parallel BC$.

又$\because$ $AB \parallel DE$，

$\therefore$ 四边形 $ABDE$ 是平行四边形，

$\therefore$ $AE = BD$，$AB = DE$，

$\therefore$ $AC = DE$，$AE = DC$.

又$\because$ $AE \parallel DC$，

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是平行四边形，

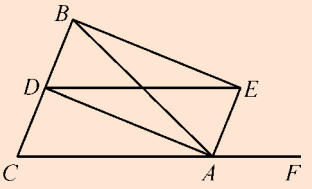
$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是矩形（对角线相等的平行四边形是矩形）.

华东师大版电子教材

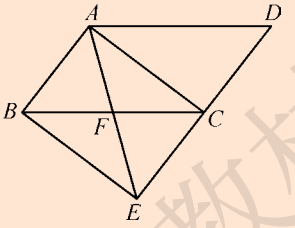
练　习

1. 如图，AD、AE 分别是 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle BAC$ 和外角 $\angle BAF$ 的平分线，$BE \perp AE$，$DA \perp BC$. 求证：四边形 $AEBD$ 是矩形.

2. 一个四边形满足：它的每个顶点到其他三个顶点的距离之和相等. 试证明该四边形为矩形.



（第 1 题）



（第 3 题）

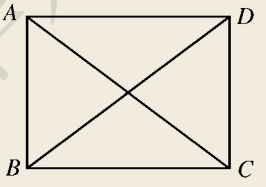
3. 如图，将 $\square ABCD$ 的边 DC 延长到点 E，使 $CE = DC$，连结 AE，交 BC 于点 F，$\angle AFC = 2\angle D$，连结 AC、BE. 求证：四边形 $ABEC$ 是矩形.

习题 19.1

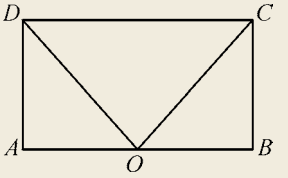
1. 如图，在 $\square ABCD$ 中，$AB = 6$，$BC = 8$，$AC = 10$.

（1）求证：四边形 $ABCD$ 是矩形；

（2）求 BD 的长.



（第 1 题）

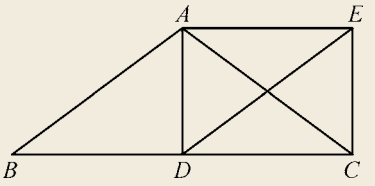


（第 2 题）

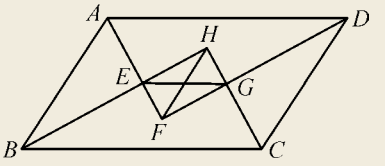
2. 如图，在 $\square ABCD$ 中，O 是边 AB 的中点，且 $\angle AOD = \angle BOC$. 求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.

华东师大版电子教材

3. 如图，在△ABC中，$AB=AC$，点D是边BC的中点. 过点A、D分别作BC与AB的平行线，并交于点E，连结EC、AD. 求证：四边形$ADCE$是矩形.



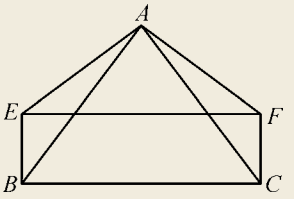
（第3题）



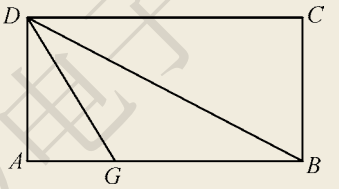
（第4题）

4. 如图，在▱$ABCD$中，AF、BH、CH、DF分别是∠DAB、∠ABC、∠BCD与∠CDA的平分线，AF与BH交于点E，CH与DF交于点G. 求证：$EG=FH$.

5. 如图，$AB=AC$，$AE=AF$，且∠EAB=∠FAC，$EF=BC$. 求证：四边形$EBCF$是矩形.



（第5题）



（第6题）

6. 如图，将矩形纸片$ABCD$折叠，先折出折痕（对角线）BD，再折叠，使边AD与对角线BD重合，得折痕DG，$AB=2$，$BC=1$. 求AG的长.（精确到0.01）（提示：作$GE\perp BD$，记垂足为点E，设$AG=x$，列出x满足的等量关系）



阅读材料

完美矩形

在房屋装修时，客厅地面铺设地砖，通常是使用同样大小的正方形地砖.

而若客厅里的矩形地面上，正方形地砖的大小各不相同，砖与砖之间、砖与墙之间没有空隙，并且能使每块地砖都保持完整，那将是多么奇特别致啊！

华东师大版电子教材

如果一个矩形内部能用一些大小各不相同的正方形铺满，既不重叠，又无缝隙，就称它为完美矩形(perfect rectangle). 完美矩形非常罕见，一旦遇到，总会立刻吸引人们注意，多看几眼.

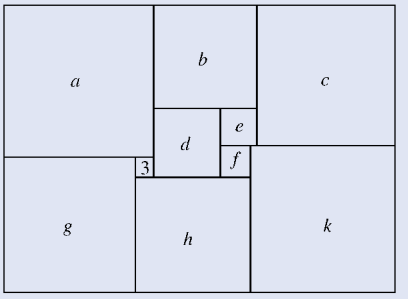


图 1

图 1 是一个完美矩形的例子. 它是用 10 个不同大小的正方形拼成的，其中最小的一个正方形内写着数字 3，表明它的边长是 3，其他正方形内用字母表示边长.

图中这些用字母表示的正方形边长各是多少？这个完美矩形的长和宽又是多少呢？

由该图可以看出各条边的长满足以下关系式：

$$\begin{aligned} a &= g + 3, \\ h &= g - 3, \\ b &= a + 3 - d, \\ e &= b - d, \\ f &= d - e, \\ h &= d + f + 3, \\ c &= b + e, \\ k &= f + h, \\ e + c &= f + k. \end{aligned}$$

这样就构成了一个九元一次方程组. 由前六个式子可得

$$g = 2d.$$

由此容易求出

华东师大版电子教材

$$a = 25,\ b = 17,\ c = 23,$$
$$d = 11,\ e = 6,\ f = 5,$$
$$g = 22,\ h = 19,\ k = 24.$$

矩形的长和宽分别是 65 和 47.

图 1 中的矩形由 10 个正方形拼成,称为 10 阶完美矩形. 这是一个非常好的例子,矩形的长和宽很小,正方形个数也相对较少.

组成完美矩形的正方形个数能不能更少些呢?

图 2 是一个 9 阶完美矩形的例子,它的长和宽分别是 33 和 32,组成它的 9 个正方形,边长从小到大,顺次是:1,4,7,8,9,10,14,15,18.

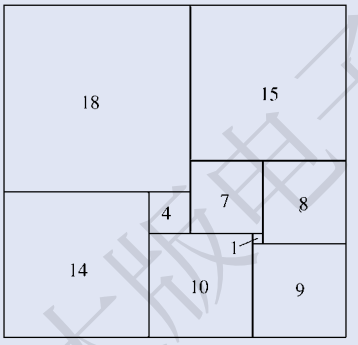


图 2

正方形的个数还能不能再减少呢? 能不能用 8 个边长各不相同的正方形拼成一个矩形?

这是不可能的,数学上已经证明,完美矩形的最低阶数是 9.

完美矩形的例子再次告诉我们,在日常生活中,隐含着许多数学道理,等待我们去研究和探索.

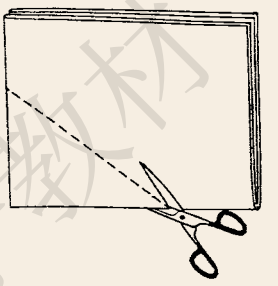
华东师大版电子教材

19.2 菱　形

1. 菱形的性质

做一做

将一张矩形的纸对折，再对折，然后沿着图中的虚线剪下，打开，你发现这是一个什么样的图形？



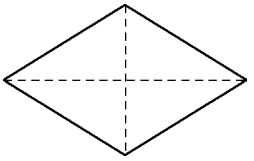


图 19.2.1

这就是另一种特殊的平行四边形，即**菱形**(rhombus).
如图 19.2.1，菱形是有一组邻边相等的平行四边形.

思考

作为一种特殊的平行四边形，菱形具有平行四边形的一般性质，同时也具有一些特殊的性质. 观察图 19.2.1 所示的菱形，将你的发现填入下表.

	对称性	边	角	对角线
平行四边形的一般性质	中心对称			
菱形的特殊性质				

菱形有几条对称轴？对称中心在哪里？

如图 19.2.2，我们发现，菱形既是中心对称图形，也是轴对称图形，对称轴为它的对角线所在的直线.

华东师大版电子教材

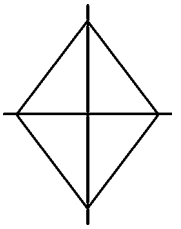


图 19.2.2

由此,很容易猜想菱形所具有的特殊性质:

菱形的性质定理 1　菱形的四条边都相等.

菱形的性质定理 2　菱形的对角线互相垂直.

对于性质定理 1,如图 19.2.3,我们很容易根据菱形的定义和平行四边形边的性质加以证明.

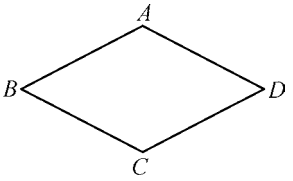


图 19.2.3

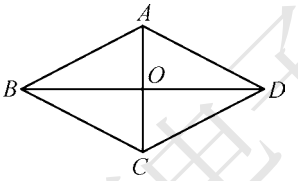
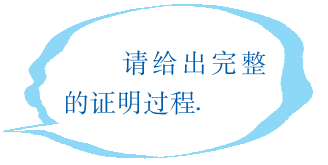


图 19.2.4

对于性质定理 2,如图 19.2.4,我们可以依据性质定理 1,找到其中的等腰三角形,由等腰三角形的“三线合一”得到结论.



例 1　如图 19.2.5,在菱形 $ABCD$ 中,$\angle BAD = 2\angle B$. 试求出 $\angle B$ 的大小,并说明 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

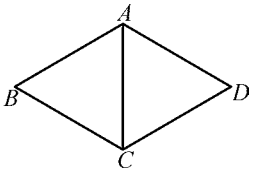


图 19.2.5

解　在菱形 $ABCD$ 中,

$\because$ $\angle B + \angle BAD = 180°$,

$\angle BAD = 2\angle B$,

$\therefore$ $\angle B = 60°$.

在菱形 $ABCD$ 中,

$\because$ $AB = BC$(菱形的四条边都相等),

$\angle B = 60°$,

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是等边三角形.

菱形的应用非常广泛. 有一种衣帽架(如下图),可以根据需要将它伸缩,形成各种形状的菱形,固定在墙上,既美观又实用.

华东师大版电子教材





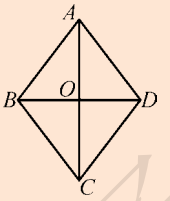
可伸缩的衣帽架

练　习

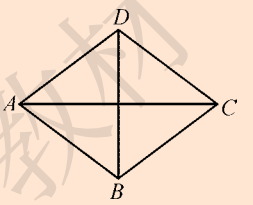
1. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB = 5$，$OA = 4$. 求菱形的周长与两条对角线的长度.

2. 试说明菱形的面积等于它的两条对角线长的乘积的一半.

3. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB = 10$，$BD = 12$. 求该菱形的面积.



（第 1 题）



（第 3 题）

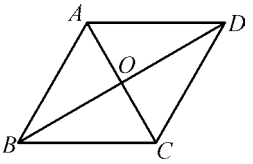


图 19.2.6

例 2　如图 19.2.6，已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2 cm，$\angle BAD = 120°$，对角线 AC、BD 相交于点 O. 试求这个菱形的两条对角线 AC 与 BD 的长.（结果保留根号）

解　∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $OB = OD$，$AB = AD$（菱形的四条边都相等）.

在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle ADO$ 中，

∵ $AB = AD$，$AO = AO$，$OB = OD$，

∴ $\triangle ABO \cong \triangle ADO$，

∴ $\angle BAO = \angle DAO = \frac{1}{2}\angle BAD = 60°$.

在 $\triangle ABC$ 中，

∵ $AB = BC$，$\angle BAC = 60°$，

∴ $\triangle ABC$ 为等边三角形，

∴ $AC = AB = 2$.

在菱形 $ABCD$ 中，

∵ $AC \perp BD$（菱形的对角线互相垂直），

∴ $\triangle AOB$ 为直角三角形，

∴ $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$，

∴ $BD = 2BO = 2\sqrt{3}$（cm）.

华东师大版电子教材

例 3 如图 19.2.7，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，AE 垂直且平分 CD，垂足为点 E. 求 $\angle BCD$ 的大小.

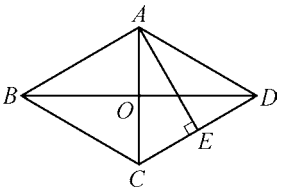


图 19.2.7

解 ∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AD = DC = CB = BA$（菱形的四条边都相等）.

又∵ AE 垂直平分 CD，

∴ $AC = AD$，

∴ $AC = AD = DC = CB = BA$，

即 $\triangle ADC$ 与 $\triangle ABC$ 都为等边三角形，

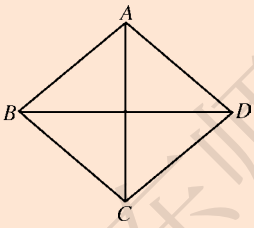
∴ $\angle ACD = \angle ACB = 60°$.

∴ $\angle BCD = 120°$.

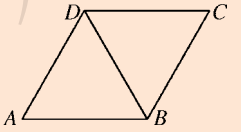
练　习

1. 如图，已知菱形 $ABCD$ 的边 AB 长 5 cm，一条对角线 AC 长 6 cm. 求这个菱形的周长和它的面积.

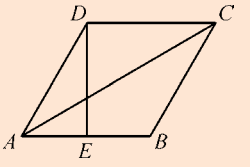
2. 如图，已知菱形 $ABCD$ 的一条对角线 BD 恰好与其边 AB 的长相等. 求这个菱形各内角的大小.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，E 是 AB 的中点，且 $DE \perp AB$，$AB = 4$. 求：

（1）$\angle ABC$ 的大小；

（2）菱形 $ABCD$ 的面积（精确到 0.1）.

2. 菱形的判定

我们已经知道，有一组邻边相等的平行四边形是菱形，这是菱形的定义. 我们可以根据定义来判定一个四边形是否是菱形. 除此之外，还能找到其他的判定方法吗？

华东师大版电子教材

菱形是特殊的平行四边形，具有如下性质：

1. 四条边都相等；

2. 两条对角线互相垂直.

这些性质，对我们寻找判定菱形的方法有什么启示呢？

思考

对于一般的四边形，如何寻找判定它是不是菱形的方法呢？由菱形的性质“四条边都相等”，你可能会想到：如果一个四边形的四条边都相等，那么它肯定是一个菱形. 试着画一画，与周围的同学讨论，猜一猜结论是否成立.

试一试

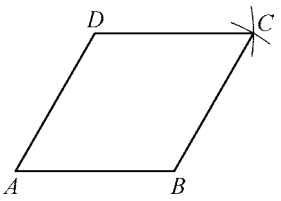


图 19.2.8

如图 19.2.8，作一个四条边都相等的四边形.

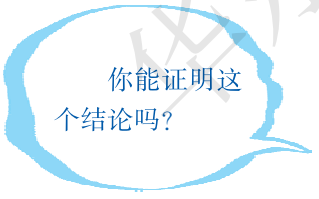
步骤：

1. 画两条相等的线段 AB、AD；

2. 分别以点 B 和点 D 为圆心、AB 长为半径画弧，两弧相交于点 C；

3. 连结 BC、CD，即得一个四条边都相等的四边形 $ABCD$.

观察你所画的图形，它是菱形吗？



由此我们可以得到判定菱形的一种方法：

菱形的判定定理 1　四条边都相等的四边形是菱形.

这里的条件能否再减少一些呢？有三条边相等的四边形是菱形吗？试着画一画，相信你很快会发现，这个结论是不成立的.

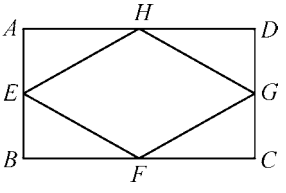


图 19.2.9

例 4　如图 19.2.9，在矩形 $ABCD$ 中，点 E、F、G、H 分别是四条边的中点，试问四边形 $EFGH$ 是什么图形？并说明理由.

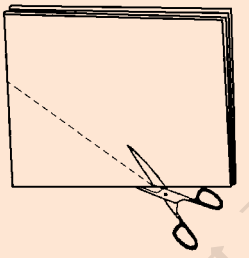
华东师大版电子教材

分析 四边形 $EFGH$ 的四条边分别属于矩形四个角上的三角形，如果能够证明这四个三角形全等，那么就可以利用菱形的判定定理 1，得出四边形 $EFGH$ 是菱形.

你能说出完整的证明过程吗？

练 习

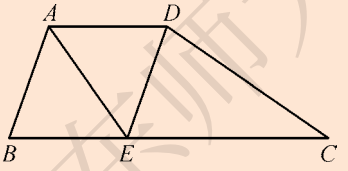
1. 你还记得做过的剪纸探索吗？如图，将一张矩形的纸对折，再对折，然后沿着虚线剪下，打开，你发现这是一个特殊的平行四边形，即菱形. 现在你能说明其中的理由吗？



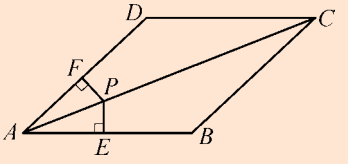
（第 1 题）

2. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB = AD$，$\angle BAD$ 的平分线 AE 交 BC 于点 E，连结 DE. 求证：四边形 $ABED$ 是菱形.

3. 如图，在 $\square ABCD$ 中，点 P 是对角线 AC 上的一点，$PE \perp AB$，$PF \perp AD$，垂足分别为点 E、F，且 $PE = PF$，$\square ABCD$ 是菱形吗？为什么？



（第 2 题）



（第 3 题）

思考

“对角线互相垂直”是菱形所特有的性质. 那么从对角线的角度，你可以得到关于菱形判定的什么猜想？与你的同伴交流一下，看看你们的想法是否一致、可行.

由此，我们可以得到一个猜想：“如果一个平行四边形的两条对角线互相垂直，那么这个平行四边形是菱形.”

华东师大版电子教材

探索

如图 19.2.10，取两根长度不等的细木棒，让两个木棒的中点重合并固定在一起，用笔和直尺画出木棒四个端点的连线. 我们知道，这样得到的四边形是一个平行四边形. 转动其中一根木棒，重复上面的做法，当两根木棒之间的夹角等于 90°时，得到的是什么图形呢？

和周围的同学交流彼此的结论.

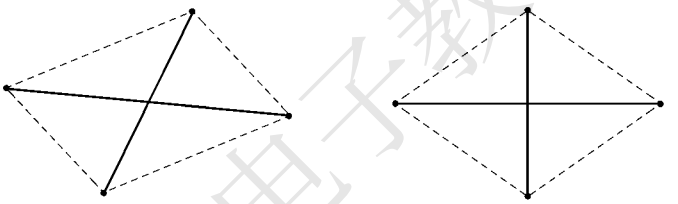


图 19.2.10

试一试

如图 19.2.11，作一个两条对角线互相垂直的平行四边形.

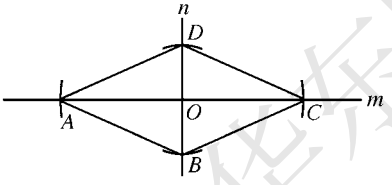


图 19.2.11

步骤：

1. 作两条互相垂直的直线 m、n，记交点为点 O；

2. 以点 O 为圆心、适当长为半径画弧，在直线 m 上截取相等的两条线段 OA、OC；

3. 以点 O 为圆心、另一适当长为半径画弧，在直线 n 上截取相等的两条线段 OB、OD；

4. 顺次连结所得的四点，即得一个对角线互相垂直且平分的四边形 $ABCD$，显然，它是一个对角线互相垂直的平行四边形.

和你的同伴交流一下，看看它是否也是一个菱形.

华东师大版电子教材

这就是判定菱形的另一种方法：

菱形的判定定理 2　对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

结论的证明很简单. 如图 19. 2. 12，在▱*ABCD* 中，对角线 *AC*、*BD* 互相垂直，只需证明有一组邻边相等，即可得到▱*ABCD* 是菱形.

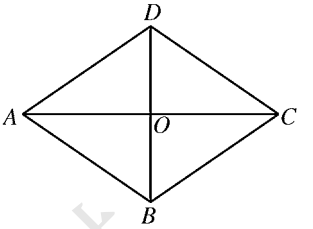


图 19. 2. 12

证明　∵ 四边形 *ABCD* 是平行四边形，

∴ *OA* = *OC*.

又 ∵ *AC* ⊥ *BD*，

∴ *BD* 所在直线是线段 *AC* 的垂直平分线，

∴ *AB* = *BC*，

∴ 四边形 *ABCD* 是菱形（有一组邻边相等的平行四边形是菱形）.

例 5　如图 19. 2. 13，已知矩形 *ABCD* 的对角线 *AC* 的垂直平分线与边 *AD*、*BC* 分别交于点 *E*、*F*. 求证：四边形 *AFCE* 是菱形.

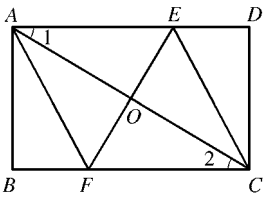


图 19. 2. 13

分析　要证四边形 *AFCE* 是菱形，由已知条件可知 *EF* ⊥ *AC*，所以只需证明四边形 *AFCE* 是平行四边形，又知 *EF* 垂直平分 *AC*，所以只需证明 *OE* = *OF*.

证明　∵ 四边形 *ABCD* 是矩形，

∴ *AE* // *FC*，

∴ ∠1 = ∠2.

∵ *EF* 平分 *AC*，

∴ *OA* = *OC*.

又 ∵ ∠*AOE* = ∠*COF* = 90°，

∴ △*AOE* ≌ △*COF*，

∴ *OE* = *OF*，

∴ 四边形 *AFCE* 是平行四边形.

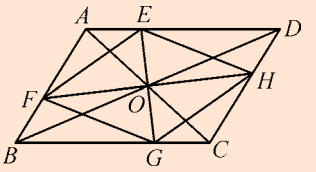
又 ∵ *EF* ⊥ *AC*，

∴ 四边形 *AFCE* 是菱形（对角线互相垂直的平行四边形是菱形）.

华东师大版电子教材

练　习

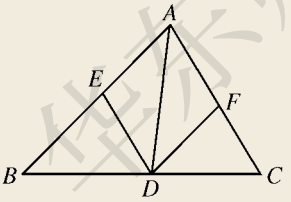
1. 作一个菱形，使它的两条对角线的长分别为 6 cm 和 8 cm，并说明其理由.
2. 如图，过□*ABCD* 的对角线的交点 *O*，作互相垂直的两条直线 *EG*、*FH*，与□*ABCD* 各边分别相交于点 *E*、*F*、*G*、*H*. 求证：四边形 *EFGH* 是菱形.
3. 设计一个由一条对角线在同一条直线上的四个菱形交叉组成的花边图案，其长为 15 cm，宽为 4 cm，试画出它的图形.



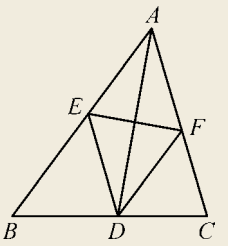
（第 2 题）

习题 19.2

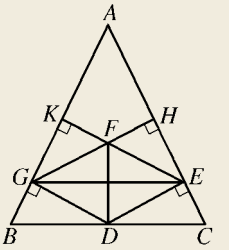
1. 已知菱形 *ABCD* 的两条对角线 *AC*、*BD* 的长分别为 6 cm 和 8 cm. 求这个菱形的周长和它的面积.
2. 如图，*AD* 是△*ABC* 的一条角平分线，*DE* // *AC* 交 *AB* 于点 *E*，*DF* // *AB* 交 *AC* 于点 *F*. 求证：四边形 *AEDF* 是菱形.
3. 如图，*AD* 是∠*BAC* 的平分线，*AD* 的垂直平分线交 *AB* 于点 *E*，交 *AC* 于点 *F*. 求证：四边形 *AEDF* 是菱形.



（第 2 题）



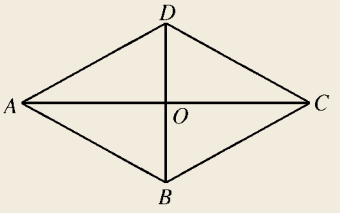
（第 3 题）



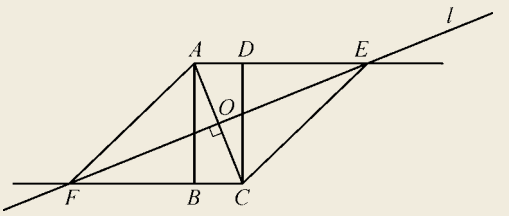
（第 4 题）

4. 如图，在△*ABC* 中，*AB* = *AC*，点 *D* 是 *BC* 的中点，*DE* ⊥ *AC* 于点 *E*，*DG* ⊥ *AB* 于点 *G*，*EK* ⊥ *AB* 于点 *K*，*GH* ⊥ *AC* 于点 *H*，*EK* 和 *GH* 相交于点 *F*. 求证：*GE* 与 *FD* 互相垂直平分.
5. 如图，菱形 *ABCD* 的周长为 2*p*，对角线 *AC*、*BD* 相交于点 *O*，*AC* + *BD* = *q*. 求菱形 *ABCD* 的面积.（提示：利用两数和的平方公式 $(AC + BD)^2 = AC^2 + 2 \cdot AC \cdot BD + BD^2$ 与勾股定理）

华东师大版电子教材



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，四边形 $ABCD$ 是矩形，直线 l 垂直平分线段 AC，垂足为点 O，直线 l 分别与线段 AD、CB 的延长线交于点 E、F. 求证：四边形 $AFCE$ 为菱形.

19.3 正方形

正方形（square）是我们早已熟悉的平面图形，它既是中心对称图形，也是轴对称图形，具有如下性质：

1. 四条边都相等；

2. 四个角都是直角；

3. 对角线相等且互相垂直平分.

因此，正方形可以看成：

有一个角是直角的菱形；

有一组邻边相等的矩形.

正方形有几条对称轴？它的对称中心在哪里？

例 1 如图 19.3.1，已知正方形 $ABCD$. 求 $\angle ABD$、$\angle DAC$、$\angle DOC$ 的大小.

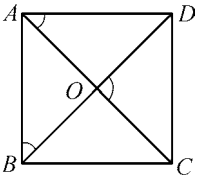


图 19.3.1

请写出完整的解答过程.

分析 由正方形的特殊性质，可知 $\angle DOC = 90°$. 易证 $\triangle ABO \cong \triangle CBO$，从而可得 $\angle ABD = \frac{1}{2} \times 90° = 45°$，同理可得 $\angle DAC = 45°$.

华东师大版电子教材

讨论

老师给学生一个任务：从一张彩色纸中剪出一个正方形.

小明剪完后，这样检验它：比较边的长度，发现四条边是相等的，于是就判定自己完成了这个任务. 这种检验可信吗？

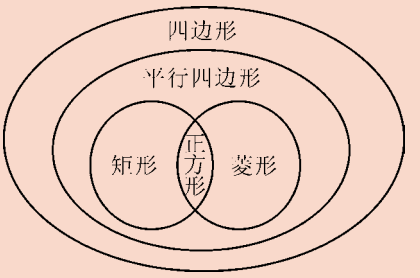
小兵用另一种方法检验：他量的不是边，而是对角线，发现对角线是相等的，于是就认为自己正确地剪出了正方形. 这种检验对吗？

小英剪完后，比较了由对角线相互分成的4条线段，发现它们是相等的. 按照小英的意见，这说明剪出的四边形是正方形. 你的意见怎样？

你认为应该如何检验，才能又快又准确呢？

读一读

我们在平行四边形的学习基础上，又探索研究了矩形、菱形、正方形的一些内容. 这些几何图形之间的相互关系如图所示.



矩形、菱形都是特殊的平行四边形，因而既具有平行四边形的一般性质，又具有它们自己的特殊性质.

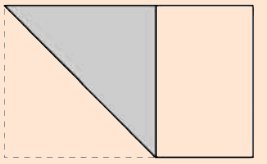
正方形是特殊的矩形，也是特殊的菱形，它具有更多的性质.

我们在研究几何图形时，必须关注这种一般与特殊的关系，从而更好地认识各种几何图形，顺利解决各类问题.

华东师大版电子教材

练　习

1. 把一张矩形纸片如图那样折一下，就可以裁出正方形纸片，为什么？



（第 1 题）

2. 判断下列命题是否正确：

（1）正方形有四条对称轴；

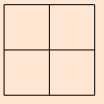
（2）正方形的两条对角线将其分成 4 个全等的等腰直角三角形；

（3）对角线互相垂直的矩形是正方形；

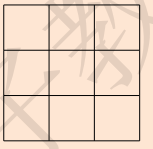
（4）对角线相等的菱形是正方形.

3. 在下列各方格图中，有多少个正方形？有多少个矩形？

（1）



（2）



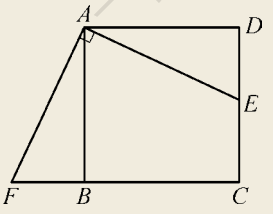
（第 3 题）

4. 已知正方形纸片 $ABCD$ 的边 AB 长 2 cm. 求这个正方形的周长、对角线长和面积.（长度精确到 0.1 cm）

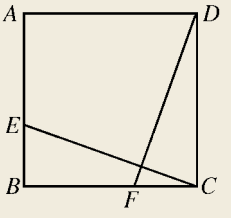
习题 19.3

1. 如图，点 E 是正方形 $ABCD$ 的边 CD 上的一点，点 F 是 CB 的延长线上的一点，且 $EA \perp AF$. 求证：$DE = BF$.

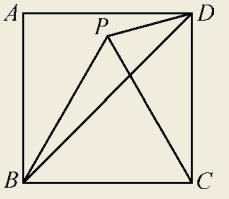
2. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，$CE \perp DF$. 求证：$CE = DF$.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，$\triangle BPC$ 是等边三角形. 求 $\triangle BPD$ 的面积.（精确到 0.01）（提示：$S_{\triangle BPD} = S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PCD} - S_{\triangle BCD}$）

华东师大版电子教材

阅读材料

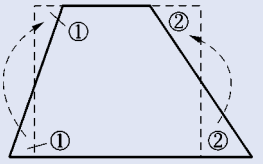


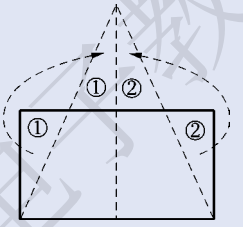
四边形的变身术

我们知道，一个平行四边形总可以剪开拼成一个矩形.

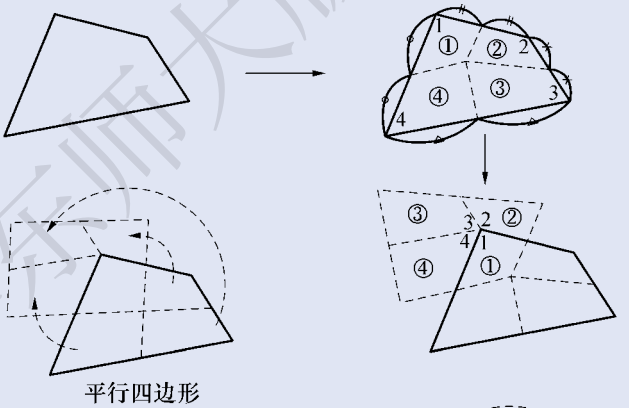


一个梯形可以剪开拼成一个矩形，一个矩形可以剪开拼成一个三角形.

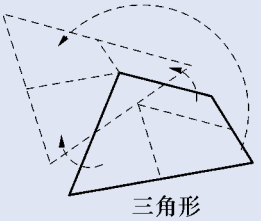




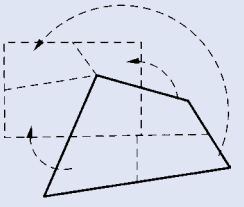
那么任意一个四边形呢？它也可以剪开拼成各种各样的图形. 下面给出了一些剪拼的示意图，观察一下，你也试试看.



平行四边形



三角形



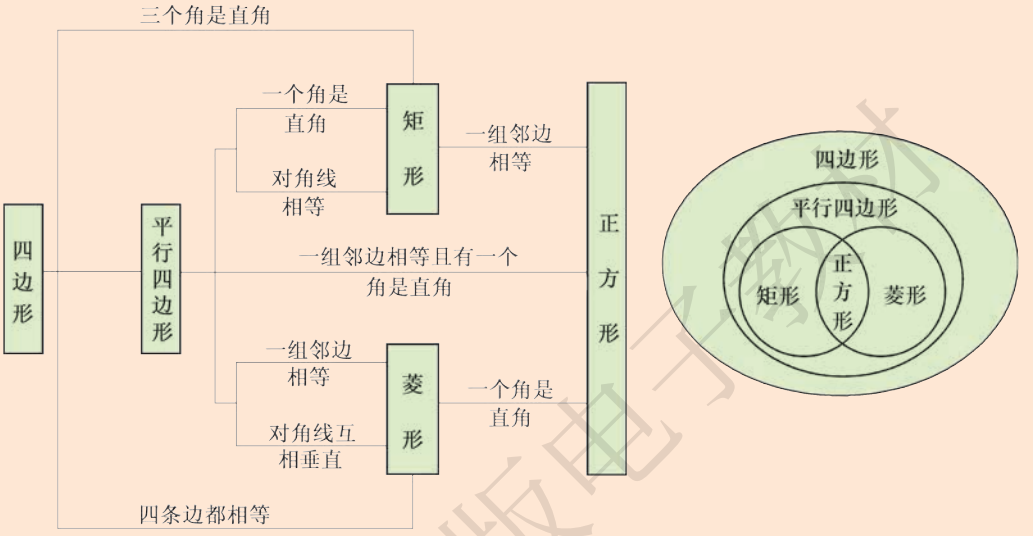
矩形

想想看，在这些剪拼过程中，都用到了图形的什么变换？

华东师大版电子教材

小结

一、知识结构



二、要点

1. 本章探索了几种特殊的平行四边形的性质与判定方法，学会了解决一些简单的度量问题.

2. 矩形、菱形、正方形作为特殊的平行四边形，不仅具有平行四边形的一般性质，都是中心对称图形，而且还是轴对称图形，分别具有一些独特的性质.

3. 本章对于矩形、菱形、正方形的研究，继续采用合情推理与演绎推理相结合的方法，在动态的变换过程中，探索发现这些图形的性质和判定方法，进而通过演绎推理加以证明. 让学生经历“探索——归纳与猜想——证明”的全过程，从而丰富数学活动经验，提高数学学习能力.

华东师大版电子教材

复习题

A 组

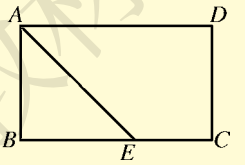
1. 在$\square ABCD$中，对角线AC和BD相交于点O.

（1）如果$\angle ABO + \angle ADO = 90°$，那么$\square ABCD$一定是_____形；

（2）如果$\angle AOB = \angle AOD$，那么$\square ABCD$一定是_____形；

（3）如果$AB = BC$，$AC = BD$，那么$\square ABCD$一定是_____形.

2. 如图，在矩形$ABCD$中，相邻两边AB、AD的长度分别为15 cm和25 cm，$\angle BAD$的平分线与边BC相交于点E. 试求BE与CE的长度.



（第2题）

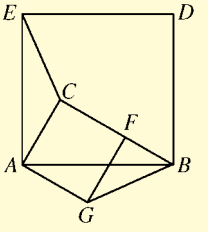
3. 已知正方形纸片$ABCD$的一条对角线AC的长为4 cm. 求它的边长和面积.（长度精确到0.1 cm）

4. 已知菱形的周长为20 cm，两个相邻的内角的度数之比为1∶2. 求较短的对角线长.

5. 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle B = \angle D = 90°$，$AB = CD$. 求证：四边形$ABCD$是矩形.



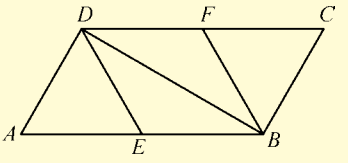
（第5题）



（第6题）

6. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB = 90°$，四边形$ABDE$、$AGFC$都是正方形. 求证：$BG = EC$.

7. 如图，在$\square ABCD$中，$\angle DAB = 60°$，$AB = 2AD$，点E、F分别是AB、CD的中点. 求证：四边形$DEBF$是菱形.

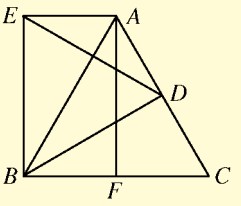


（第7题）

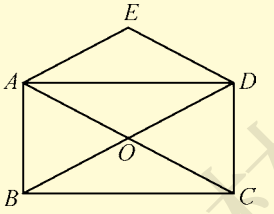
华东师大版电子教材

B 组

8. 如图，在等边△*ABC* 中，点 *D* 是 *AC* 的中点，点 *F* 是 *BC* 的中点，以 *BD* 为边作等边△*BDE*，连结点 *A*、*E*. 求证：四边形 *AEBF* 为矩形.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，矩形 *ABCD* 的对角线相交于点 *O*，*DE* // *CA*，*AE* // *BD*.

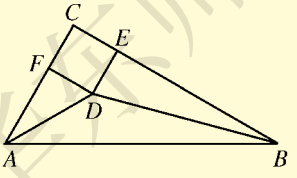
（1）求证：四边形 *AODE* 是菱形；

（2）若将题设中“矩形 *ABCD*”这一条件改为“菱形 *ABCD*”，其余条件不变，则四边形 *AODE* 是怎样的四边形？请给出证明.

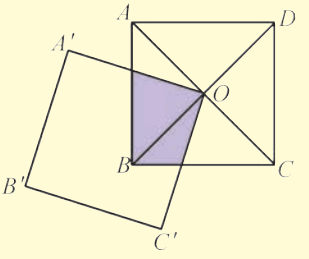
10. 如图，在△*ABC* 中，∠*C* = 90°，∠*CAB*、∠*CBA* 的平分线相交于点 *D*，*DE* ⊥ *BC* 于点 *E*，*DF* ⊥ *AC* 于点 *F*. 求证：

（1）四边形 *CFDE* 是矩形；

（2）四边形 *CFDE* 是菱形.



（第 10 题）



（第 11 题）

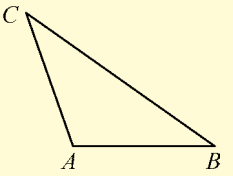
11. 如图，正方形 *ABCD* 的对角线相交于点 *O*，点 *O* 又是另一个正方形 *A′B′C′O* 的一个顶点. 如果两个正方形的边长相等，那么正方形 *A′B′C′O* 绕点 *O* 无论怎样旋转，两个正方形重叠部分的面积总等于一个正方形面积的四分之一. 想一想，这是为什么？

12. 尽可能多地用各种方法画一个矩形与菱形.

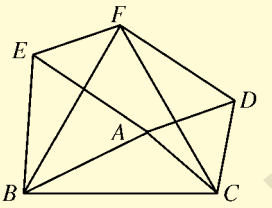
华东师大版电子教材

C 组

13. 如图，在△*ABC* 中，边 *BC* 上是否存在点 *P*，过点 *P* 分别作 *AB*、*AC* 的平行线，交 *AC* 和 *AB* 于点 *D*、*E*，使四边形 *ADPE* 为菱形？请说明理由.



（第 13 题）



（第 14 题）

14. 如图，根据图形解答下列问题：

（1）以△*ABC* 的三边为边分别作等边△*ACD*、△*ABE*、△*BCF*，判断四边形 *ADFE* 的形状.

（2）在题(1)中，是否一定存在▱*ADFE*？若存在，写出△*ABC* 应满足的条件；若不一定存在，请说明理由.

（3）△*ABC* 满足什么条件时，四边形 *ADFE* 是矩形？

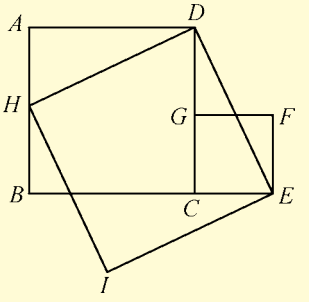
（4）△*ABC* 满足什么条件时，四边形 *ADFE* 是菱形？

（5）△*ABC* 满足什么条件时，四边形 *ADFE* 是正方形？

15. 如图，已知正方形 *ABCD* 与 *CEFG*，连结 *DE*，以 *DE* 为边作正方形 *EDHI*. 试用该图形证明勾股定理：

$$CD^2 + CE^2 = DE^2.$$

（提示：运用面积割补法）



（第 15 题）

华东师大版电子教材

综合与实践

图形的等分

如图 1,将一张矩形纸片顺着中缝翻折,其折痕,也就是一组对边中点的连线所在的直线,将这个矩形一分为二,两部分的形状与大小完全一样. 我们现在探究的图形的等分,着眼于面积的等分. 那么是否还存在其他直线,也能将这个矩形分成面积相等的两部分呢? 你肯定会说,那当然有! 对角线所在的直线也可以(如图 2). 你还能发现其他直线吗? 它们之间有什么共同的规律呢?

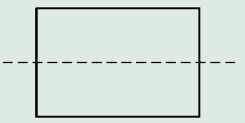


图 1

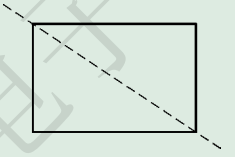


图 2

如果想用两条直线将一个矩形分成面积相等的四部分,那么应该如何画出这两条直线呢? 你可能马上想到两组对边中点的连线所在的直线与两条对角线所在的直线(如图 3). 你还能找到其他直线吗? 它们之间又有什么规律呢?

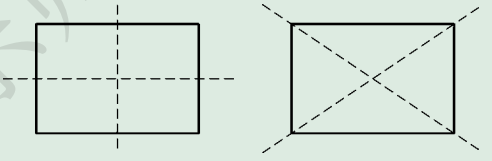


图 3

我们知道,矩形是一种特殊的平行四边形,对于一般的平行四边形(如图 4),是否和矩形一样,也存在这样的直线,将其面积二等分,或进一步将其面积四等分? 它们之间又有什么规律呢?

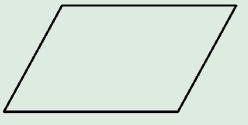


图 4

华东师大版电子教材

进一步，平行四边形是一种特殊的中心对称图形，你的发现是否可以引申到一般的中心对称图形（如图 5）？或许至少可以找到使其面积二等分的直线. 动手试一试，相信你一定能找到合适的办法，得到有意义的结果.

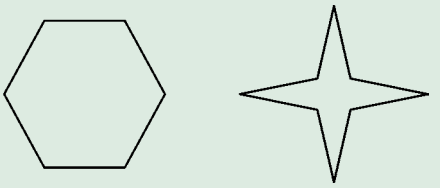
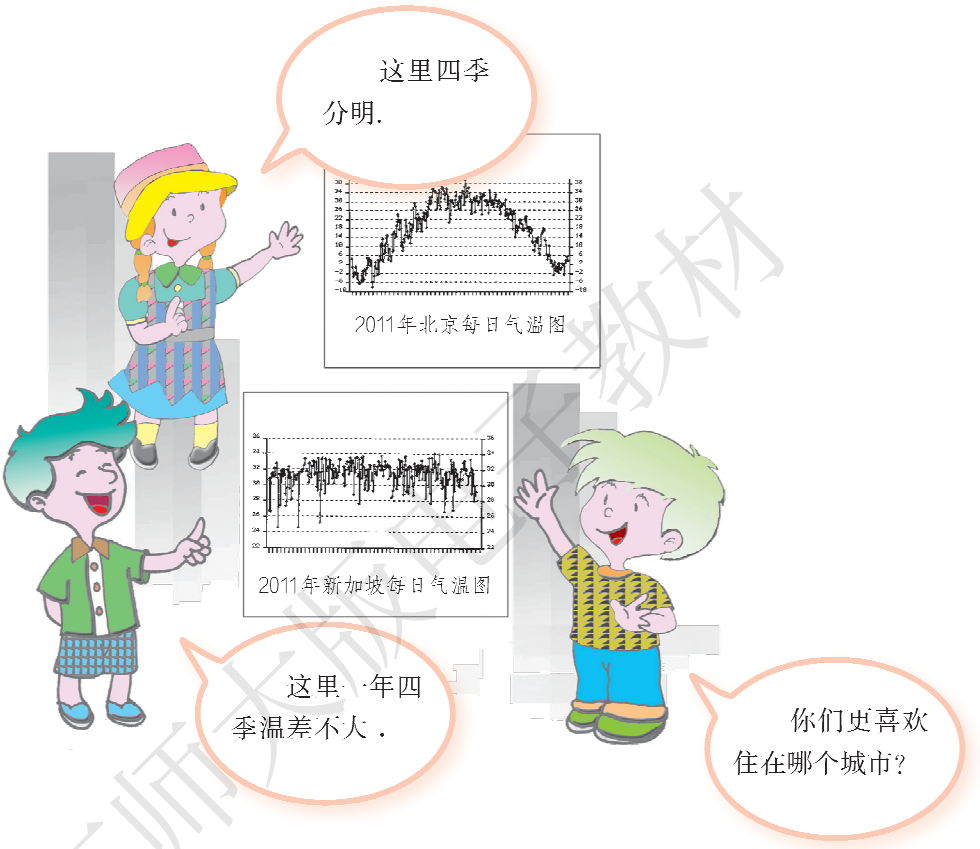


图 5

华东师大版电子教材

第20章　数据的整理与初步处理



从图上看，一年中北京气温变化的幅度比新加坡气温变化的幅度大，但是你知道如何通过计算比较这两地气温变化幅度的大小吗?

这一章我们将共同探讨如何选取合适的指标概括一组数据，如何比较两组数据的变化幅度. ▶▶▶

华东师大版电子教材

20.1 平均数

1. 平均数的意义

解决一些与不确定现象有关的问题，常常离不开收集和分析数据，数据是我们思考的基础. 那么，有了一组数据以后，怎样表达和概括这组数据呢？能否找到某些指标作为这组数据的代表呢？

我们在小学阶段已经学过的**平均数**（mean）就经常被用来作为一组数据的代表.

回顾

表 20.1.1 给出了某户居民 2010 年全年的水费缴纳情况（每两个月计费一次），请你帮这户居民算一算：平均每月缴纳多少水费？

表 20.1.1　某户居民 2010 年缴纳水费统计表

月份	2	4	6	8	10	12
水费（元）	50.60	34.60	41.40	46.00	39.20	27.60

例 1　植树节到了，某单位组织职工开展植树竞赛，图 20.1.1 反映的是植树量与人数之间的关系.



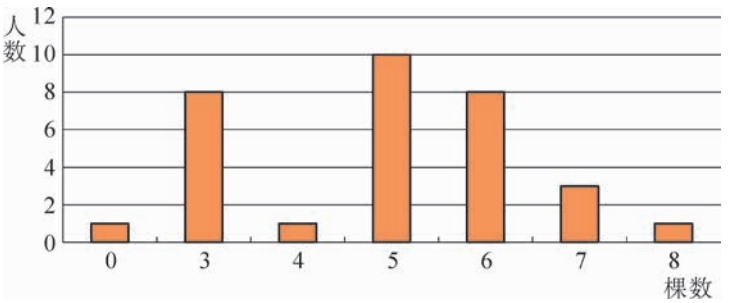


图 20.1.1　参加活动者植树量统计图

华东师大版电子教材

请根据图中信息计算：

（1）总共有多少人参加了本次活动？

（2）总共植树多少棵？

（3）平均每人植树多少棵？

植树竞赛的冠军植了多少棵树？

解 （1）参加本次活动的总人数是 $1+8+1+10+8+3+1=32$（人）.

（2）总共植树 $3\times8+4\times1+5\times10+6\times8+7\times3+8\times1=155$（棵）.

（3）平均每人植树 $\frac{155}{32}\approx4.8$（棵）.

思考

你发现了植树总量、植树量的平均数和人数这三者之间的数量关系吗？你能解释“平均每人植树 4.8 棵”的含义吗？

例 2 丁丁所在的八年级（1）班共有学生 40 人. 图 20.1.2 是该校八年级各班学生人数分布情况.

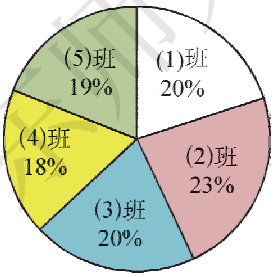


图 20.1.2

某校八年级各班学生人数分布图

（1）请计算该校八年级每班平均学生人数；

（2）请计算各班学生人数，并绘制条形统计图.

解 （1）该校八年级学生总数为 $40\div20\%=200$（人），

每班平均学生人数为 $200\div5=40$（人）.

华东师大版电子教材

(2) 八年级(2)班：200 × 23% = 46(人)；

八年级(3)班：200 × 20% = 40(人)；

八年级(4)班：200 × 18% = 36(人)；

八年级(5)班：200 × 19% = 38(人).

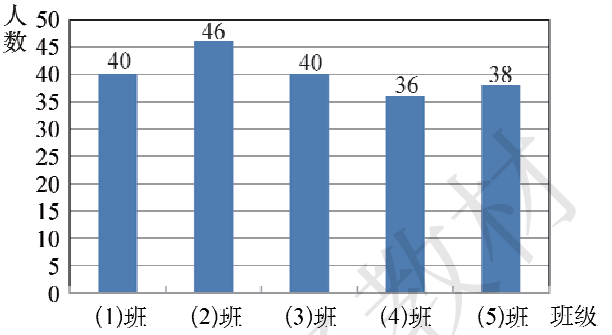


图 20.1.3(a) 某校八年级各班学生人数统计图

思考

如图 20.1.3(b)，在你所绘制的条形统计图中画出一条代表平均人数 40 的水平线. 图中代表各班人数的五个条形，有的高于这条水平线，有的低于这条水平线. 想一想，水平线上方超出部分与下方不足部分在数量上有什么关系？

将水平线上方的超出部分剪下来，是否恰好填满下方的不足部分？

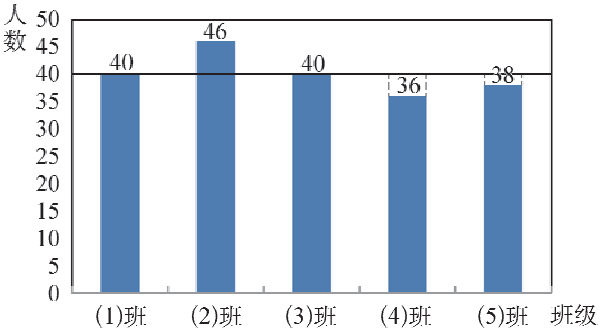


图 20.1.3(b) 某校八年级各班学生人数统计图

广东教育出版社电子教材

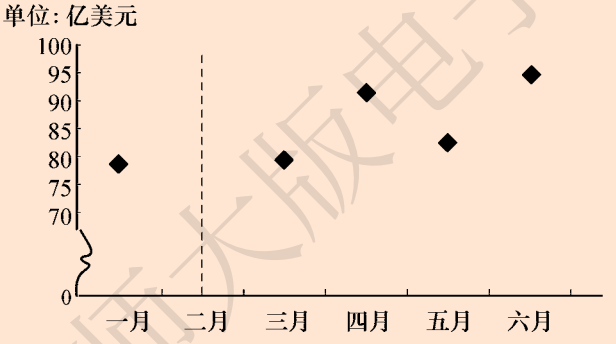
练　习

1. 甲、乙两所学校号召学生向希望小学捐赠图书. 已知甲校 800 名学生平均每人捐书 4.5 本；乙校学生比甲校少 80 人. 如果要达到相同的捐书总量，那么乙校学生平均每人要捐书多少本？



（第 1 题）

2. 某省统计数据显示，2005 年上半年平均每月进出口总额为 82.445 亿美元. 如图是根据该省 2005 年上半年每月的进出口总额情况绘制的. 不计算上半年的进出口总额，你能将缺少的一点补在虚线恰当的位置上吗？



某省 2005 年上半年每月进出口总额统计图

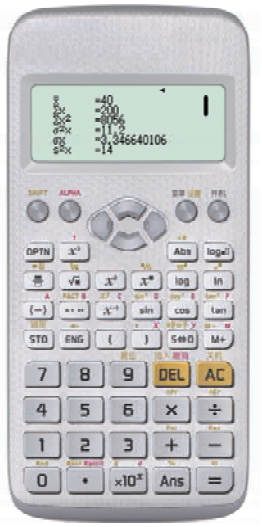
（第 2 题）

2. 用计算器求平均数

当数据个数很多时，用计算器计算平均数显得非常简便. 我们只要按照指定的顺序按键，便可得到计算结果.

以例 2 中八年级各班学生人数这组数据为例，按键顺序如下：

华东师大版电子教材



（1）开机，打开计算器；

（2）菜单 2 1，启动“单变量统计”计算功能；

（3）40 = 46 = 40 = 36 = 38 = AC，输入所有数据；

（4）OPTN 2，即可获得这组数据的统计值，其中平均数 $\bar{x} = 40$.

你可以根据计算器使用说明书动手试一试，了解怎样修改已经输入的数据，怎样简便地输入多个相同数据.

练　习

1. 试用计算器算出以下各组数据的平均数：

（1）5，5，6，6，6，7，8，8，8，8；

（2）2.578，3.64，9.8，4.6523；

（3）41，32，53，43，56，26，37，58，69，15.

2. 已知一组数据的平均数等于7，判断下列说法是否正确，若不正确，请举出一个反例：

（1）如果这组数据共有三个，且其中一个大于7，那么必有一个小于7；

（2）如果这组数据共有四个，且其中两个小于7，那么必有两个大于7.

3. 加权平均数

在日常生活中，我们经常会与平均数打交道，但有时发现以前计算平均数的方法并不适用. 请看下面的例子：

（1）商店里有两种苹果，一种单价为3.50元/千克，另一种单价为6元/千克. 小明妈妈买了单价为3.50元/千克的苹果1千克，单价为6元/千克的苹果3千克，那么小明妈妈所买苹果的平均价格是两个单价相加除以2吗？为什么？

你认为应该如何计算所买苹果的平均价格？

华东师大版电子教材

（2）老师在计算学生每学期的总评成绩时，并不是简单地将一个学生的平时成绩与考试成绩相加除以 2，而是按照“平时成绩占 40%，考试成绩占 60%”的比例计算（如图 20.1.4），其中考试成绩更为重要. 这样，如果一个学生的平时成绩为 70 分，考试成绩为 90 分，那么他的学期总评成绩就应该为

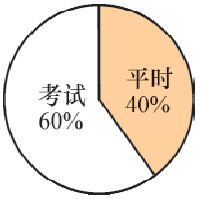


图 20.1.4

$$70 \times 40\% + 90 \times 60\% = 82(\text{分}).$$

一般来说，由于各个指标在总结果中占有不同的重要性，因而会被赋予不同的权重，上例中的 40% 与 60% 就是平时成绩与考试成绩在学期总评成绩中的权重，最后计算得到的学期总评成绩 82 分就是上述两个成绩的**加权平均数**（weighted mean）.

试一试

小青七年级第二学期的数学成绩分别为：测验一得 89 分，测验二得 78 分，测验三得 85 分，期中考试得 90 分，期末考试得 87 分. 如果按照图 20.1.5 所显示的平时、期中、期末成绩的权重，那么小青该学期的总评成绩是多少分？

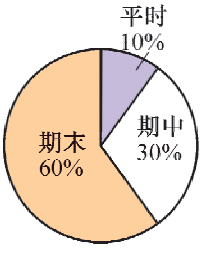


图 20.1.5

问题

某公司对应聘者 A、B、C、D 进行面试，并按三个方面给应聘者打分，每个方面满分 20 分，最后打分结果如表 20.1.2 所示. 如果你是人事主管，会录用哪一位应聘者？

表 20.1.2　四位应聘者的面试成绩

	A	B	C	D
专业知识	14	18	17	16
工作经验	18	16	14	16
仪表形象	12	11	14	14

华东师大版电子教材

思考

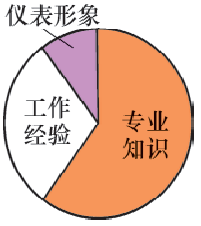


图 20.1.6

对上述问题，甲同学说：看谁的总分高就录用谁. 通过计算可以发现 D 的总分最高，应被录用.

这时乙同学说：我有不同意见. 三个方面满分都是 20 分，但按理这三个方面的重要性应该有所不同，比如专业知识就应该比仪表形象更重要.

假设上述三个方面的重要性之比为 6∶3∶1（如图 20.1.6），那么应该录用谁呢？

因为 6∶3∶1 = 60%∶30%∶10%，所以专业知识、工作经验与仪表形象这三个方面的权重分别是 60%、30% 与 10%. 这样 A 的最后得分为

$$14 \times 60\% + 18 \times 30\% + 12 \times 10\% = 15.$$

如果这三个方面的重要性之比为 10∶7∶3，此时三个方面的权重各是多少？哪一位应被录用呢？

请你根据这样的权重要求，继续算出另三位应聘者的最后得分. 从你的计算结果看，谁应被录用？

练　习

1. 某人在 A 商店买了 2 包饼干，单价是 2.20 元. 走了没多远，看见 B 商店也有卖这种饼干的，每包 1.80 元，于是他又买了 3 包. 请先估计一下他买 5 包饼干的平均价格是小于、等于还是大于 2 元，然后再算出 5 包饼干的平均价格，看看你的估计对不对.
2. 一架电梯的最大载重是 1 000 千克. 现有 13 位“重量级”的乘客要搭乘电梯，已知其中 11 位先生的平均体重是 80 千克，2 位女士的平均体重是 70 千克. 请问他们能否一起安全地搭乘这架电梯？他们的平均体重是多少千克？
3. 一家小吃店原有三个品种的馄饨，其中菜馅馄饨的售价为 3 元/碗，鸡蛋馅馄饨的售价为 4 元/碗，肉馅馄饨的售价为 5 元/碗. 每碗均有 10 个馄饨. 该店老板准备推出混合馄饨，请帮她解决以下问题：

   （1）如果每碗有 3 个菜馅的、3 个鸡蛋馅的、4 个肉馅的馄饨，那么混合馄饨每碗的定价应是多少？

华东师大版电子教材

(2) 如果菜馅、鸡蛋馅、肉馅馄饨的个数之比为 3∶2∶5，那么混合馄饨每碗的定价应是多少？

(3) 如果菜馅、鸡蛋馅、肉馅馄饨的个数之比为 1∶1∶3，那么混合馄饨每碗的定价应是多少？

(4) 如果混合馄饨的定价是 3.8 元，那么你建议如何合理搭配三个品种的馄饨？

习题 20.1

1. 在同一批次的圆柱形机器零件中抽出 20 件，测得外径如下：(单位：mm)

56.1，55.9，55.9，56.0，55.8，
56.1，55.7，55.6，56.3，56.2，
56.2，55.7，56.3，56.1，56.2，
56.2，55.9，55.8，56.0，56.0.

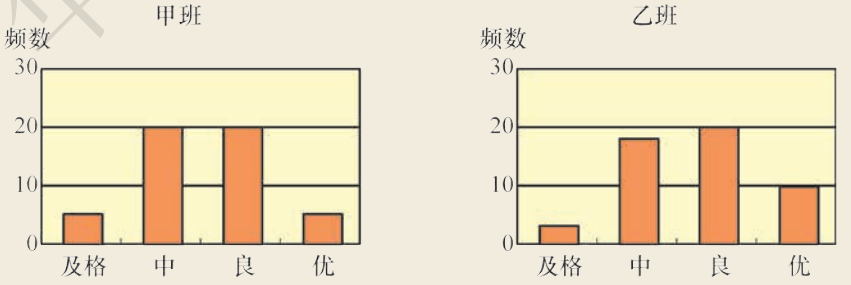
计算这些零件外径的平均值. 想一想，有哪些不同的算法？



(第 1 题)

2. 有三组数据，第一组数据：10，10；第二组数据：20，20，20；第三组数据：30，30，30，30，30. 请问每组数据的平均数分别是多少？如果将这三组数据合成一组新的数据，请问新数据的平均数是多少？

3. 不用计算，你能根据条形统计图判断哪个班级学生的平均成绩高吗？



(第 3 题)

华东师大版电子教材

4. 某同学这学期前四次数学测验的成绩依次为93、82、76和88，马上要进行第五次数学测验了，她希望五次成绩的平均数能够达到或超过85分，那么，这次测验她至少要考多少分？

5. 已知一组数据：0，1，3，3，3，5，6，7，9，10，在计算这组数据的平均数时，甲、乙、丙三位同学分别列出了如下不同的算式，请你帮他们判断对错，并说说理由.

甲：$(1+3+3+3+5+6+7+9+10)\div 9$；

乙：$(0+1+3+5+6+7+9+10)\div 8$；

丙：$(0+1+3\times 3+5+6+7+9+10)\div 10$.

6. 学校组织演讲比赛，从演讲主题、演讲内容、基本能力、整体表现四个方面对选手进行评分. 下表是两位选手在各个项目上的得分（百分制）.

	演讲主题	演讲内容	基本能力	整体表现
选手甲	80	80	90	82
选手乙	85	82	85	82

（1）如果以上四个方面的重要性之比为2∶3∶3∶2，谁的最终成绩高？

（2）如果以上四个方面的重要性之比为2∶2∶3∶3，情况又如何呢？

7. 上网查询2011年中国统计年鉴，可以得到下表中关于我国人口年龄结构的数据.

	0～14岁	15～64岁	65岁以上
1990年	27.7%	66.7%	5.6%
2000年	22.9%	70.1%	7.0%
2010年	16.6%	74.5%	8.9%

（1）请根据上表中我国不同年份的人口年龄结构分别绘制各年的扇形统计图；

（2）如果将7岁、40岁、70岁分别作为每个年龄段的代表，请估算一下1990年、2000年、2010年我国人口的平均年龄分别是多少？从中可以发现怎样的变化趋势？

华东师大版电子教材

阅读材料

平 均 化

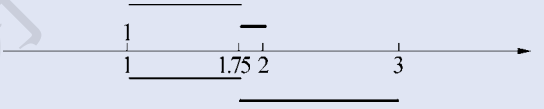
一组数据的平均数是什么含义？也许你会打个比方：有一组数据“1，1，2，3”，是我们每人手头现有的钱（单位：元）. 现在，我们四个人决定平分这些钱，大家将钱全都集中到一起，一共是 7 元，平分之后，每人得到 1.75 元，这 1.75 就是原来那组数据的平均数. 不错，汇总后平分，这既是计算平均数的过程，也是从不平均到平均的平均化过程.

在这组数据中，凡是比平均数大的数与平均数的差都是正数，比平均数小的数与平均数的差都是负数，与平均数一样大的数（如果有的话）与平均数的差恰好为零. 那么将所有的差相加，答案会是什么呢？

尝试一下，就以这组数据为例，所有的差之和是

$$\begin{aligned}&(1-1.75)+(1-1.75)+(2-1.75)+(3-1.75)\\=\ &(-0.75)+(-0.75)+0.25+1.25\\=\ &(-1.5)+1.5\\=\ &0.\end{aligned}$$

经过平均化，两个原来只有 1 元钱的人都额外得到了 0.75 元，他们得到的这 1.5 元正是另外两个人一起付出的 1.5 元，正负相抵，相加应该为零. 从图上看，两条细线长度之和与两条粗线长度之和也恰好相等.



一般地，假如这组数据是由 a、b、c、d 四个数组成的，它们的平均数是 m，那么，所有的差相加是

$$\begin{aligned}&(a-m)+(b-m)+(c-m)+(d-m)\\=\ &(a+b+c+d)-4m\\=\ &4m-4m=0.\end{aligned}$$

恰好是零！

假如这组数据是由五个或更多个数组成的，我们同样可以验证此时该组数据中每个数与平均数的差相加之和是零.

华东师大版电子教材

20.2 数据的集中趋势

日常生活中，我们面对一组数据，常常需要寻找一个表达这组数据总体面貌的代表：

（1）同学问小明："你知道你妈妈的鞋号是多少吗？"小明在家里找到了 9 双妈妈的鞋，鞋号分别是：23，23，23，23.5，23，24，23，23，24. 他的回答应该是_____；

（2）同学问小红："你每个月有多少零花钱？"小红查了自己的记账本，发现去年每月得到的零花钱（单位：元）分别是：500，100，100，100，100，150，100，200，100，100，100，100. 她的回答可以是_____；

（3）老师要评定每位学生的中文打字速度. 李兵的三次中文打字速度检测结果（单位：字/分钟）分别是 38，31，36，他的中文打字速度可评定为_____；

（4）一家小店有 5 名从业者，他们的月收入（单位：元）分别是：8 000，3 200，2 100，2 000，2 000，该店员工的月收入可以认为是_____.

回答上述问题，还要用到代表一组数据的其他指标，如**中位数**（median）和**众数**（mode）这些刻画数据集中趋势的量.

1. 中位数和众数

问题 1

31 个城市 21 日最高气温之和除以 31 所得的商是平均数.

根据中央电视台 2011 年 10 月 20 日 19 时 30 分预报，我国大陆各直辖市和省会城市 21 日的最高气温（℃）如表 20.2.1 所示. 我们很容易得到这些城市 21 日最高气温的平均数为 21.7℃. 你还能从其他角度找到这组数据的代表吗？

华东师大版电子教材

表 20.2.1　各地 21 日最高气温(℃)预报

北京 17	天津 22	石家庄 21	太原 21	呼和浩特 18	沈阳 22	长春 20	哈尔滨 19
上海 23	南京 23	杭州 24	合肥 22	福州 27	南昌 26	济南 23	郑州 22
武汉 25	长沙 26	广州 30	海口 30	南宁 29	成都 21	重庆 20	贵阳 17
昆明 20	拉萨 20	西安 21	兰州 18	银川 20	西宁 16	乌鲁木齐 9	

我们还可以用中位数或众数作为这组数据的代表.

如图 20.2.1,将 31 个城市 21 日最高气温数据按由低到高的顺序重新排列,用去掉两端逐步接近正中心的办法可以找出处在正中间位置的那个值,即中位数.

9, 16, 17, 17, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20, 20, 21, 21, 21, 21, 22, 22, 22, 22, 23, 23, 23, 24, 25, 26, 26, 27, 29, 30, 30

图 20.2.1

由此可以得到这些城市 21 日最高气温的中位数是 21℃.

气温按由低到高的顺序排列后,处在正中间的值是中位数.

思考

如果是偶数个城市,那么用去掉两端逐步接近正中心的办法,最后也只剩下唯一一个没被划去的数据吗?

如果是偶数个城市,那么最后就将剩下两个处在正中间的数. 这时,为了公正起见,我们取这两个数的平均数作为中位数.

华东师大版电子教材

此外，如表 20. 2. 2，统计每一个气温在这组数据中出现的频数，可以找出频数最多的那个气温值，它就是众数.

出现最频繁的气温值是众数.

表 20. 2. 2

气温（℃）	9	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	29	30
频数	1	1	2	2	1	5	4	4	3	1	1	2	1	1	2

由表 20. 2. 2 可知，这些城市 21 日最高气温的众数是 20℃.

思考

若有两个气温值（如 20℃ 和 22℃）的频数并列最多，那么怎样确定众数呢？

这时，我们不是取 20℃ 和 22℃ 这两个数的平均数作为众数，而是说这两个气温值都是众数.

我们可以把问题 1 中的平均数、中位数和众数在统计图上表示出来，如图 20. 2. 2.

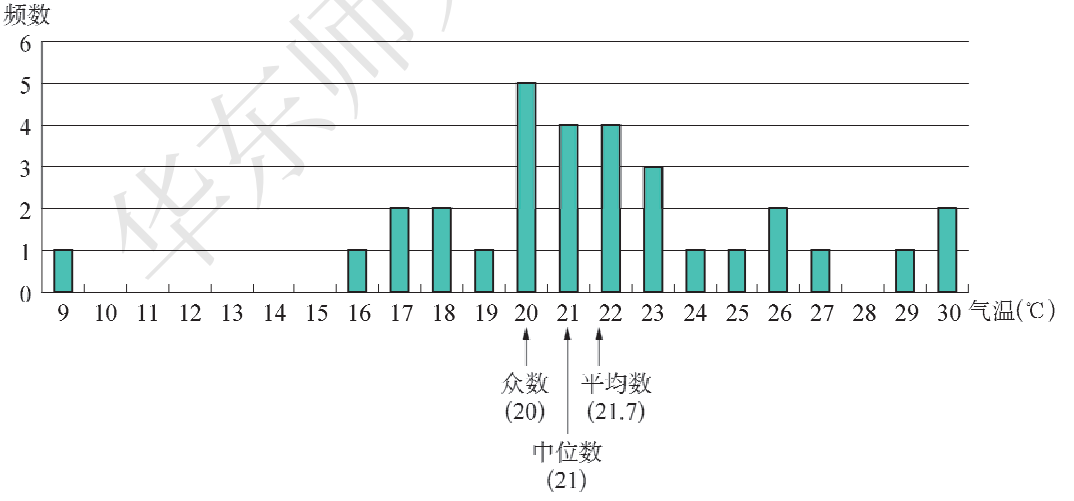


图 20. 2. 2

平均数是概括一组数据的一种常用指标，反映了这组数据中各数据的平均大小.

华东师大版电子教材

中位数是概括一组数据的另一种指标，如果将一组数据按由小到大的顺序排列（即使有相等的数据也要全部参加排列），那么中位数的左边和右边恰有一样多的数据.

众数告诉我们，这个值出现的次数最多. 一组数据可以有不止一个众数，也可以没有众数.

读一读

面对收集得到的大量数据，我们可以根据问题的背景选择合适的统计图表，让数据说话，显示其隐含的某些有用信息. 为了更好地了解数据，需要作更深入的数据分析. 平均数、中位数和众数从不同的侧面描述了数据的集中趋势，概括了一组数据. 正因为如此，这三个指标常被用来作为一组数据的代表.

练　习

1. 某商场进了一批苹果，每箱苹果的质量约为 5 千克. 进入仓库前，从中随机抽出 10 箱称重，得到 10 箱苹果的质量如下：（单位：千克）

4.8, 5.0, 5.1, 4.8, 4.9, 4.8, 5.1, 4.9, 4.7, 4.7.

请指出这 10 箱苹果质量的平均数、中位数和众数.

2. 判断题（对的在括号内填“✓”，错的在括号内填“×”）

（1）给定一组数据，那么这组数据的平均数一定只有一个.　（　　）

（2）给定一组数据，那么这组数据的中位数一定只有一个.　（　　）

（3）给定一组数据，那么这组数据的众数一定只有一个.　（　　）

（4）给定一组数据，那么这组数据的平均数一定位于最大值和最小值之间.　（　　）

（5）给定一组数据，那么这组数据的中位数一定等于最小值和最大值的平均数.　（　　）

（6）给定一组数据，如果找不到众数，那么众数一定就是 0.　（　　）

3. 一名警察在高速公路上随机观察了 6 辆过往车辆，它们的速度（单位：千米/时）分别为：66, 57, 71, 54, 69, 58. 那么，这 6 辆车的速度的中位数和众数分别是多少？

华东师大版电子教材

2. 平均数、中位数和众数的选用

我们已经知道，平均数、中位数和众数都是用来代表一组数据的，而且，它们相互之间可以相等也可以不相等，没有固定的大小关系. 当它们不全相等时，就产生了如何选用才恰当的问题.

问题 2

三位同学似乎都有道理，你的意见呢？

八年级某班的教室里，三位同学正在为谁的数学成绩最好而争论，他们的 5 次数学成绩分别是：

小华：62，94，95，98，98；

小明：62，62，98，99，100；

小丽：40，62，85，99，99.

他们都认为自己的成绩比另两位同学好，你认为呢？

分析 根据表 20. 2. 3，小华说他的成绩平均数最大，所以他的成绩最好；小明说应该比较中位数，他的成绩中位数最大；小丽则说应该比较众数，她是三人中成绩众数最大的人. 从三人的测验分数条形统计图 20. 2. 3 来看，你认为哪一个同学的成绩最好呢？

表 20. 2. 3

	平均数	中位数	众　数
小　华	89. 4	95	98
小　明	84. 2	98	62
小　丽	77	85	99

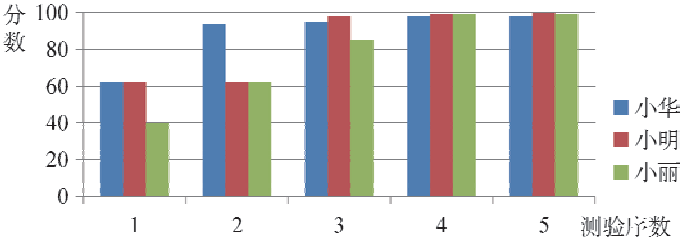


图 20. 2. 3

想一想

高一级学校录取新生主要是依据考生的总分，这与平均数、中位数和众数中的哪一个关系较大？

华东师大版电子教材

问题 3



随着汽车的日益普及，越来越多的城市发生了令人头痛的交通堵塞问题. 你认为用过往车辆一天车速的平均数衡量某条交通主干道的路况合适吗？

分析 人们上、下班的时候是一天中道路最繁忙的两个时段，其他时段车流量明显减少，因此，如果用一天车速的平均数来衡量路况，那么上、下班交通堵塞的问题就被掩盖了. 所以，较为合理的做法是按道路繁忙的不同程度，将一天分为几个时段分别计算平均车速.

平均数、中位数和众数各有其长，也各有其短，下面的几个例子也许能让你对它们有更深入的了解.

（1）草地上有 6 个人正在玩游戏，他们年龄的平均数是 15 岁. 请想象一下是怎样年龄的 6 个人在玩游戏.

通常人们会想象是一群中学生在玩游戏，但是，如果是一个 65 岁的大娘领着 5 个 5 岁的孩子在玩游戏也是有可能的嘛！这是一个不适合用平均数而适合用众数或中位数代表一组数据的例子，大娘的年龄把平均年龄一下子给抬上去了.

看看这些例子，和你的同伴交流一下，应如何合理选用各种指标.

（2）为筹备班级的新年晚会，班长对全班同学爱吃香蕉、橘子、柚子中的哪一种水果作了民意调查. 最终买什么水果，显然由众数决定较好，因为它代表了全班多数同学的意愿.

（3）八年级有 4 个班级，如果已知在一次测验中这 4 个班级每班学生的平均分，也知道各班级的学生人数，那么，我们可以计算出整个年级学生的平均分. 但是，如果已知的是每个班级学生成绩的中位数或者众数，那么我们一般是没有办法得出整个年级学生成绩的中位数或者众数的.

华东师大版电子教材

做一做

请老师准备一根绳子，面对所有学生，捏住绳子的两端，将绳子拉直. 全班同学目测几秒钟后估计这根绳子的长度.

设计和完成一张统计表和一张统计图，全面反映每位同学对这根绳子长度的估计值，计算出全班同学估计值的平均数、中位数和众数.

在全班同学估计值的基础上，请给出一个最后的估计值，作为全班集体对这根绳子长度的估计值.

最后，老师重新出示这根绳子，由学生代表当众用尺量出这根绳子的长度. 这个测量值与全班同学目测的估计值接近吗？全班讨论一下比较的结果，为什么测量值与估计值相差不大或者相差较大.

练　习

检验某厂生产的手表质量时，检查人员随机抽取了 10 块手表，在下表中记下了每块手表的走时误差（正数表示比标准时间快，负数表示比标准时间慢），你认为用这 10 块手表走时误差的平均数来衡量这 10 块手表的精度合适吗？

手表序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
日走时误差（秒）	−2	0	1	−3	−1	0	2	4	−3	2

习题 20.2

1. 根据所给数据，求出各组数据的平均数、中位数和众数，并填入下表.（精确到 0.1）

数　据	平均数	中位数	众　数
20，20，21，24，27，30，32			
0，2，3，4，5，5，10			
−2，0，3，3，3，8			
−6，−4，−2，2，4，6			

华东师大版电子教材

2. 老师想知道学生每天在上学的路上要花多少时间，于是让大家将每天来校的单程时间写在纸上. 下面是全班 30 名学生单程所花的时间：（单位：分）

20，20，30，15，20，25，5，15，20，10，15，35，45，10，20，25，30，20，15，20，20，10，20，5，15，20，20，20，5，15.

（1）请画出学生上学单程所花时间（5 分，10 分，15 分，……）出现频数的条形统计图；

（2）求学生上学单程所花时间的平均数、中位数和众数；

（3）假如老师随机地问一名学生，你认为老师最可能得到的回答是多少时间？

3. 回答下列问题，并说明理由：

（1）河水的平均深度为 2.5 米，一个身高 1.5 米但不会游泳的人下水后肯定会被淹死吗？

（2）某校录取新生的平均成绩是 535 分，如果某人的考分是 531 分，他肯定没有被这个学校录取吗？

（3）5 名学生在一次考试中的得分分别是：18，73，78，90，100，考分为 73 的学生是在平均分之上还是之下？你认为他在 5 人中考分属“中上”水平吗？

（4）9 名学生的鞋号由小到大是：20，21，21，22，22，22，22，23，23，这组数据的平均数、中位数和众数中哪个指标是鞋厂最不感兴趣的？哪个指标是鞋厂最感兴趣的？

4. 判断下列说法是否正确，若不正确，请举出反例：

（1）只要一组数据中新添入一个数据，平均数就一定会跟着变动；

（2）只要一组数据中有一个数据变动，中位数就一定会跟着变动.

5. 今天是张老师的生日，小华、小明、小丽和小芳都是张老师曾教过的学生，他们打算每人带一些桃子去看望张老师. 根据以下两种情况，先分别画出条形统计图，表示每人所带桃子的数量，再回答两种情况中哪一种用平均数代表学生每人送的桃子数较为合理？为什么？

（1）小华带来 8 个，小明带来 20 个，小丽带来 10 个，小芳带来 12 个；

（2）小华带来 8 个，小明带来 10 个，小丽带来 10 个，小芳带来 12 个.

华东师大版电子教材

阅读材料

计算机帮我们求平均数、中位数和众数

Microsoft Office 中的 Excel 不仅可以用来画统计图，还可以用来求平均数、中位数和众数. 不妨就以第 140 页问题 1 中 31 个城市 21 日最高气温这组数据为例，用计算机来求这三个指标. 操作步骤是这样的：

（1）打开 Excel，在空白表中的第一列逐个输入所有数据，一个数据占一格. 选中一个空白格，作为计算机放答案的位置，如图 1 所示.

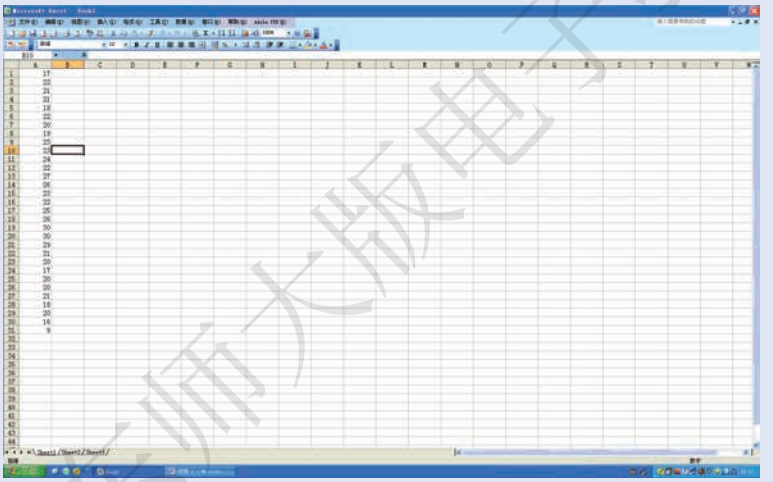


图 1

（2）点击工具栏中的“f_x”后，将显示如图 2 所示的屏幕. 如果要计算平均数，就选择“AVERAGE”；要计算中位数，就选择“MEDIAN”；要计算众数，就选择“MODE”. 最后点击“确定”.

（3）拖动鼠标，将我们刚才输入的这一列数据全部选中，于是，在Number 1 这一格中就会显示这列数据所在的范围（从 A1 到 A31），如图 3 所示. 点击“确定”，答案就出现在你刚才选定放答案的那个格子中了.

华东师大版电子教材

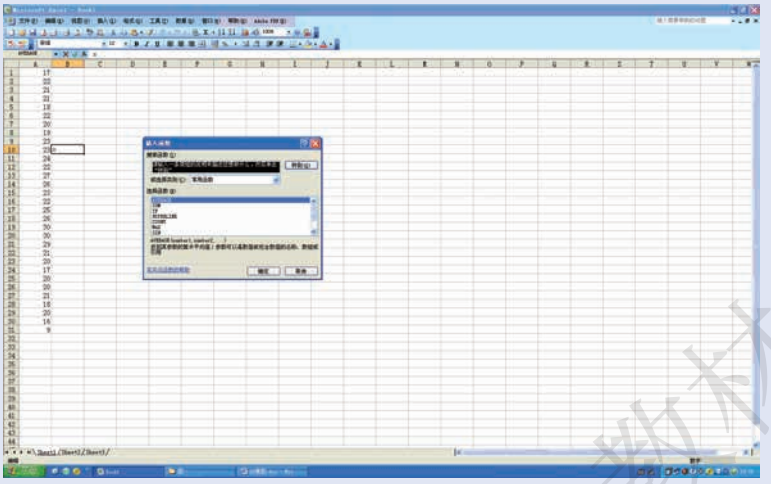


图 2

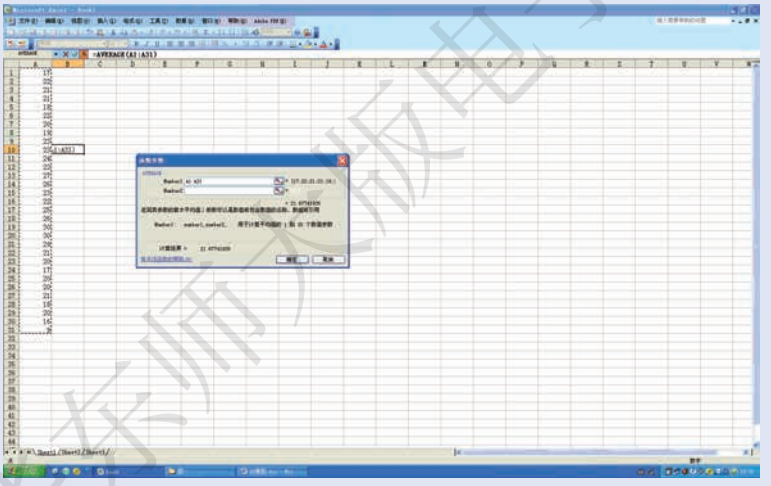


图 3

试一试吧!

要注意的是,利用 Excel 求众数时只能得到一个结果. 如果一组数据的众数不止一个,你获得的只是首先出现的那个众数.

华东师大版电子教材

20.3 数据的离散程度

1. 方差

问题 1

表 20.3.1 显示的是上海市 2001 年 2 月下旬和 2002 年同期的每日最高气温，如何对这两段时间的气温进行比较呢？

表 20.3.1　上海市每日最高气温统计表（单位：℃）

	2 月 21 日	2 月 22 日	2 月 23 日	2 月 24 日	2 月 25 日	2 月 26 日	2 月 27 日	2 月 28 日
2001 年	12	13	14	22	6	8	9	12
2002 年	13	13	12	9	11	16	12	10

从表 20.3.1 可以看出，2002 年 2 月下旬和 2001 年同期的气温相比，有 4 天的气温相对高些，有 3 天的气温相对低些，还有 1 天的气温相同. 我们可以由此认为 2002 年 2 月下旬的气温总体上比 2001 年同期高吗？

比较两段时间气温的高低，求平均气温是一种常用的方法.

经计算可知这两个时段的平均气温相等，都是 12℃. 这是不是说，两个时段的气温情况总体上没有什么差异呢？

华东师大版电子教材

观察图 20.3.1,你感觉它们有没有差异呢?

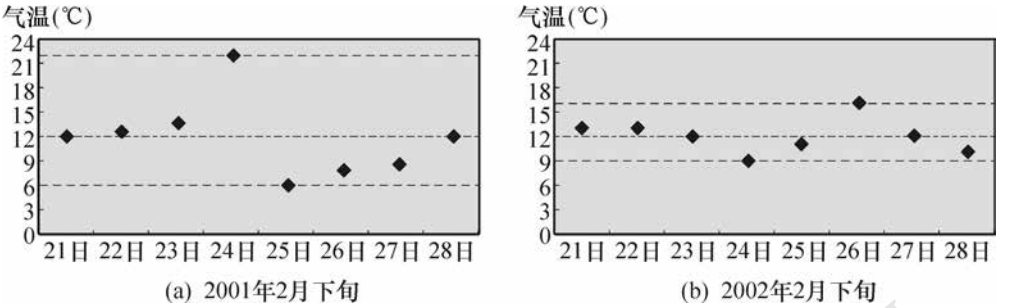


图 20.3.1　两个时段最高气温变化图

通过观察,我们可以发现:图(a)中的点波动范围比较大——从 6℃ 到 22℃,图(b)中的点波动范围比较小——从 9℃ 到 16℃.

图(a)中气温的最大值与最小值之间差距很大,相差 16℃;图(b)中气温的最大值与最小值相差 7℃,总体上气温变化的范围不太大.

思考

为什么说本章导图中的两个城市,一个“四季温差不大”,一个“四季分明”?

问题 2

小明和小兵两人参加体育项目训练,近期的 5 次测试成绩如表 20.3.2 所示. 谁的成绩较为稳定?为什么?

表 20.3.2

测试次数	1	2	3	4	5
小　明	10	14	13	12	13
小　兵	11	11	15	14	11

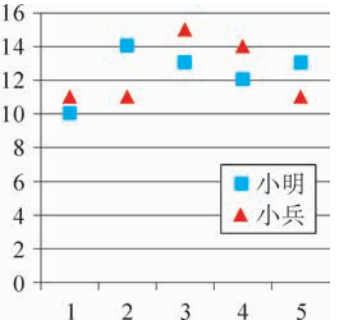


图 20.3.2　体育项目测试成绩图

华东师大版电子教材

通过计算发现，两人测试成绩的平均数都是 12.4，成绩的最大值与最小值也都相差 4. 从图 20.3.2 可以看到：相比之下，小明的成绩大部分集中在平均数附近，而小兵的成绩与其平均数的离散程度略大. 通常，如果一组数据与其平均数的离散程度较小，我们就说它比较稳定.

思考

怎样的指标能反映一组数据与其平均数的离散程度呢？

我们已经看出，小兵的测试成绩与平均数的偏差与小明相比略大. 那么如何加以说明呢？可以直接将各数据与平均数的差进行累加吗？在表 20.3.3 中写出你的计算结果.

表 20.3.3

		1	2	3	4	5	求和
小明	每次测试成绩	10	14	13	12	13	
	每次成绩 − 平均成绩						
小兵	每次测试成绩	11	11	15	14	11	
	每次成绩 − 平均成绩						

依据最后求和的结果可以比较两组数据围绕其平均数的波动情况吗？如果不行，请你提出一个可行的方案，在表 20.3.4 中写上新的计算方案，并将计算结果填入表中.

华东师大版电子教材

表 20.3.4

		1	2	3	4	5	
小明	每次测试成绩	10	14	13	12	13	
小兵	每次测试成绩	11	11	15	14	11	

思考

如果一共进行了 7 次测试，小明因故缺席了 2 次，怎样比较谁的成绩更稳定？请将你的方法与数据填入表 20.3.5 中.

表 20.3.5

		1	2	3	4	5	6	7	
小明	每次测试成绩	10	14	13	缺席	12	缺席	13	
小兵	每次测试成绩	11	11	15	11	14	14	11	

我们可以用“先平均，再求差，然后平方，最后再平均”得到的结果表示一组数据偏离平均值的情况. 这个结果称为**方差**(variance).

华东师大版电子教材

我们通常用 x_1，x_2，…表示各个原始数据，用 $\bar{x}$ 表示一组数据的平均数. 表 20.3.2 中，小明和小兵 5 次测试成绩的方差的计算式就是

$$\frac{1}{5}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+(x_4-\bar{x})^2+(x_5-\bar{x})^2].$$

计算可得：

小明 5 次测试成绩的方差为_____，

小兵 5 次测试成绩的方差为_____.

计算结果是否是小明的成绩比较稳定呢？

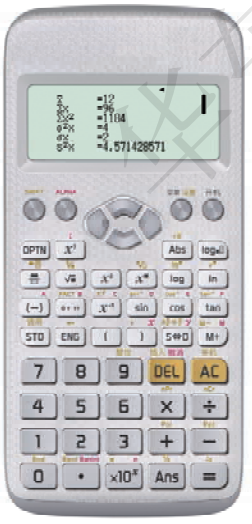
练　习

1. 比较下列两组数据的方差：

A 组：0，10，5，5，5，5，5，5，5，5；

B 组：4，6，3，7，2，8，1，9，5，5.

2. 算一算，第 150 页问题 1 中哪一年 2 月下旬每日最高气温的离散程度较大？与你从图 20.3.1 中直观看出的结果一致吗？



2. 用计算器求方差

用笔算的方法计算方差比较繁琐，如果能够利用计算器，就会大大提高效率. 下面以计算 2002 年 2 月下旬的上海市每日最高气温的方差为例，按键顺序如下：

（1）开机，打开计算器；

（2）菜单 2 1，启动“单变量统计”计算功能；

（3）13 = 13 = …… 10 = AC，输入所有数据；

（4）OPTN 2，即可获得这组数据的统计值，其中方差 $\sigma^2x=4$.

练　习

下表给出了两种股票从2002年4月1日到4月19日的交易日收盘价格，分别计算它们的平均数和方差，并比较这两种股票在这段时间内的涨跌变化幅度.

（单位：元）

日期	1	2	3	4	5	8	9	10	11	12	15	16	17	18	19
A股票	11.59	11.17	11.15	11.62	11.51	11.39	11.94	12.29	12.02	12.02	11.95	11.97	11.89	11.59	11.76
B股票	13.49	13.53	13.51	14.07	13.84	13.98	14.67	14.80	14.61	14.60	14.41	14.31	14.38	14.02	14.17

习题 20.3

1. 下表是甲、乙两人10次射击的成绩（环数）.

甲	9	6	7	6	8	7	7	9	8	9
乙	2	4	6	8	7	7	8	6	9	7

（1）将下表填写完整.

	甲			乙		
	每次成绩	每次成绩－平均成绩	（每次成绩－平均成绩）^{2}	每次成绩	每次成绩－平均成绩	（每次成绩－平均成绩）^{2}
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
总计						
平均						

（2）谁的平均成绩高？

（3）谁的成绩较为稳定？为什么？

华东师大版电子教材

2. 下表是在投掷两颗正方体骰子的活动中得到的数据.

投掷次数	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
出现数字之和为奇数的频数	2	4	8	10	14	17	20	22	25	26
出现数字之和为奇数的频率	0.400	0.400	0.533	0.500	0.560	0.567	0.572	0.550	0.556	0.520

投掷次数	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
出现数字之和为奇数的频数	27	28	30	34	37	40	42	45	47	50
出现数字之和为奇数的频率	0.491	0.467	0.462	0.486	0.493	0.500	0.494	0.500	0.495	0.500

分别计算最初 5 个频率值的方差和最后 5 个频率值的方差,说说哪一段的频率表现得更为稳定.

3. 某学校为选拔优秀运动员参加县中学生运动会,组织了多次百米测试,其中甲、乙两名运动员较为突出,他们在 10 次百米跑测试中的成绩(单位:秒)如下表所示.

甲	10.8	10.9	11.0	10.7	11.2	11.1	10.8	11.0	10.7	10.9
乙	10.9	10.9	10.8	10.8	11.0	10.9	10.8	11.1	10.9	10.8

如果根据这 10 次成绩选拔一人参加比赛,你认为哪一位比较合适?



(第 3 题)

华东师大版电子教材

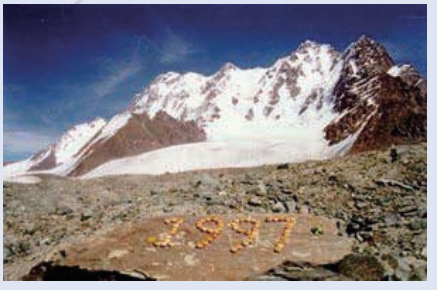
阅读材料

早穿皮袄午穿纱

“早穿皮袄午穿纱”是一句地方民谣，它形象地在我们面前描绘出一幅奇特的景象：早上寒冷得穿上又厚又重的皮袄，中午却炎热得只穿又薄又轻的纱衣. 为什么会出现这种现象？那是因为在我国的西北地区一日之间气温变化较大，有时午后最高气温达到 30℃ 以上，但清晨最低气温却只有十几度. 下表是我国西北和南方一些地区某日的最高、最低气温情况，看看西北各地区该日最高气温和最低气温相差多大，再和南方对比一下，你将不难理解在我国西北地区为什么广为流传“早穿皮袄午穿纱”这一句民谣.

2002 年 6 月 29 日我国部分地区天气情况

		最高气温(℃)	最低气温(℃)	两者之差(℃)	
西　北	乌鲁木齐	33	19	14	>10
	达坂城	34	19	15	
	石河子	33	20	13	
	吐鲁番	44	25	19	
	银　川	34	20	14	
	敦　煌	34	18	16	
南　方	汕　头	34	27	7	<10
	高　雄	33	31	2	
	海　口	34	27	7	
	广　州	34	26	8	



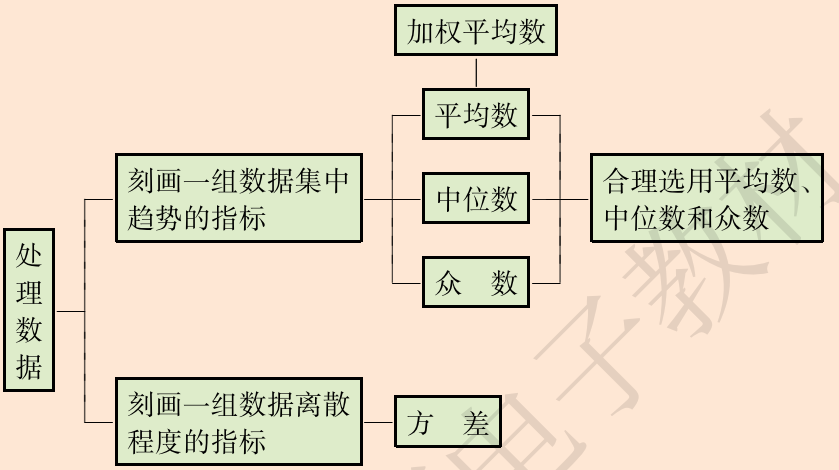


新疆的博格达峰和天鹅湖

华东师大版电子教材

小结

一、知识结构



二、要点

1. 数据对我们了解所考察的对象非常重要，但过多的数据有时反而让我们无法把握，这时通过数据分析，可以使我们更好地了解和认识数据. 对此，我们可以做两件事：一是制作形象的统计图表，对这组数据形成一个整体印象；二是计算代表这组数据的平均数、中位数和众数，以这几个指标概括这组数据. 当然，不是在所有问题中这三个指标都有实际意义，如果某个指标没意义，自然不必计算.

有了好的工具还要用得恰当，选取一组数据的代表时要注意平均数、中位数和众数的适用范围.

2. 对于给出的一组数据，可以通过求平均数、中位数和众数来反映数据的集中趋势，也可以用方差、最大值与最小值的差等反映数据的离散程度. 对于同样的数据可以有多种分析的方法，需要根据问题的背景选择合适的方法.

3. 计算器和计算机具有强大的数据处理功能，可以将我们从繁杂的计算和绘图工作中解放出来.

华东师大版电子教材

复习题

A 组

1. 某班 30 名学生的考试成绩如下：

76，56，80，78，71，78，90，79，92，83，81，93，84，86，98，61，75，84，90，73，80，86，84，88，81，90，78，92，89，100.

请计算这次考试全班学生成绩的平均数、中位数、众数和方差.

2. 有两组数据，第一组数据是：1，3，5，7，9；第二组数据是：21，23，25，27，29，31，33. 先分别求出这两组数据的平均数，再将这两组数据合并在一起，求合并后这组数据的平均数，想一想，它是前两个平均数的平均数吗？

3. 下表中给出了某校六年级和九年级部分学生的身高（单位：厘米），哪个年级的学生平均身高较高？哪个年级的学生身高的方差较大？请先不计算试着回答这两个问题，再通过计算得出答案，与你预期的答案一致吗？

六年级	164	165	153	146	148	154	152	156	158	150	156	160	163	156	146	150	157	148	156	142
九年级	165	164	162	151	155	169	158	173	159	156	166	154	154	153	163	152	151	158	179	166

4. 某个工程队正在修建道路. 有 4 天每天修 5 米，有 2 天每天修 7 米，有 3 天每天修 10 米，有 1 天修 11 米. 这 10 天中该工程队平均每天修建道路多少米？

B 组

5. 判断下列说法是否正确，若不正确，请举出反例：

（1）n 个数的平均数就是把这 n 个数的总和除以 n 所得的数；

（2）n 个数的平均数一定是这 n 个数中的某一个；

（3）将 n 个数由小到大排列后，如果 n 是奇数，位置在正中间的数就是这 n 个数的中位数；如果 n 是偶数，位置在正中间的那两个数的平均数才是这 n 个数的中位数；

（4）n 个数的中位数一定是这 n 个数中的某一个；

（5）如果在 n 个数中某个或某几个数出现的频数最大，那么这个或这几个数就是这 n 个数的众数，如果找不出这样的数，那么这 n 个数就没有众数；

（6）如果 n 个数中存在众数，那么该众数一定是这 n 个数中的某一个.

华东师大版电子教材

6. 一些比赛中规定,在所有裁判对某选手给出的评分中,要去掉一个最高分和一个最低分,再对剩下的评分取平均数作为这个选手的最终得分,这是为什么?

7. 如果将 11、12、13、14、15 依次重复写 18 遍,会得到由 90 个数组成的一组数据,请用巧妙的方法计算这组数据的平均数、中位数和众数.

C 组

8. 在一次业余歌手大奖赛中,三位选手的得分情况如下表所示. 请据此提出一些问题考考你的同学.

选手 A	演唱得分	84.0	86.8	86.5	85.8	87.6	87.9	86.0	87.5	86.5	86.6	83.4	87.2
	声乐技巧	8.9	8.6	9.0	8.5	9.8	8.6	7.1	8.9	8.2	8.5	8.5	8.5
选手 B	演唱得分	82.0	82.0	82.5	82.2	82.4	82.4	82.1	82.5	81.0	82.5	83.0	84.0
	声乐技巧	7.8	7.5	7.8	7.5	7.2	8.3	7.8	7.2	7.2	7.5	8.0	8.0
选手 C	演唱得分	87.6	86.9	86.9	86.8	84.2	86.0	86.7	86.7	86.2	86.5	86.4	87.0
	声乐技巧	8.9	8.6	8.9	8.9	8.9	8.9	8.9	8.9	9.0	8.6	8.9	8.6

9. 有一组数据:a, b, c, d, e, f,其中 $a=-10$, $b=0$, $c=11$, $d=17$, $e=17$, $f=31$. 问:

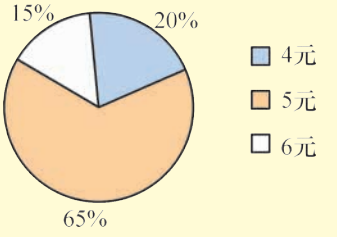
(1) 增大 a 对平均数、中位数和众数会产生影响吗?

(2) 去掉 b 对平均数、中位数和众数会产生影响吗?

(3) 去掉 c 对平均数、中位数和众数会产生影响吗?

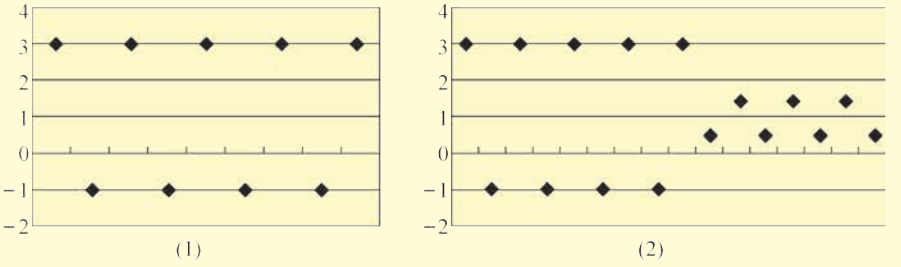
(4) 去掉 d 对平均数、中位数和众数会产生影响吗?

10. 某饮食公司为一学校提供午餐,有 4 元、5 元和 6 元三种价格的饭菜供师生选择(每人限定一份). 如图是 5 月份的销售情况统计图,这个月一共销售了 10 400 份饭菜,那么师生购买午餐费用的平均数、中位数和众数各是多少?



(第 10 题)

11. 不通过计算,比较图(1)、(2)中两组数据的平均数及方差.



(第 11 题)

综合与实践

通讯录的设计

不少同学手头都有一本通讯录，记录着同学、老师、亲戚、朋友的通讯信息. 商店里的通讯录大多在页边上印有 A、B、C、D……26 个字母，我们在记录通讯信息时，可以按照姓氏拼音的开头字母来填写，这样查找起来就很方便. 但是由于通讯录中每一个字母所占的页数大致相等，使用一段时间后，你可能会发现 H、L、S、Z 等字母所在的页面已经写满，而 A、E、I、O 等字母的页面上只记录着少数几个人的信息，有的甚至还是空白. 显然，这样设计的通讯录不够合理.



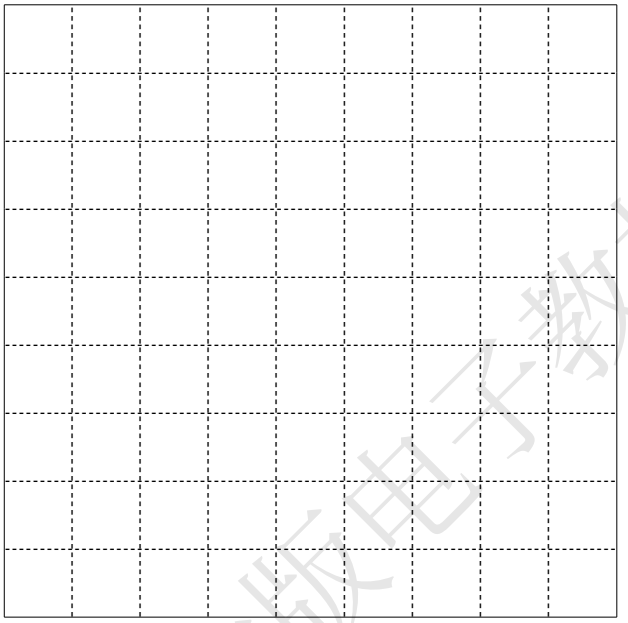


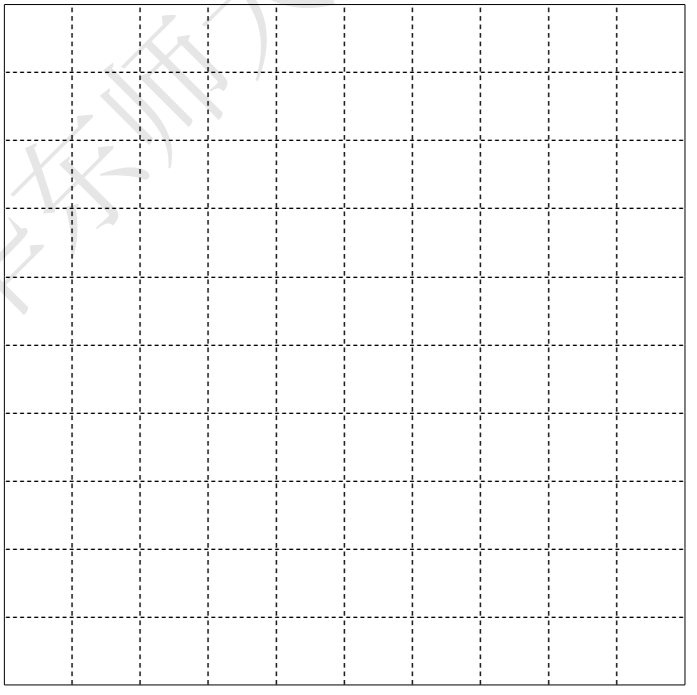
请你和同伴一起，通过亲自调查，收集各种信息，例如，你们班级、年级乃至全校同学姓名的姓氏拼音，运用数据分析的手段，设计一本通讯录，并说明你如此设计的理由.

华东师大版电子课本

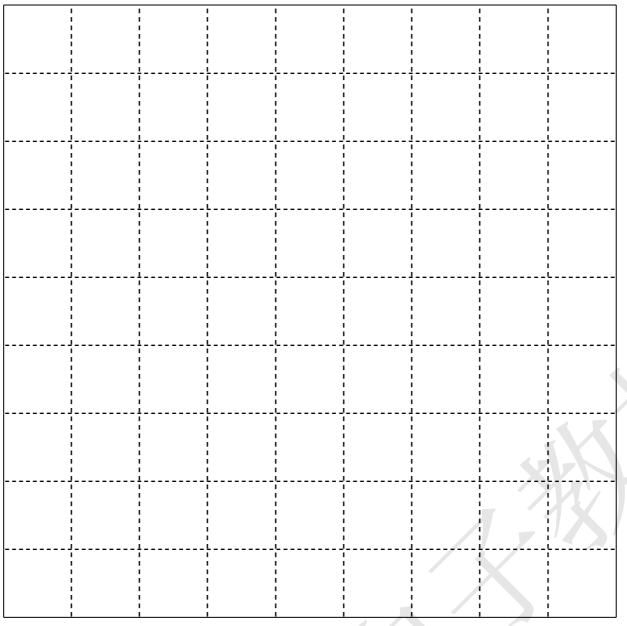
数学实验附图

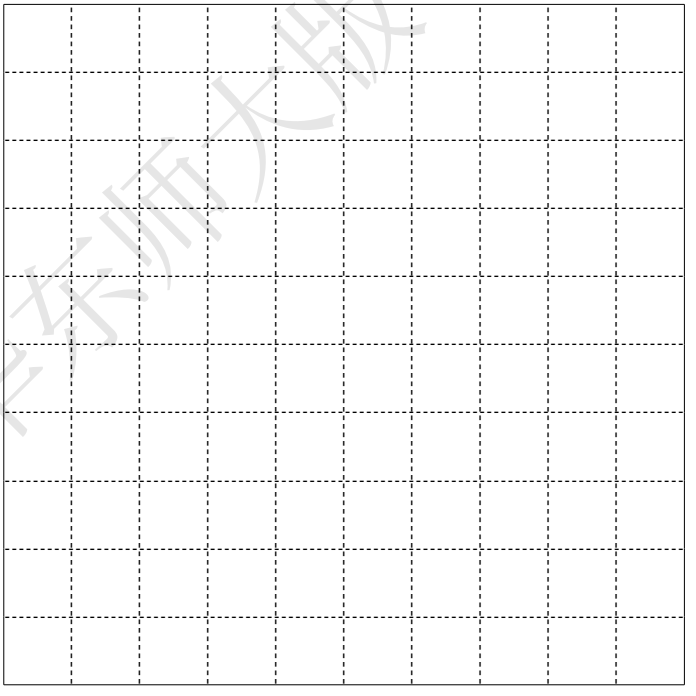
方格图



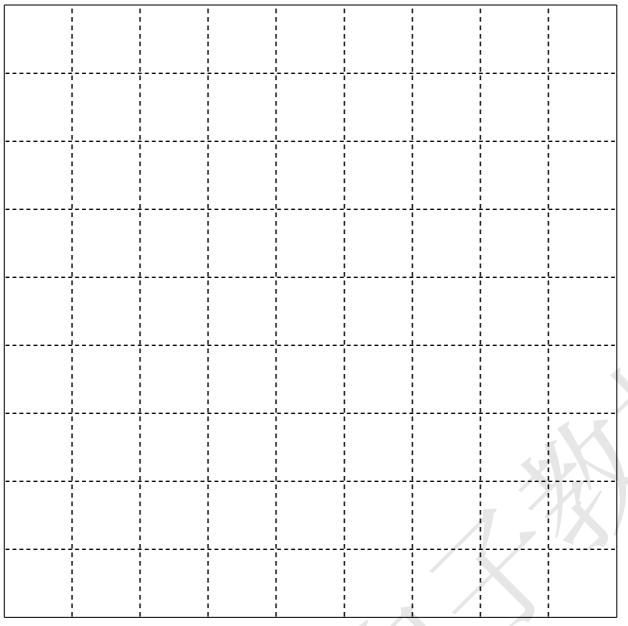


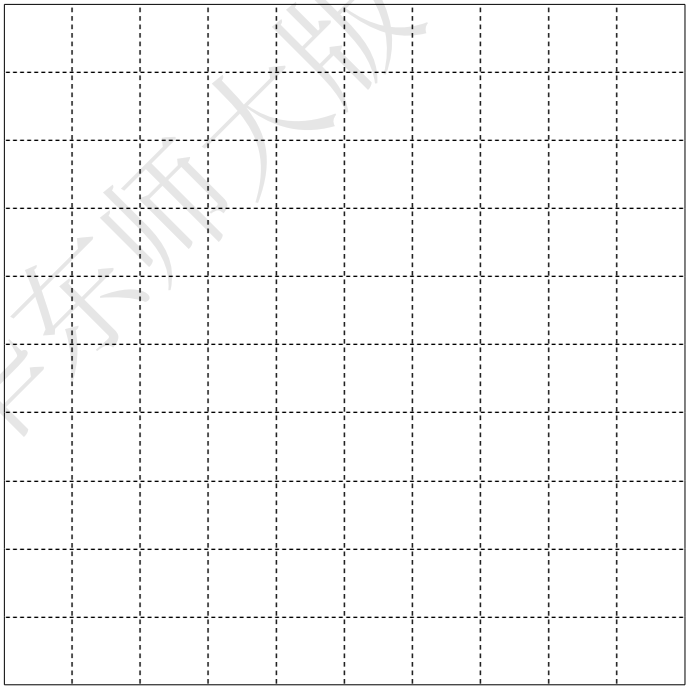
华东师大版电子教材





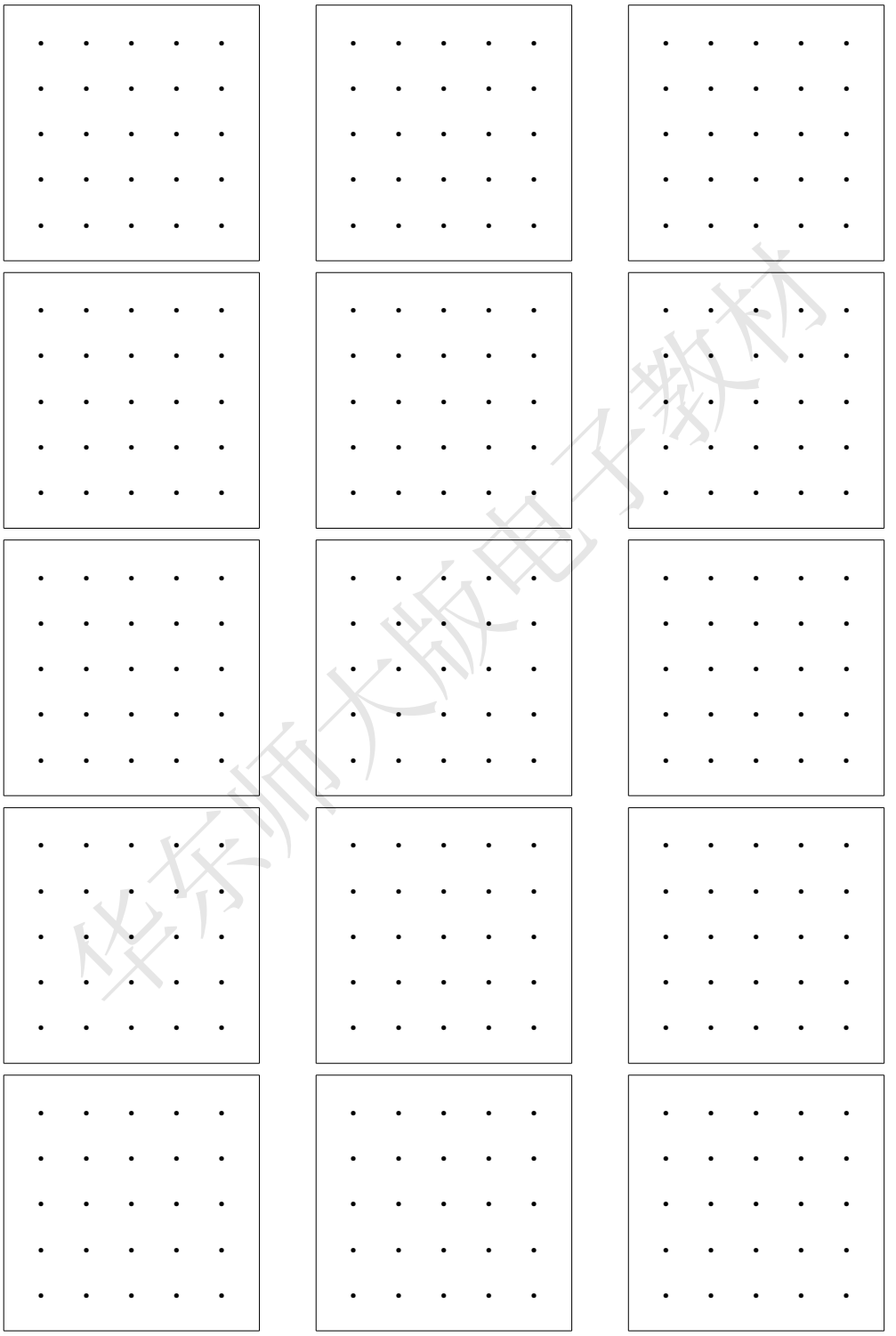
华东师大版电子教材



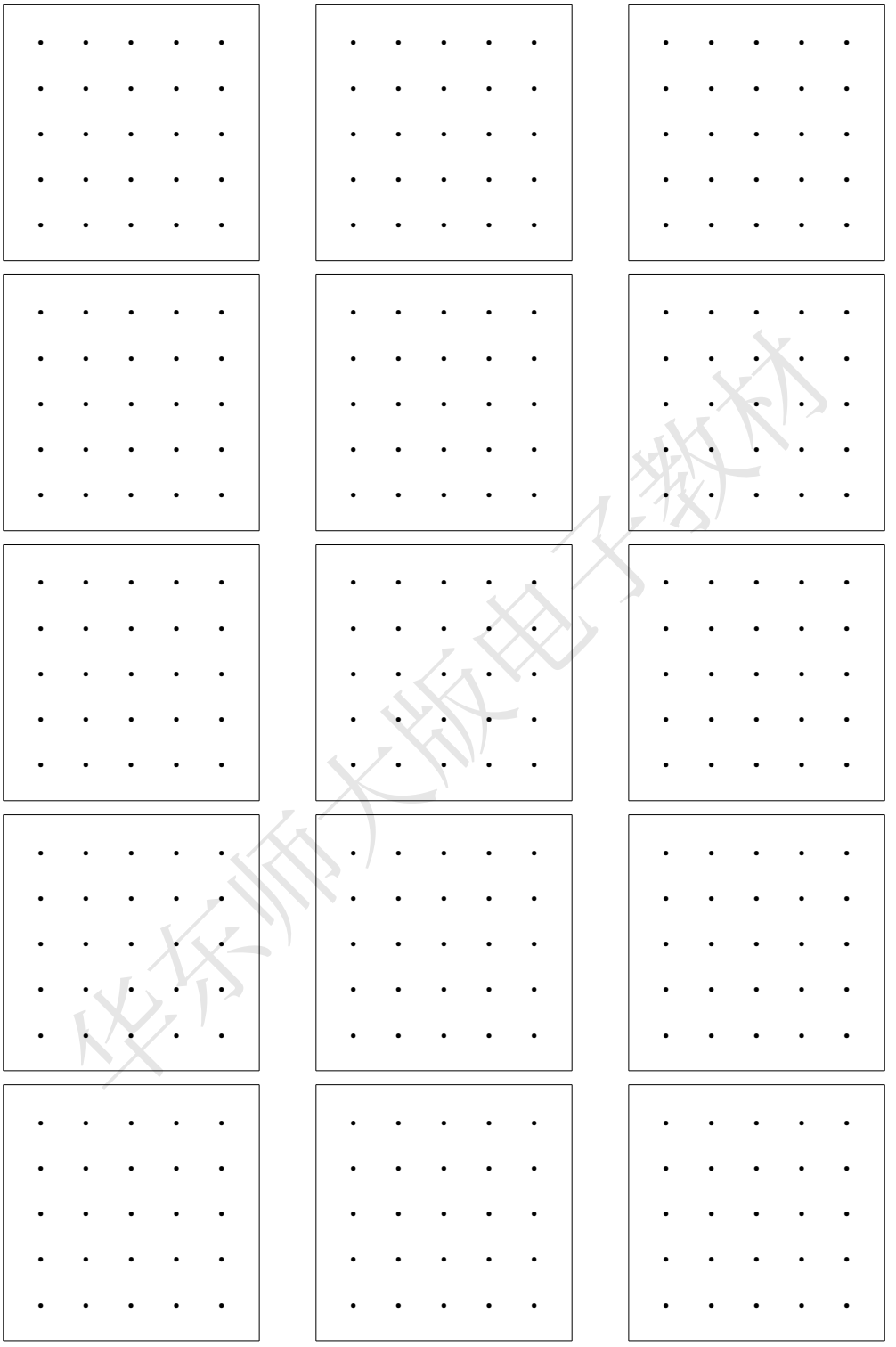


华东师大版电子教材

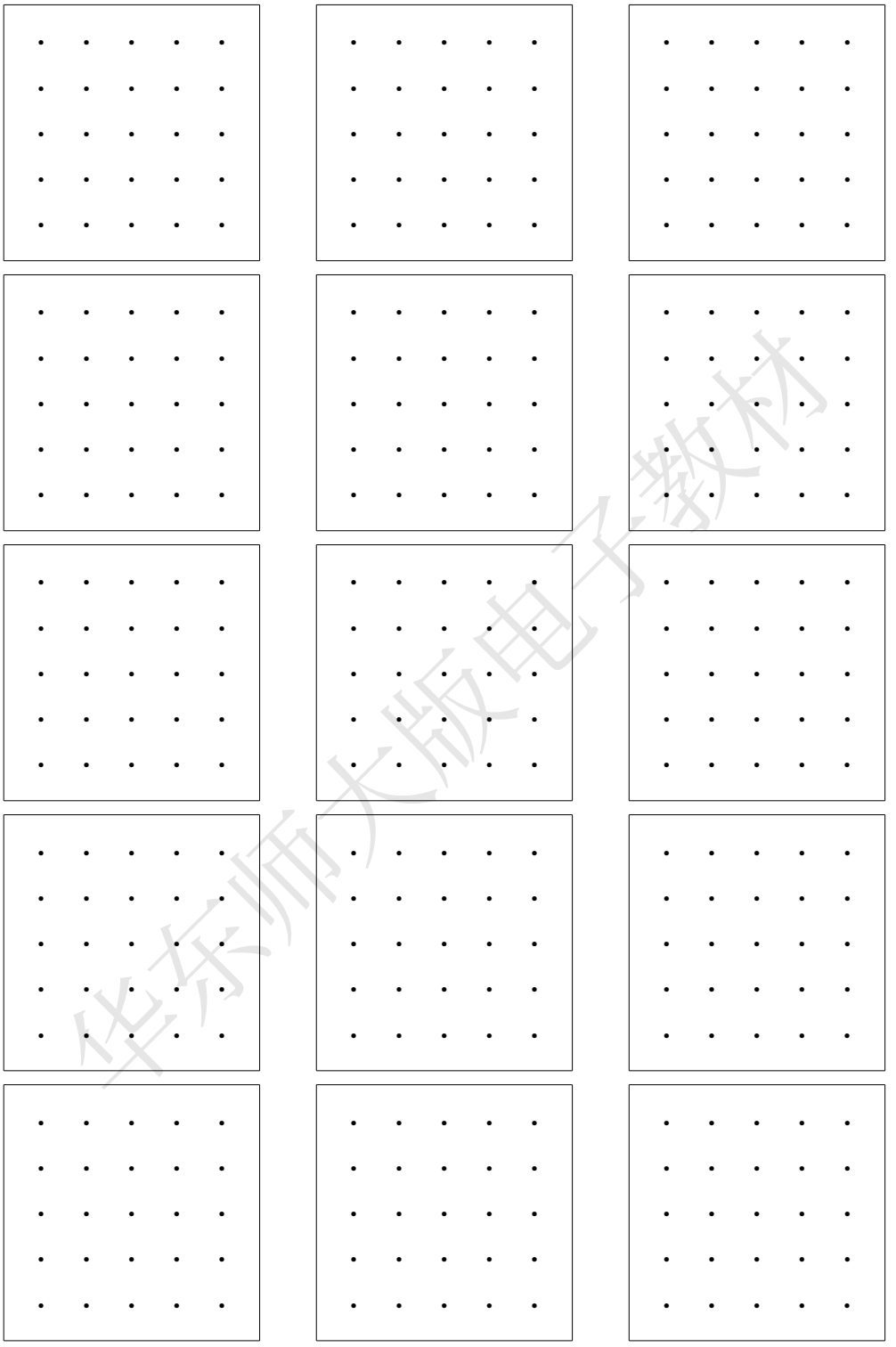
格点图



华东师大版电子教材



华东师大版电子教材



华东师大版电子教材

后　　记

华东师大版初中数学教材是最早通过教育部审查的新课标初中数学教材之一. 自 2001 年秋季在 7 个国家级实验区投入实验以来,已有分布在 26 个省、市、自治区的地市选用过或正在选用本套教材. 10 多年来,实验区的广大师生对本套教材寄予了厚爱,为它的不断完善提出了许多宝贵意见. 根据这些意见,在实验期间,我们对教材进行了多次修改. 在此,我们对多年来给予本套教材关心的各级领导、广大实验区师生和各位同仁表示衷心感谢.

根据教育部的统一部署,在 2012 年前要完成义务教育阶段所有新课标教材的修订工作. 为了确保本套教材修订工作的顺利进行,在 2011 年 4 月至 7 月间,我们就本套教材的修订广泛征求了一线教师的意见. 2011 年 9 月在南京召开了“华东师大版初中数学教材修订研讨会”,来自实验区的 120 多名教研员和骨干教师以及全体编写人员参加了会议. 会议期间就本套教材修订的整体框架达成了广泛共识. 本套教材的修订稿完成后,我们又特邀有关专家和来自教学一线的教师进行了审稿. 参与本册教材审稿的有冯国卫、郭奕津等专家和教师.

尽管我们对修订工作倾注了心血,但现在呈现在广大师生面前的修订教材肯定还存在有待进一步完善的地方. 我们真诚希望广大师生继续关心我们的教材,对我们的教材不断提出新的宝贵意见.

本册教材修订的撰稿人如下(以姓氏笔画为序):

王继延、李宏、李俊、吴中才、沈加、唐复苏、程靖.

编　者

华东师大版电子教材