国家教材委员会专家委员会审核通过
2024

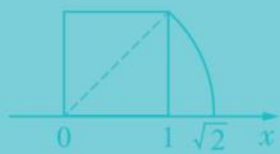
义务教育教科书

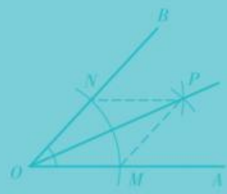
$(ab)^n=a^nb^n$

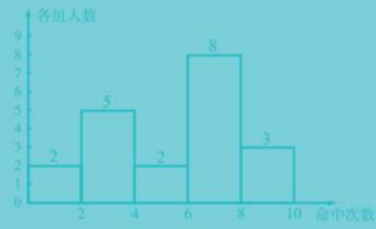
数学

八年级
上册

华东师范大学出版社







义务教育教科书

数学

八年级
上册

华东师范大学出版社
·上海·

主　编：王建磐
副主编：王继延
本册编写人员：唐复苏　李文革　李　俊　吴中才
忻重义　胡耀华　张海营　胡同祥

义务教育教科书
数　学
八年级　上册

责任编辑　平　萍　周　鸿
责任校对　李琳琳
装帧设计　卢晓红　刘怡霖
插图绘制　上海翔绘网络科技有限公司

出　　版　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电　　话　021－60821666　行政传真 021－62572105
客服电话　021－62865537

印 刷 者　上海新华印刷有限公司
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张　12.25
字　　数　203 千字
版　　次　2025 年 5 月第 1 版
印　　次　2025 年 5 月第 1 次
书　　号　ISBN 978－7－5760－6040－9
定　　价　15.00 元

出 版 人　王　焰

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话 021－62865537 联系）

致亲爱的同学

欢迎你升入八年级，我们的小伙伴.

通过七年级的数学学习，相信你已经感受到，“宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之繁等各个方面，无处不有数学的贡献”. 人类离不开数学.

现在摆在你面前的这本书是初中阶段数学教科书中的第三本. 请你翻开这本书，与我们一起继续漫游数学世界，结识更多、更具魅力的数学朋友.

“**数的开方**”是一种新的运算，与你以前所学的平方、立方运算有着密切的联系. 这一章还将引入一种新数——无理数，把数的集合扩充到实数集，使数的大家庭越来越丰富.

七年级时，我们已经学会了整式的加减，现在继续学习“**整式的乘除**”. 在此基础上，我们还要学习因式分解，它与整数的因数分解十分类似. 所有这些都是继续学习其他数学知识的重要基础，也能进一步帮助你去解决问题.

你已经知道通过图形的变换——轴对称、平移与旋转，有些图形可以完全重合，它们的形状和大小都相同，即为全等图形. “**全等三角形**”是最简单的全等图形，它们的对应边、对应角都相等. 你将学习判定三角形全等的各种简便方法，并将在以前说理的基础上，学习一些有关演绎推理的知识，掌握一些主要的推理论证的方法，在合情推理与演绎推理的结合中，领略其中的奥秘.

你知道2002年在北京召开的国际数学家大会(ICM 2002)吗？这次大会的会徽，就是1 700多年前中国古代数学家赵爽用来证明勾股定理的弦图. 你将会在“**勾股定理**”这一章中认识这个弦图，并学会运用勾股定理解决各种有趣的问题.

“**数据的收集与表示**”将告诉你收集数据的一些基本方法，教你让数据说话，学会一些处理实际问题的方法.

“**项目学习**”将引导你运用数学和其他相关学科的知识解决实际问题，感受数学在与其他学科融合中所彰显的功效.

数学世界继续欢迎你，为你敞开着大门.

目录

第 10 章　数的开方

要剪出一张面积为 $25\ \text{cm}^2$ 的正方形纸片，正方形的边长应是多少？解决此问题要用到平方根的概念．

★　本章将学习有关数的一种新的运算——开方，在此基础上认识新朋友——无理数，把数的范围扩充到实数．

10.1 平方根和立方根

1. 平方根

本章导图中提出的问题，就是已知正方形的面积为 25 cm^2，求这个正方形的边长.

容易知道，这个正方形的边长是 5 cm .

上述问题实质上就是要求一个数，这个数的平方等于 25 .

概括　如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的**平方根**(square root).

因为 $5^2=25$，所以 5 是 25 的一个平方根.

又因为 $(-5)^2=25$，所以 -5 也是 25 的一个平方根.

这就是说，5 和 -5 都是 25 的平方根.

根据平方根的意义，我们可以利用平方运算来探求一个数的平方根.

▶ **例 1**　求 100 的平方根.

解　因为 $10^2=100$，$(-10)^2=100$，除了 10 和 -10 以外，任何数的平方都不等于 100，所以 100 的平方根是 10 和 -10. 也可以说，100 的平方根是 ± 10.

试一试

1. 144 的平方根是什么?
2. 0 的平方根是什么?
3. -4 有没有平方根? 为什么?

请你自己也编三道求平方根的题目，并给出解答.

概括 一个正数如果有平方根，那么必定有两个，[①] 它们互为相反数. 显然，如果我们知道了这两个平方根中的一个，那么立即可以得到另一个.

正数 a 的正的平方根，叫做 a 的**算术平方根**，记作 $\sqrt{a}$，读作“根号 a”；另一个平方根是它的相反数，即 $-\sqrt{a}$. 因此，正数 a 的平方根可以记作 $\pm\sqrt{a}$，其中 a 称为被开方数.

因为 0 的平方等于 0，而其他任何数的平方都不等于 0，所以 0 的平方根只有一个(就是 0)，也叫做 0 的算术平方根，记作 $\sqrt{0}$. 即 $\sqrt{0}=0$.

$\sqrt{a}(a \geqslant 0)$ 表示 a 的算术平方根，试就 $a>0$ 和 $a=0$ 两种情况，分别说出它的意义.

因为任何有理数的平方都不可能是负数，所以，**负数没有平方根**.

求一个非负数的平方根的运算，叫做开平方. 将一个正数开平方，关键是找出它的算术平方根.

在例 1 中，我们可以先求出 100 的算术平方根，有 $\sqrt{100}=10$，然后得知 100 的平方根是 $\pm\sqrt{100}=\pm 10$.

▶ **例 2** 将下列各数开平方：

(1) 49；　　　　(2) $\dfrac{4}{25}$.

解 (1) 因为 $7^2=49$，所以 $\sqrt{49}=7$，因此 49 的平方根为 $\pm\sqrt{49}=\pm 7$.

(2) ______________________________

______________________________.

仿照小题(1)的解答过程，写出小题(2)的解答.

在例 1、例 2 中，我们是通过观察，利用开平方与平方的关系来求平方根的. 通常可用计算器直接求出一个正数的算术平方根(有时得到的是近似值).

① 数的范围从有理数扩充到实数以后(10.2 节)，每一个正实数必定有两个平方根.

例 3 用计算器求下列各数的算术平方根：

（1）529；

（2）44.81（精确到 0.01）.

说明 用计算器求一个正数的算术平方根，只需直接按书写顺序按键即可.

解 （1）本小题的按键顺序是：

√■ 5 2 9 EXE，

显示结果为 23，所以 529 的算术平方根为

$$\sqrt{529}=23.$$

（2）本小题的按键顺序是：

√■ 4 4 . 8 1 EXE，

显示结果为 6.694 027 188，要求精确到 0.01，所以 44.81 的算术平方根为

$$\sqrt{44.81}\approx 6.69.$$

练习

1. 完成下列表格：

被开方数	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
算术平方根											
平方根											

2. 说出下列各数的平方根：

（1）6 400；

（2）0.25；

（3）$\frac{49}{81}$.

3. 用计算器计算：

（1）$\sqrt{676}$；（2）$\sqrt{27.8784}$；（3）$\sqrt{4.225}$（精确到 0.01）.

4. 下列说法正确吗？为什么？如果不正确，请予以改正.

（1）16 的平方根是 4；

（2）$\sqrt{25}=\pm 5$.

2. 立方根

问题 要做一只容积为 216 cm^3 的正方体纸盒，正方体的棱长是多少？

思考 这个实际问题，在数学上可以转化成一个怎样的计算问题？从中可以抽象出一个什么数学概念？

上面所提出的问题，实质上就是要求一个数，这个数的立方等于 216．容易发现，$6^3=216$，而且任何不等于 6 的数的立方都不等于 216，所以正方体的棱长是 6 cm.

概括 如果一个数的立方等于 a，那么这个数叫做 a 的**立方根**(cube root).

试一试

1. 27 的立方根是什么？
2. −27 的立方根是什么？
3. 0 的立方根是什么？

请你自己也编三道求立方根的题目，并给出解答.

概括 任何数的立方根如果存在的话[①]，必定只有一个．正数的立方根是正数，负数的立方根是负数，0 的立方根是 0．

数 a 的立方根，记作 $\sqrt[3]{a}$，读作"三次根号 a"．其中，a 是被开方数，3 是根指数．求一个数的立方根的运算，叫做开立方．

▶ **例 4** 求下列各数的立方根：

（1）$\dfrac{8}{27}$；（2）-125；（3）-0.008.

可以借助立方运算求立方根，也可以用立方运算检验开立方是否正确．

解 （1）因为 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$，所以

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}.$$

（2）因为 $(-5)^3=-125$，所以

$$\sqrt[3]{-125}=-5.$$

仿照前两道小题的解答过程，写出小题(3)的解答．

（3）________________________，

________________________．

▶ **例 5** 用计算器求下列各数的立方根：

（1）1 331；

（2）9.263（精确到 0.01）．

说明 用计算器求一个有理数的立方根，只需直接按书写顺序按键即可．

解 （1）本小题的按键顺序是：

③ ⇧ √■ (∛□) ① ③ ③ ① EXE，

显示结果为 11，所以

$$\sqrt[3]{1\,331}=11.$$

① 数的范围从有理数扩充到实数以后（10.2 节），每一个实数的立方根必定存在．

（2）本小题的按键顺序是：

③ ⬆ √■ （∛□） ⑨ ⊙ ② ⑥ ③ EXE，

显示结果为2.100 151 161，要求精确到0.01，可得

$$\sqrt[3]{9.263} \approx 2.10.$$

注意　（1）∛□是√■键的第二功能，启用第二功能，需要先按▮键.

（2）使用该功能时，可先输入根指数，再按⬆ √■（∛□），最后输入被开方数；也可先按⬆ √■（∛□），输入根指数，然后按▶，最后输入被开方数，按EXE求解.

练习

1. 完成下列表格：

被开方数	－64	－27	－8	－1	0	1	8	27	64
立方根									

2. 求下列各数的立方根：

（1）512；　　（2）－0.027；　　（3）$-\frac{64}{125}$.

3. 用计算器计算：

（1）$\sqrt[3]{6859}$；　　（2）$\sqrt[3]{17.576}$；　　（3）$\sqrt[3]{5.691}$（精确到0.01）.

习题10.1

A组

1. 下列说法正确吗？为什么？

（1）0.09的平方根是0.3；　　（2）$\sqrt{16}=\pm4$；

（3）0没有立方根；　　（4）1的立方根是±1.

2. 求下列各数的平方根：

（1）$\frac{16}{81}$；（2）0.36；（3）324 .

3. 求下列各数的立方根：

（1）125；（2）$-\frac{27}{64}$；（3）0.729 .

4. 用计算器计算（精确到 0.01）：

（1）$\sqrt{16.89}$；（2）$\sqrt[3]{6892}$.

5.（1）$\sqrt{10}$在哪两个相邻的整数之间？

（2）$3.1<\sqrt{10}<3.2$ 正确吗？为什么？

（3）下列四个结论中，正确的是（　　）.

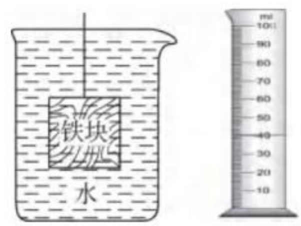
A. $3.15<\sqrt{10}<3.16$　　B. $3.16<\sqrt{10}<3.17$

C. $3.17<\sqrt{10}<3.18$　　D. $3.18<\sqrt{10}<3.19$

B 组

6. 已知 x 的一个平方根是 -8，求 x 的立方根.

7. 如图，在做浮力实验时，小华用一根细线将一正方体铁块拴住，完全浸入盛满水的圆柱形烧杯中，并用一量筒量得溢出的水的体积为 40.5 cm^3. 然后，小华将铁块从烧杯中提起，量得烧杯中的水位下降了 0.62 cm. 求烧杯内部的底面半径和正方体铁块的棱长.（用计算器计算，精确到 0.1 cm）



（第 7 题）

10.2 实数

做一做

1. 用计算器求$\sqrt{2}$.
2. 利用平方运算验算第 1 题中所得的结果.

用计算器求 $\sqrt{2}$，显示结果为1.414 213 562. 再用计算器计算 1.414 213 562 的平方，结果是 1.999 999 999，并不是 2．这是因为计算器求得的只是$\sqrt{2}$的近似值.

用计算机计算 $\sqrt{2}$，你可能会大吃一惊：

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799073247846210703885038753432764157273501384623091229702492483605585073721264412149709993583141322266592750559275579995050115278206057147010955997160597027453459686201472851741864088919860955232923048430871432145083976260362799525140798968725339654633180882964062061525835239505474575028775996172983557522033753185701135437460340849884716038689997069900481503054402779031645424782306849293691862158057846311159666871301301561856898723723528850926486124949771542183342042856860601468247207714358548741556570696776537202264854470158588016207584749226572260020855844665214583988939443709265918003113882464681570826301005948587040031864803421948972782906410450726368813137398552561173220402450912277002269411275736272804957381089675040183698683684507257993647290607629969413804756548237289971803268024744206292691248590521810044598421505911202494413417285314781058036033710773091828693147101711116839165817268894197587165821521 2\cdots$$

在数学上已经证明，没有一个有理数的平方等于 2，也就是说，$\sqrt{2}$ 不是有理数.

那么，$\sqrt{2}$ 是怎样的数呢?

我们知道，有理数包括整数和分数，而任何一个分数写成小数的形式，只可能是有限小数或者无限循环小数，例如：

$$\frac{1}{4} = 0.25,\quad \frac{2}{3} = 0.\dot{6} = 0.666\,666\,666\cdots,$$

$$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}=0.142\,857\,142\,857\,142\,857\cdots.$$

$\sqrt{2}$不是一个有理数，实际上，它是一个无限不循环小数.

类似地，$\sqrt[3]{5}$、圆周率 π 等也都不是有理数，它们都是无限不循环小数.

概括 无限不循环小数叫做**无理数**(irrational number). 上面所提到的 $\sqrt{2}$、$\sqrt[3]{5}$、π 等都是无理数.

有理数和无理数统称为**实数**(real number).

试一试

你能在数轴上找到表示 $\sqrt{2}$ 的点吗?

如图 10.2.1，将两个边长为 1 的正方形分别沿对角线剪开，得到四个等腰直角三角形，即可拼成一个大正方形. 容易知道，这个大正方形的面积是 2，所以大正方形的边长为 $\sqrt{2}$.

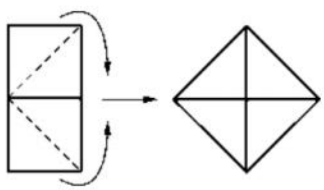


图10.2.1

这就是说，边长为 1 的正方形的对角线长是 $\sqrt{2}$. 利用这个事实，我们容易在数轴上找到表示 $\sqrt{2}$ 的点，如图 10.2.2 所示.

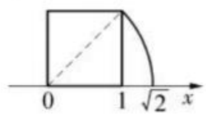


图10.2.2

概括 在今后的学习中，可以进一步得出，数轴上的每一个点必定表示一个实数；反过来，每一个实数(有理数或无理数)都可以用数轴上的一个点来表示. 换句话说，实数与数轴上的点一一对应. 这是数集从有理数集扩充到实数集的一大进步.

能说“有理数和数轴上的点一一对应”吗？为什么?

在七年级上学期学过的有关有理数的相反数和绝对值等概念、大小比较法则、运算法则以及运算律，对于实数也适用.

从有理数扩充到实数以后，正数总可以开平方、开立方. 在实数范围内，任意一个正数有两个平方根，它们互为相反数；0 的平方根是 0；负数没有平方根. 任意一个实数有且只有一个立方根.

涉及无理数的大小比较和运算，通常可以取它们的近似值来进行.

▶ **例 1** 试比较 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 与 π 的大小.

解 用计算器求得

$$\sqrt{3}+\sqrt{2}\approx 3.146\,264\,37,$$

而

$$\pi\approx 3.141\,592\,654,$$

因此

$$\sqrt{3}+\sqrt{2}>\pi.$$

▶ **例 2** 计算：$\frac{\pi}{2}-\left|\frac{1}{6}-\sqrt{2}\right|$.（精确到0.01）

解 $\frac{1}{6}-\sqrt{2}\approx 0.167-1.414=-1.247$， 于是

$$\left|\frac{1}{6}-\sqrt{2}\right|\approx 1.247,$$

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{2}-\left|\frac{1}{6}-\sqrt{2}\right|\\ \approx\ &1.571-1.247\\ =\ &0.324\\ \approx\ &0.32.\end{aligned}$$

取近似值进行加减运算时，中间结果通常应比要求的精确度多取一位.

注意 我们也可以先将原式化简，再计算.

由于 $\frac{1}{6}<\sqrt{2}$， 所以

$$\left|\frac{1}{6}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-\frac{1}{6},$$

$$\text{原式}=\frac{\pi}{2}-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}+\frac{1}{6}.$$

由此算式，可直接将数据输入计算器进行计算.

练习

1. 下列说法是否正确？为什么？

（1）两个整数相除，如果永远除不尽，那么结果一定是一个无理数；

（2）任意一个无理数的绝对值都是正数.

2. 计算：$2\sqrt{6}+3\sqrt{7}$.（精确到0.01）

3. 比较下列各对数的大小：

（1）$2\sqrt{3}$ 与 $3\sqrt{2}$；　　（2）$-\frac{\sqrt{7}}{2}$ 与 $-\frac{\pi}{3}$.

阅读材料

为什么说 $\sqrt{2}$ 不是有理数

我们可以用以下推理来说明 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，那么它可以表示为两个整数的商，设 $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$（p、q 是互质的正整数）. 由 $\sqrt{2}$ 的意义，可知

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{2}=2,$$

即有

$$\frac{q^2}{p^2}=2,$$

于是

$$q^2=2p^2.$$

显然，$2p^2$ 是偶数，即 q^2 是偶数，因此 q 是偶数．于是，可设 $q=2k$（k 是正整数）．由上式，得

$$(2k)^2=2p^2,$$

从而

$$2k^2=p^2,$$

即 p^2 是偶数，因此 p 也是偶数，这与假设 p、q 互质矛盾．

这个矛盾表明假设“$\sqrt{2}$ 是有理数”不成立，所以 $\sqrt{2}$ 不是有理数．

$\sqrt{5}$ 的 算 法

你知道 $\sqrt{5}$ 有多大吗？它所对应的点究竟在数轴上哪个位置呢？让我们一起来找找看吧．

如图 1，将两个 1×2 的长方形分别沿对角线剪开，得到四个直角三角形，它们与一个 1×1 的正方形可拼成一个大正方形．容易知道，这个大正方形的面积是 5，边长为 $\sqrt{5}$．因此，1×2 的长方形的对角线长是 $\sqrt{5}$．由此，我们容易在数轴上找到表示 $\sqrt{5}$ 的点，如图 2 所示．

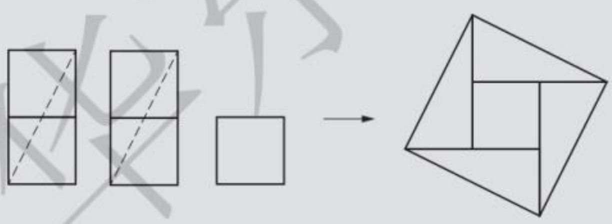


图 1

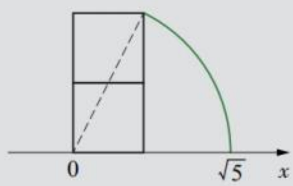


图 2

我们还可以通过尝试逼近的方法来寻找 $\sqrt{5}$ 在数轴上的位置．由于 $2^2<5<3^2$，可以肯定 $2<\sqrt{5}<3$，也就是 $\sqrt{5}$ 的位置应该在 2 与 3 之间．能不能再精确一些呢？再尝试一下，你会发现 $2.2^2<5<2.3^2$，那么 $\sqrt{5}$ 的位置就在

2.2 与2.3 之间．这样继续尝试下去，有

$$2.23^2 < 5 < 2.24^2，即得 2.23 < \sqrt{5} < 2.24；$$

$$2.236^2 < 5 < 2.237^2，即得 2.236 < \sqrt{5} < 2.237；$$

……

你看，离 $\sqrt{5}$ 越来越近了．依据这样的想法，我们可以求出$\sqrt{5}$的近似值，也可以在数轴上找到表示$\sqrt{5}$的点．

下面我们介绍一个求 $\sqrt{5}$ 的近似值的算法．

记 $x = 1$，代入$\left(\dfrac{5}{x} + x\right) \div 2$，得

$$\left(\frac{5}{1} + 1\right) \div 2 = 3,$$

再把算出的值 3 代入 $\left(\dfrac{5}{x} + x\right) \div 2$，得

$$\left(\frac{5}{3} + 3\right) \div 2 = 2.333\cdots,$$

继续上述过程，得

$$\left(\frac{5}{2.333} + 2.333\right) \div 2 = 2.238\cdots,$$

$$\left(\frac{5}{2.238} + 2.238\right) \div 2 = 2.236\cdots,$$

……

数学上可以证明，计算步骤越多，得到的数值就越接近 $\sqrt{5}$．

如果要求精确到 0.001，那么就可得到 $\sqrt{5} \approx 2.236$．

使用计算器，你不妨按照下面的按键顺序试试看：

1 EXE (5 ÷ ↑ 格式 (Ans) + ↑ 格式 (Ans)) ÷ 2 EXE EXE EXE EXE ……

后面的 EXE 键按的次数越多，数值就越精确，到一定时候，由于计算器显示位数的限制，屏幕上显示的数值就不再发生变化了．

探索 试寻求一个算法，计算 $\sqrt{7}$ 的近似值．

习题10.2

A 组

1. 判断下列说法是否正确，并说明理由：

（1）无理数的平方一定是正数；

（2）两个无理数的积仍为无理数.

2. 下列各数中，哪些是无理数？

$$\pi^2,\ 1.\dot{0}\dot{1},\ \sqrt[3]{8},\ 3.14,\ 2.030\,030\,003\cdots^{①},\ -\sqrt{32},\ 1.010\,010\,001,\ \frac{355}{113}.$$

3. 完成下列表格：

实数	π	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-\sqrt{3}$
相反数				
绝对值				

4. 比较下列各对数的大小：

（1）$\sqrt{2}$ 与 $\sqrt[3]{3}$；

（2）$-\sqrt[3]{4}$ 与 $-\sqrt[3]{3}$.

5. 计算：$|2\sqrt{5}-5\sqrt{2}|+|4\sqrt{2}-3\sqrt{3}|$.（精确到0.01）

B 组

6. 数轴上点 A 和点 B 对应的实数分别为 $\sqrt{2}+1$ 和 $\sqrt{2}-1$，求 A、B 两点间的距离.

7. 对于无理数 $\sqrt{7}$，试解答下列问题：

（1）$\sqrt{7}$ 在数轴上位于哪两个相邻的整数之间？

（2）借助计算器找出有理数 a 和 b，使 $a<\sqrt{7}<b$，且 $b-a=0.001$.

---

① 2.030 030 003⋯ 的位数无限，且相邻两个“3”之间“0”的个数依次增加 1.

数学活动

探寻纸张规格的秘密

我们经常会用到各种纸张，如 A4、B5 打印纸，你知道它们的尺寸是多大吗？

根据国际标准化组织（International Organization for Standardization，简称 ISO）制定的 ISO 216 国际标准，纸张的统一尺寸基本上可分为三个系列，分别用字母 A、B、C 表示，幅面大小的尺寸如下表所示.

ISO 纸张尺寸　　单位：mm

A 系列		B 系列		C 系列	
A0	841 × 1189	B0	1000 × 1414	C0	917 × 1297
A1	594 × 841	B1	707 × 1000	C1	648 × 917
A2	420 × 594	B2	500 × 707	C2	458 × 648
A3	297 × 420	B3	353 × 500	C3	324 × 458
A4	210 × 297	B4	250 × 353	C4	229 × 324
A5	148 × 210	B5	176 × 250	C5	162 × 229
A6	105 × 148	B6	125 × 176	C6	114 × 162
A7	74 × 105	B7	88 × 125	C7	81 × 114
A8	52 × 74	B8	62 × 88	C8	57 × 81
A9	37 × 52	B9	44 × 62	C9	40 × 57
A10	26 × 37	B10	31 × 44	C10	28 × 40

这些纸张的尺寸之间蕴含着怎样的秘密（或规律）呢？

（1）你知道 A、B、C 三个系列同一型号纸张的大小关系吗？

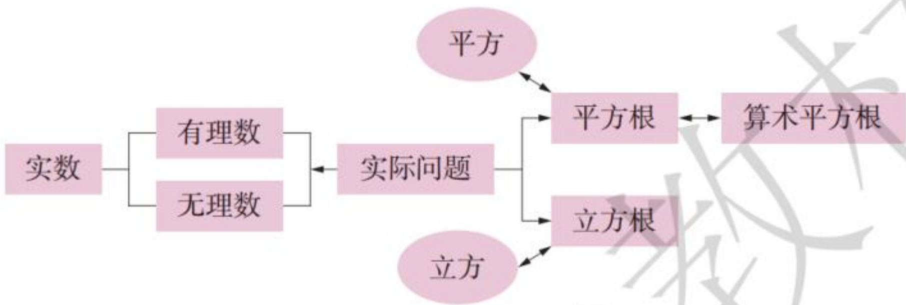
（2）你知道 A、B、C 系列后面表示型号的数字 0～10 有什么含义吗？

观察每个系列不同型号纸张的长与宽，你能发现它们之间的关系吗？它们的面积之间是否也存在某种关系呢？

（3）三个系列的全张纸，即 A0、B0、C0，算算它们各自的面积，相互比一比，看看有什么样的数量关系？三个系列其他同一型号的纸张呢？

小结

一、知识结构



二、要点

1. 掌握平方根、算术平方根、立方根的意义是学习本章的关键. 在研究时，要抓住平方根(立方根)与平方(立方)之间的关系，例如，可以通过平方(立方)运算来寻求平方根(立方根)，并可以用来验证开平方(开立方)的正确性.

2. 在实数范围内，任意一个正数有两个平方根，它们互为相反数；0 的平方根是0；负数没有平方根. 任意一个实数有且只有一个立方根，正数的立方根是正数，0 的立方根是0，负数的立方根是负数.

3. 有理数和无理数统称为实数. 实数与数轴上的点之间有着一一对应关系. 这是数集从有理数集扩充到实数集的一大进步，使数的知识更加完美.

复习题

A 组

1. 下列说法是否正确？为什么？

   （1）4 的平方根是 2；　　（2）-8 的立方根是 -2；

   （3）40 的算术平方根是 20；　　（4）负数没有立方根；

   （5）正数有两个立方根；　　（6）0 没有平方根.

2. 根据表格中所给的信息，完成下列表格：

被开方数	1				
平方根			0		
算术平方根		2			
立方根				3	-4

3. 填空：

   （1）16 的平方根是________，-27 的立方根是________；

   （2）平方根等于它本身的数是________，

   立方根等于它本身的数是________；

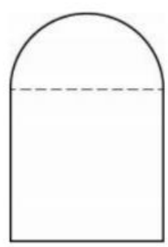
   （3）一个正方形的面积是 3 cm^2，其边长是________ cm；另一个正方形的面积是这个正方形面积的 3 倍，那么它的边长是________ cm .

4. 将下列各数按从小到大的顺序排列，并用“<”号连接起来：

$$2\sqrt{2},\quad \sqrt{5},\quad -\frac{\pi}{2},\quad 0,\quad -1.6.$$

5. 计算：$\sqrt[3]{32}-\sqrt{8}$.（精确到 0.01）

6. 如图是一扇拱门，上部分是半径为 1 m 的半圆，下部分是边长为 2 m 的正方形，则这扇拱门的面积是多少平方米？（精确到 0.1 m^2，π 取3.14）

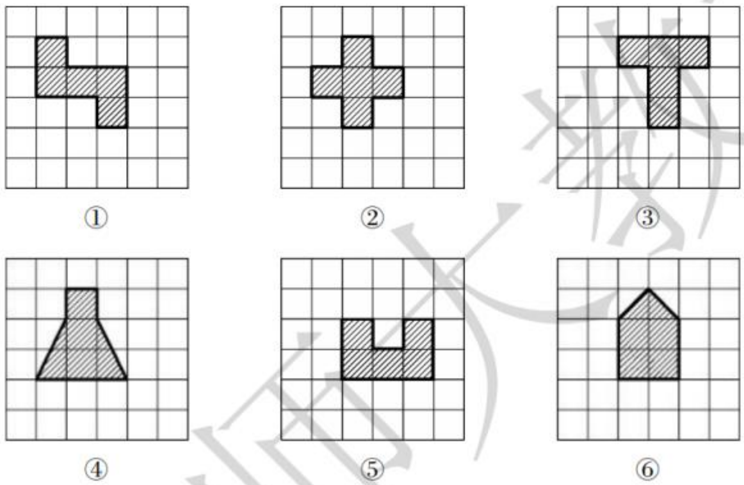


（第 6 题）

B 组

7. 计算：$\sqrt{3-2\sqrt{2}}$．（精确到0.01）

8. 观察如图所示的各方格图中阴影部分的图形（每一小方格的边长为 1），如果它们都可以剪开，并拼成正方形，那么所拼成的正方形的边长各为多少？这些正方形一样大吗？（如果你有兴趣，可以试试如何剪拼成一个正方形）



（第 8 题）

9. 把棱长分别为 2.15 cm 和 3.24 cm 的两个正方体铁块熔化，制成一个大的正方体铁块，求这个大正方体铁块的棱长．（先用一个式子表示，再用计算器计算，精确到 0.1 cm）

C 组

10. 意大利物理学家伽利略（Galieo Galilei，1564—1642）曾在比萨斜塔上做自由落体实验，他将两个质量不同的铁球从相同的高度 h 处同时扔下，结果两个铁球的落地时间 t 几乎一样．已知 h（单位：m）与 t（单位：s）满足关系式 $h=\frac{1}{2}gt^2$，其中 $g=9.8\,\mathrm{m/s^2}$，$h=50\,\mathrm{m}$，求铁球的落地时间 t．（精确到 0.1 s）

（第 10 题）

11. （1）用计算器计算：

$\sqrt{3^2+4^2}=$ ______________；

$\sqrt{33^2+44^2}=$ ______________；

$\sqrt{333^2+444^2}=$ ______________；

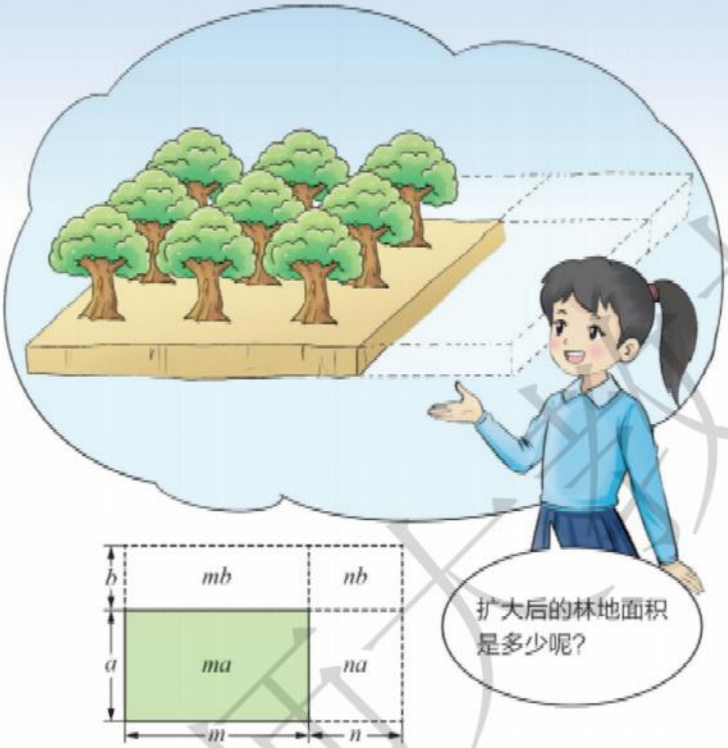
$\sqrt{3\,333^2+4\,444^2}=$ ______________.

（2）观察小题（1）中各式的计算结果，你能发现什么规律？

（3）试运用你所发现的规律猜想下式的值，并通过计算器的计算验证你的猜想：

$\sqrt{33\,333^2+44\,444^2}=$ ______________.

第 11 章　整式的乘除



植树造林，功在千秋. 将一块长 m m、宽 a m 的长方形林地的长、宽分别增加 n m 和 b m. 用两种方法表示这块林地现在的面积，可得到：

$$(m+n)(a+b)=ma+mb+na+nb.$$

上面的等式实际上给出了两个二项式相乘的运算法则.

★ 本章将类比数的运算，在七年级学习整式的加减的基础上，继续学习整式的乘除和因式分解，它们是代数运算以及解决许多数学问题的重要基础.

11.1 幂的运算

1. 同底数幂的乘法

试一试

根据幂的意义填空：

(1) $2^3 \times 2^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$

$= 2^{(\quad)}$；

(2) $5^3 \times 5^4 =$ ______________________

$= 5^{(\quad)}$；

(3) $a^3 \cdot a^4 =$ ______________________

$= a^{(\quad)}$.

概括

$$a^m \cdot a^n = (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m\text{个}})(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}})$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{(m+n)\text{个}} = a^{m+n}.$$

可得

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}(m、n\text{为正整数}).$$

这就是说，同底数幂相乘，底数不变，指数相加.

利用这个法则，可直接求出同底数幂的积.

例 1 计算：

(1) $10^3 \times 10^4$；

(2) $a \cdot a^3$；

(3) $a \cdot a^3 \cdot a^5$.

解 (1) $10^3 \times 10^4 = 10^{3+4} = 10^7$.

(2) $a \cdot a^3 = a^{1+3} = a^4$.

(3) $a \cdot a^3 \cdot a^5 = a^{1+3+5} = a^9$.

练习

1. 判断下列计算是否正确，并说明理由：

(1) $a \cdot a^2 = a^2$；　　(2) $a + a^2 = a^3$；

(3) $a^3 \cdot a^3 = a^9$；　　(4) $a^3 + a^3 = a^6$.

2. 计算：

(1) $10^2 \times 10^5$；

(2) $a^3 \cdot a^7$；

(3) $x \cdot x^5 \cdot x^7$.

2. 幂的乘方

根据乘方的意义及同底数幂的乘法法则填空：

(1) $(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3 = 2^{(\quad)}$；

(2) $(5^2)^3 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^{(\quad)}$；

(3) $(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{(\quad)}$.

概括 $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \cdots \cdot a^m}_{n个}$

$$= a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n个}}$$

$$= a^{mn}.$$

可得

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}(m、n\text{ 为正整数}).}$$

这就是说，幂的乘方，底数不变，指数相乘.

利用这个法则，可直接计算幂的乘方.

例 2 计算：

(1) $(10^3)^5$；

(2) $(b^5)^4$.

解 (1) $(10^3)^5 = 10^{3\times5} = 10^{15}$.

(2) $(b^5)^4 = b^{5\times4} = b^{20}$.

练习

1. 判断下列计算是否正确，并说明理由：

(1) $(a^3)^5 = a^8$；

(2) $a^3 \cdot a^5 = a^{15}$；

(3) $(a^2)^3 \cdot a^4 = a^9$.

2. 计算：

(1) $(2^2)^2$；

(2) $(y^2)^5$；

(3) $(x^4)^3$；

(4) $(y^3)^2 \cdot (y^2)^3$.

3. 积的乘方

试一试

根据乘方的意义和乘法运算律填空：

(1) $(ab)^2=(ab)\cdot(ab)$

$=(aa)\cdot(bb)$

$=a^{(\quad)}b^{(\quad)}$；

(2) $(ab)^3=$ ________________

$=$ ________________

$=a^{(\quad)}b^{(\quad)}$；

(3) $(ab)^4=$ ________________

$=$ ________________

$=a^{(\quad)}b^{(\quad)}$.

概括

$$(ab)^n=\underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\cdots\cdot(ab)}_{n\text{个}}$$

$$=(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}})\cdot(\underbrace{b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}_{n\text{个}})$$

$$=a^nb^n.$$

可得

$$\boxed{(ab)^n=a^nb^n\ (n\ \text{为正整数}).}$$

利用这个法则，可直接计算积的乘方.

这就是说，积的乘方，把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘.

例 3 计算：

(1) $(2b)^3$；　　(2) $\left(\frac{2}{3}a^3\right)^2$；

(3) $(-a)^3$；　　(4) $(-3x)^4$.

解 (1) $(2b)^3=2^3b^3=8b^3$.

(2) $\left(\frac{2}{3}a^3\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2(a^3)^2=\frac{4}{9}a^6$.

(3) $(-a)^3=(-1)^3a^3=-a^3$.

(4) $(-3x)^4=(-3)^4x^4=81x^4$.

$-a$ 看成 $(-1)a$.

练习

1. 判断下列计算是否正确，并说明理由：

(1) $(xy^3)^2=xy^6$；　　(2) $(-2x)^3=-6x^3$.

2. 计算：

(1) $(3a)^2$；　　(2) $(-3a)^3$；

(3) $(ab^2)^2$；　　(4) $(-2\times10^3)^3$.

4. 同底数幂的除法

我们已经知道同底数幂的乘法法则：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，那么同底数幂怎么相除呢？

用你熟悉的方法计算：

(1) $2^5\div2^2=$ ________；

(2) $10^7\div10^3=$ ________；

(3) $a^7\div a^3=$ ________ $(a\neq0)$.

由上面的计算，我们发现：

$$2^5 \div 2^2 = 2^3 = 2^{5-2};$$

$$10^7 \div 10^3 = 10^4 = 10^{7-3};$$

$$a^7 \div a^3 = a^4 = a^{7-3}.$$

你能根据除法的意义来说明这些运算结果是怎么得到的吗？

概括 一般地，设 m、n 为正整数，$m > n$，$a \neq 0$，有

$$\boxed{a^m \div a^n = a^{m-n}.}$$

这就是说，同底数幂相除，底数不变，指数相减.

例4 计算：

(1) $a^8 \div a^3$;

(2) $(-a)^{10} \div (-a)^3$;

(3) $(-2a)^7 \div (2a)^4$.

解 (1) $a^8 \div a^3 = a^{8-3} = a^5$.

(2) $(-a)^{10} \div (-a)^3 = (-a)^{10-3} = (-a)^7 = -a^7$.

(3) $(-2a)^7 \div (2a)^4 = (-1)^7(2a)^7 \div (2a)^4 = -(2a)^{7-4} = -(2a)^3 = -8a^3$.

以后，如果没有特别说明，我们总假设所给出的式子是有意义的. 如本例中，我们约定 $a \neq 0$.

思考 你能用 $(a+b)$ 的幂表示 $(a+b)^4 \div (a+b)^2$ 的结果吗？

练习

1. 填空：

(1) $a^5 \cdot (\quad) = a^9$;　　(2) $(\quad) \cdot (-b)^2 = (-b)^7$;

(3) $x^6 \div (\quad) = x$;　　(4) $(\quad) \div (-y)^3 = (-y)^7$.

2. 计算：

(1) $a^{10} \div a^2$;　　(2) $(-x)^9 \div (-x)^3$;

(3) $m^8 \div m^2 \cdot m^3$;　　(4) $(a^3)^2 \div a^6$.

读一读

根据除法的意义推导同底数幂的除法法则

前面我们通过一些计算，归纳、探索出同底数幂的除法法则．下面我们根据除法的意义来推导同底数幂的除法法则．

因为除法是乘法的逆运算，计算 $a^m \div a^n$（m、n 为正整数，且 $m > n$，$a \neq 0$）实际上是要求一个式子，使

$$a^n \cdot (\quad) = a^m.$$

假设这个式子是 a^k（k 为正整数，待定），即应有

$$a^n \cdot a^k = a^m,$$

即 $$a^{n+k} = a^m,$$

所以 $$n + k = m,$$

得 $$k = m - n.$$

因此，要求的式子应是 a^{m-n}．

由同底数幂的乘法法则，可知

$$a^n \cdot a^{m-n} = a^{n+(m-n)} = a^m,$$

所以 a^{m-n} 满足要求，从而有

$$a^m \div a^n = a^{m-n}（m、n 为正整数，且 m > n，a \neq 0）.$$

习题11.1

A 组

1. 计算(结果以幂的形式表示)：

(1) $9^3\times 9^5$；　　(2) $3^5\times 27$；

(3) $a^7\cdot a^8$；　　(4) $x^2\cdot x^3\cdot x^4$.

2. 计算：

(1) $(10^3)^3$；　　(2) $(a^3)^7$；

(3) $(x^2)^4$；　　(4) $(a^2)^3\cdot a^5$.

3. 判断下列等式是否正确，并说明理由：

(1) $a^2\cdot a^2=(2a)^2$；　　(2) $a^2\cdot b^2=(ab)^4$；

(3) $a^{12}=(a^2)^6=(a^3)^4=(a^5)^7$；　　(4) $a^6\div a^2=a^3$.

4. 计算：

(1) $(3\times 10^5)^2$；　　(2) $(2x)^2$；

(3) $(-2x)^3$；　　(4) $a^2\cdot (ab)^3$；

(5) $(ab)^3\cdot (ac)^4$.

5. 计算：

(1) $x^{12}\div x^4$；　　(2) $(-a)^6\div (-a)^4$；

(3) $(p^3)^2\div p^5$；　　(4) $a^{10}\div (-a^2)^3$.

B 组

6. 判断下列计算是否正确，如果不正确，请予以改正：

(1) $(a^2b)^2=a^2b^2$；　　(2) $(3xy^2)^2=6x^2y^4$；

(3) $(-m)^7\div (-m)^2=m^5$.

7. 计算：

(1) $(a^3)^3\div (a^4)^2$；　　(2) $(x^2y)^5\div (x^2y)^3$；

(3) $x^2\cdot (x^2)^3\div x^5$；　　(4) $(y^3)^3\div y^3\div (-y^2)^2$.

8. 用多少张边长为 a 的正方形硬纸卡片，能拼出一个新的正方形？试写出三个答案，并用两种方法表示新正方形的面积. 从不同的表示方法中，你能发现什么？

11.2 整式的乘法

1. 单项式与单项式相乘

试一试

计算：

(1) $(2\times10^{3})\times(5\times10^{2})$；

(2) $2x^{3}\cdot5x^{2}$.

例1 计算：

(1) $3x^{2}y\cdot(-2xy^{3})$；

(2) $(-5a^{2}b^{3})\cdot(-4b^{2}c)$.

解 (1) $3x^{2}y\cdot(-2xy^{3})$

$=[3\cdot(-2)]\cdot(x^{2}\cdot x)\cdot(y\cdot y^{3})$

$=-6x^{3}y^{4}$.

(2) $(-5a^{2}b^{3})\cdot(-4b^{2}c)$

$=[(-5)\cdot(-4)]\cdot a^{2}\cdot(b^{3}\cdot b^{2})\cdot c$

$=20a^{2}b^{5}c$.

总结一下，怎样进行单项式的乘法？

概括 单项式与单项式相乘，只要将它们的系数、相同字母的幂分别相乘，对于只在一个单项式中出现的字母，连同它的指数一起作为积的一个因式.

讨论

练习

1. 计算：

(1) $3a^2 \cdot 2a^3$；　　(2) $(-9a^2b^3) \cdot 8ab^2$；

(3) $(-3a^2)^3 \cdot (-2a^3)^2$；　　(4) $(-3xy^2z) \cdot (x^2y)^2$.

2. 光在真空及空气中的传播速度约为 3×10^8 m/s，太阳光射到地球上的时间约为 5×10^2 s，地球与太阳的距离约为多少千米？

3. 小明的步长为 a m，他量得一间屋子长 15 步、宽 14 步，这间屋子的面积是多少平方米？

2. 单项式与多项式相乘

试一试

计算：$2a^2 \cdot (3a^2 - 5b)$.

例 2 计算：$(-2a^2)\cdot(3ab^2-5ab^3)$.

解 $(-2a^2)\cdot(3ab^2-5ab^3)$

$=(-2a^2)\cdot 3ab^2+(-2a^2)\cdot(-5ab^3)$

$=-6a^3b^2+10a^3b^3$.

概括 单项式与多项式相乘，将单项式分别乘以多项式的每一项，再将所得的积相加.

练习

1. 计算：

(1) $3x^3y\cdot(2xy^2-3xy)$；

(2) $2x\cdot(3x^2-xy+y^2)$.

2. 化简：$x(x^2-1)+2x^2(x+1)-3x(2x-5)$.

3. 多项式与多项式相乘

我们再来看一看本章导图中的问题：

将一块长 m m、宽 a m 的长方形林地的长、宽分别增加 n m 和 b m. 用两种方法表示这块林地现在的面积.

现在这块长方形林地的长为 $(m+n)$ m，宽为 $(a+b)$ m，因而它的面积为 $(m+n)(a+b)$ m^2.

也可以这样理解：如图 11.2.1 所示，这块林地由四小块组成，它们的面积分别为 ma m^2、mb m^2、na m^2 和 nb m^2，故这块林地的面积为 $(ma+mb+na+nb)$ m^2.

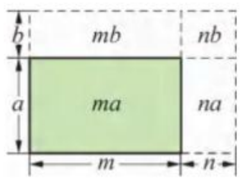


图11.2.1

由于 $(m+n)(a+b)$ 和 $(ma+mb+na+nb)$ 表示同一块林地的面积，故有

$$(m+n)(a+b)=ma+mb+na+nb.$$

实际上，把 $(m+n)$ 看成一个整体，有

$$(m+n)(a+b)=(m+n)a+(m+n)b$$
$$=ma+mb+na+nb.$$

如下式所示，等式的右边可以看作左边用线相连的各项乘积的和：

$$(m+n)(a+b)=ma+mb+na+nb.$$

概括　上述等式实际上给出了多项式乘以多项式的法则：

多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项分别乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加.

▶ **例 3**　计算：

(1) $(x+2)(x-3)$；

(2) $(2x+5y)(3x-2y)$.

解　(1)　$(x+2)(x-3)$

$=x^2-3x+2x-6$

$=x^2-x-6.$

计算结果中的 $-x$ 是怎么得到的？

(2)　$(2x+5y)(3x-2y)$

$=6x^2-4xy+15yx-10y^2$

$=6x^2+11xy-10y^2.$

▶ **例 4**　计算：

(1) $(m-2n)(m^2+mn-3n^2)$；

(2) $(3x^2-2x+2)(2x+1)$.

解　(1)　$(m-2n)(m^2+mn-3n^2)$

$=m\cdot m^2+m\cdot mn-m\cdot 3n^2-2n\cdot m^2-2n\cdot mn+2n\cdot 3n^2$

$=m^3+m^2n-3mn^2-2m^2n-2mn^2+6n^3$

$=m^3-m^2n-5mn^2+6n^3.$

(2) $(3x^2 - 2x + 2)(2x + 1)$

$= 6x^3 + 3x^2 - 4x^2 - 2x + 4x + 2$

$= 6x^3 - x^2 + 2x + 2.$

练习

计算：

(1) $(x + 5)(x - 7)$；

(2) $(x + 5y)(x - 7y)$；

(3) $(2m + 3n)(2m - 3n)$；

(4) $(2a + 3b)^2$.

习题11.2

A 组

1. 计算：

(1) $5a^3 \cdot 8a^2$；

(2) $11a^{12} \cdot (-12a^{11})$；

(3) $2x^2 \cdot (-3x)^4$；

(4) $(-8xy^2) \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right)^3$.

2. 计算：

(1) $(-3x) \cdot (2x^2 - x + 4)$；

(2) $\frac{5}{2}xy \cdot \left(-x^3y^2 + \frac{4}{5}x^2y^3\right)$.

3. 计算：

(1) $x\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 3x\left(\frac{3}{2}x - 2\right)$；

(2) $y^2(y - 1) + 2y(y^2 - 2y + 3)$.

4. 计算：

(1) $(x + 5)(x - 6)$；

(2) $(2x + 1)(2x + 3)$；

(3) $(3x + 4)(3x - 4)$；

(4) $(9x + 4y)^2$.

5. 计算：

(1) $(3x - 1)(2x^2 + 3x - 4)$；

(2) $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$.

B 组

6. 世界上最大的金字塔——胡夫金字塔高达 146.6 m，底边长 230.4 m，用了约 2.3×10^{6} 块大石块，每块重约 2.5×10^{3} kg．问：胡夫金字塔总重约为多少千克？

7. 已知甲长方形相邻两边长相差 6，乙长方形相邻两边长相差 2，甲、乙两长方形的周长相等．问：哪个长方形的面积大？大多少？

（第 6 题）

11.3 乘法公式

1．两数和乘以这两数的差

做一做

用多项式的乘法法则计算：$(a+b)(a-b)$．

$(a+b)(a-b)=$ ________________

$=$ ________________．

这两个特殊的多项式相乘，得到的结果特别简洁：

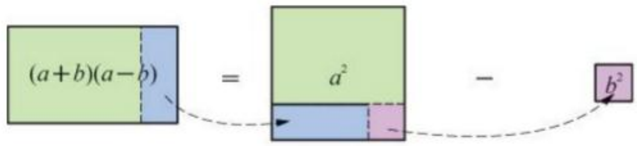
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

> 利用这个公式，可以直接计算两数和乘以这两数的差．

这就是说，两数和与这两数差的积，等于这两数的平方差．

这个公式叫做两数和与这两数差的乘法公式，有时也简称为平方差公式．

观察图 11.3.1，指出它包含哪些长方形和正方形，并用等式表示下图中图形面积的运算：



__________ = __________ − __________.

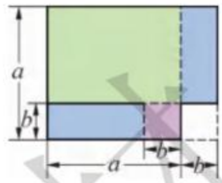


图11.3.1

例 1 计算：

(1) $(a+3)(a-3)$；

(2) $(2a+3b)(2a-3b)$；

(3) $(1+2c)(1-2c)$；

(4) $(-2x-y)(2x-y)$.

解 (1) $(a+3)(a-3)$

$= a^2-3^2$

$= a^2-9$.

(2) $(2a+3b)(2a-3b)$

$= (2a)^2-(3b)^2$

$= 4a^2-9b^2$.

(3) $(1+2c)(1-2c)$

$= 1^2-(2c)^2$

$= 1-4c^2$.

(4) $(-2x-y)(2x-y)$

$= (-y-2x)(-y+2x)$

$= (-y)^2-(2x)^2$

$= y^2-4x^2$.

你还有其他解法吗？

▶ **例 2** 计算：1 998 × 2 002.

解 1 998 × 2 002

$= (2\,000 - 2) \times (2\,000 + 2)$

$= 2\,000^2 - 2^2$

$= 4\,000\,000 - 4$

$= 3\,999\,996.$

▶ **例 3** 如图 11.3.2，街心花园有一块边长为 a m 的正方形草坪（$a > 2$），经统一规划后，南北向增加 2 m，东西向减少 2 m．改造后得到一块长方形草坪．求这块长方形草坪的面积．

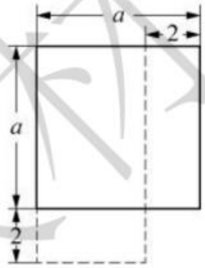


图11.3.2

解 $(a + 2)(a - 2) = a^2 - 4.$

答：这块长方形草坪的面积为 $(a^2 - 4)$ m².

练习

1. 计算：

(1) $\left(2x + \frac{1}{2}\right)\left(2x - \frac{1}{2}\right)$；　(2) $(-x + 2)(-x - 2)$；

(3) $(-2x + y)(2x + y)$；　(4) $(y - x)(-x - y)$.

2. 计算：

(1) 498 × 502；　(2) 999 × 1 001.

2. 两数和（差）的平方

做一做

用多项式的乘法法则计算：$(a + b)^2$.

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) =$ ______________________

$=$ ______________________.

我们又得到一个新的公式：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

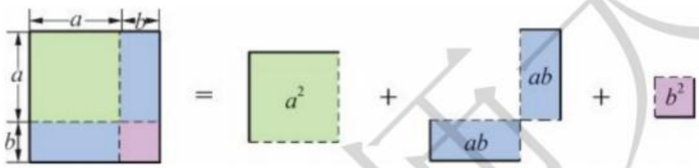
这就是说，两数和的平方，等于这两数的平方和加上它们的积的 2 倍.

这个公式叫做两数和的平方公式.

利用这个公式，可以直接计算两数和的平方.

试一试

观察图 11.3.3，指出它包含哪些长方形和正方形，并用等式表示下图中图形面积的运算：



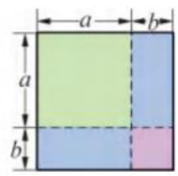


图11.3.3

________ = ______ + ________ + ________.

▶ **例 4** 计算：

(1) $(2x+3y)^2$；

(2) $\left(2a+\dfrac{b}{2}\right)^2$.

解 (1) $(2x+3y)^2$

$=(2x)^2+2\times 2x\times 3y+(3y)^2$

$=4x^2+12xy+9y^2$.

把 $2x$ 看作 a，$3y$ 看作 b，直接代入公式.

(2) $\left(2a+\dfrac{b}{2}\right)^2$

$$=(2a)^2+2\times 2a\times\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$=4a^2+2ab+\frac{b^2}{4}.$$

试一试

推导两数差的平方公式.

我们可以根据多项式的乘法法则直接计算 $(a-b)^2$. 注意到 $a-b=a+(-b)$，也可以利用两数和的平方公式来计算，即

$$\begin{aligned}(a-b)^2&=[a+(-b)]^2\\&=a^2+2a(-b)+(-b)^2\\&=a^2-2ab+b^2.\end{aligned}$$

这样就得到了两数差的平方公式：

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

这就是说，两数差的平方，等于这两数的平方和减去它们的积的 2 倍.

思考 指出图 11.3.4 中包含哪些长方形和正方形，你能用图中的面积关系来解释两数差的平方公式吗？

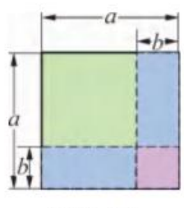


图11.3.4

例 5 计算：

(1) $(3x-2y)^2$； (2) $\left(-\frac{1}{2}m+1\right)^2$.

解 (1) $(3x-2y)^2$

$= (3x)^2-2\times 3x\times 2y+(2y)^2$

$= 9x^2-12xy+4y^2$.

(2) 方法 1 $\left(-\frac{1}{2}m+1\right)^2$

$= \left(-\frac{1}{2}m\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{2}m\right)\times 1+1^2$

$= \frac{1}{4}m^2-m+1$.

方法 2 $\left(-\frac{1}{2}m+1\right)^2$

$= \left(1-\frac{1}{2}m\right)^2$

$= 1^2-2\times 1\times\frac{1}{2}m+\left(\frac{1}{2}m\right)^2$

$= 1-m+\frac{1}{4}m^2$.

你还有其他解法吗？

练习

1. 计算：

(1) $(x+3)^2$； (2) $(2x+y)^2$.

2. 计算：

(1) $(x-3)^2$； (2) $(2m-3n)^2$.

3. 计算：

(1) $(-2m+n)^2$； (2) $(-2m-n)^2$.

读一读

末位数字是 5 的两位数平方的速算法则

你能很快算出 75^2 吗？我们一起来探索一下，末位数字是 5 的两位数的平方有什么规律．请你用计算器计算下列算式：

$15^2=$ ________；$25^2=$ ________；$35^2=$ ________；

$45^2=$ ________；$55^2=$ ________；$65^2=$ ________；

$75^2=$ ________；$85^2=$ ________；$95^2=$ ________．

从这些计算结果中，你能发现什么？

我们发现了一个速算法则：

末位数字是 5 的两位数的平方，可以先写出它的十位数字与比它大 1 的自然数的乘积，再在末尾接着写上 25．

例如，计算 75^2：

因为 $7\times 8=56$，

所以 $75^2=5\,625$．

这是什么道理呢？我们可以应用两数和的平方公式来说明：

设一个两位数的个位数字是 5，十位数字是 n，则这个两位数等于 $10n+5$，所以

$$(10n+5)^2=100n^2+100n+25=100n(n+1)+25.$$

得到的这个等式对于任意的正整数 n 都是成立的．如果 n 是一个两位数或者三位数，那么 $10n+5$ 就是一个三位数或者四位数，因此，对于个位数字是 5 的三位数、四位数等，这个速算法则同样适用．

例如，计算 195^2：

因为 $19\times 20=380$，

所以 $195^2=38\,025$．

阅读材料

贾宪三角

贾宪三角(如图 1)最初于 11 世纪被发现，在我国北宋时期数学家贾宪(约 11 世纪上半叶)的《黄帝九章算法细草》一书中，其原名为“开方作法本源图”，用来作开方运算，在数学史上占有领先地位．我国南宋时期数学家杨辉(13 世纪)于 1261 年所著的《详解九章算法》一书中记载着这一图表．因此，后人把这个图表称作贾宪三角或杨辉三角．

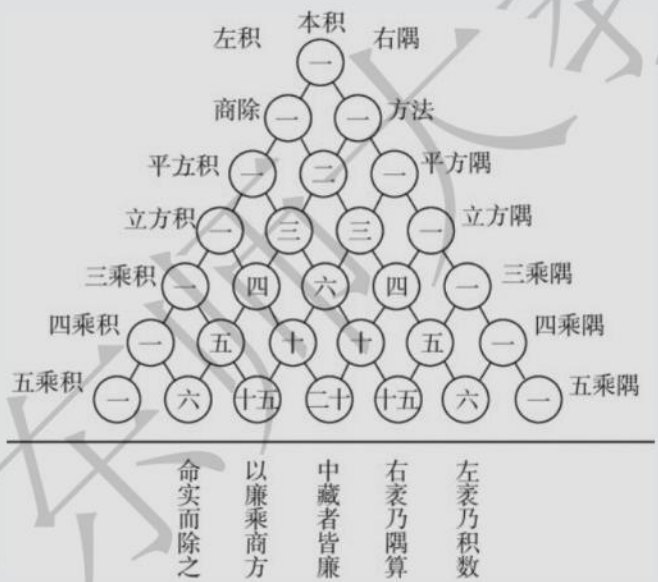


图 1

在欧洲，贾宪三角则被称为“帕斯卡三角”，这是因为法国数学家帕斯卡(B. Pascal，1623—1662)于 1654 年发表了此“三角”，这比我国迟了近 600 年．其实，数学史上有不少人各自独立地绘制过类似图表，如 1427 年阿拉伯的阿尔·卡西(Al-Kashi，约 1380—1429)、1527 年德国的阿皮亚纳斯(P. Apianus，1495—1552)、1544 年德国的施蒂费尔(M. Stifel，1487—1576)等．

贾宪三角在历史上被不同时代的人绘制出来，有着不同的应用指向．贾宪将

它应用于开方运算，注重增乘方法，并把这种方法推向求高次方根；帕斯卡关心数字三角阵的性质探讨，并把这种性质推广到组合数的性质上；施蒂费尔则注重二项展开式系数间的关系；还有我国元代数学家朱世杰于 13 世纪巧妙地利用贾宪三角得出了一系列级数求和的重要公式，并且利用这些公式求出许多更为复杂的级数之和，这在当时世界上处于领先水平.

与我们现在的学习联系最紧密的是二项式乘方展开式的系数规律．如图 2，在贾宪三角中，第三行的三个数(1、2、1)恰好对应着两数和的平方 $(a+b)^2$ 的展开式 $a^2+2ab+b^2$ 的系数．类似地，通过计算可以发现：第四行的四个数(1、3、3、1)恰好对应着两数和的立方$(a+b)^3$的展开式$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$的系数，第五行的五个数(1、4、6、4、1)恰好对应着两数和的四次方$(a+b)^4$的展开式$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$的系数，等等．由此可见，贾宪三角可以看作对两数和的平方公式的推广.

$(a+b)^0$ ………………………… 1

$(a+b)^1$ ……………………… 1　1

$(a+b)^2$ …………………… 1　2　1

$(a+b)^3$ ………………… 1　3　3　1

$(a+b)^4$ ……………… 1　4　6　4　1

$(a+b)^5$ …………… 1　5　10　10　5　1

$(a+b)^6$ ………… 1　6　15　20　15　6　1

图 2

贾宪三角告诉了我们二项式乘方展开式的系数规律，你发现其中的字母及字母指数的排列规律了吗？请你试着写出 $(a+b)^5$、$(a+b)^6$ 和$(a+b)^7$ 的展开式.

习题11.3

A 组

1. 计算：

(1) $(a+2b)(a-2b)$；

(2) $(2a+5b)(2a-5b)$；

(3) $(x^2-1)(1+x^2)$；

(4) $\left(-\frac{1}{3}s+\frac{1}{2}t\right)\left(\frac{1}{3}s+\frac{1}{2}t\right)$.

2. 计算：

(1) $(3a+b)^2$；

(2) $\left(2a+\frac{1}{3}b\right)^2$；

(3) $(2a-4b)^2$；

(4) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b\right)^2$.

3. 计算：

(1) $(-m^2-2m)^2$；

(2) $(-2x+y)(-2x-y)$；

(3) $(2a+1)(-2a-1)$.

4. 填空：

(1) a^2+6a+____ $=(a+$____$)^2$；

(2) $4x^2-20x+$____ $=(2x-$____$)^2$；

(3) $a^2+b^2=(a-b)^2+$____；

(4) $(x-y)^2+$____ $=(x+y)^2$.

5. 用乘法公式计算：$(a-b+1)(a-b-1)$.

B 组

6. 两个连续奇数的平方差一定是 8 的倍数．为什么？

7. 已知 $a+b=4$，$ab=3$，求下列各式的值：

(1) a^2+b^2；

(2) $(a-b)^2$.

8. 用总长度为 l 的篱笆围成一个长方形区域，相邻两边的长度相差 d，求篱笆所围成区域的面积.

11.4 整式的除法

1. 单项式除以单项式

试一试

计算：$12a^5c^2 \div 3a^2$①.

根据除法的意义，上面的计算就是要求一个式子，使它与 $3a^2$ 的乘积等于 $12a^5c^2$.

因为 $(4a^3c^2) \cdot 3a^2 = 12a^5c^2$，

所以 $12a^5c^2 \div 3a^2 = 4a^3c^2$.

概括 单项式相除，把系数、同底数幂分别相除作为商的因式，对于只在被除式中出现的字母，则连同它的指数一起作为商的一个因式.

例1 计算：

(1) $24a^3b^2 \div 3ab^2$；

(2) $-21a^2b^3c \div 3ab$；

(3) $(6xy^2)^2 \div 3xy$.

解 (1) $24a^3b^2 \div 3ab^2$

$= (24 \div 3)(a^3 \div a)(b^2 \div b^2)$

$= 8a^{3-1} \cdot 1$

$= 8a^2$.

注意：

$b^2 \div b^2 = 1$.

① 把这个算式中的两个单项式 $12a^5c^2$ 和 $3a^2$ 分别看作一个整体，这个算式就是 $(12a^5c^2) \div (3a^2)$ 的意思．下同．

(2) $-21a^2b^3c \div 3ab$

$= (-21 \div 3)a^{2-1}b^{3-1}c$

$= -7ab^2c.$

(3) $(6xy^2)^2 \div 3xy$

$= 36x^2y^4 \div 3xy$

$= 12xy^3.$

思考 你能用 $(a-b)$ 的幂表示 $(a-b)^5 \div (a-b)^2$ 的结果吗？

练习

填表：

被除式	$6x^3y^3$	$-42x^3y^3$	$-42x^3y^3$
除　式	$2xy$		$-6x^2y^2$
商		$7x^3$	

2. 多项式除以单项式

计算：

(1) $(ax + bx) \div x$;

(2) $(ma + mb + mc) \div m$.

根据除法的意义，容易探索、计算出结果. 以小题(2)为例，$(ma+mb+mc)\div m$ 就是要求一个式子，使它与 m 的积是 $ma+mb+mc$.

因为 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$，所以

$$(ma+mb+mc)\div m=a+b+c.$$

这里，商式中的项 a、b 和 c 是怎样得到的？你能总结出多项式除以单项式的法则吗？

概括 多项式除以单项式，先用这个多项式的每一项除以这个单项式，再把所得的商相加.

例2 计算：

(1) $(9x^4-15x^2+6x)\div 3x$;

(2) $(28a^3b^2c+a^2b^3-14a^2b^2)\div(-7a^2b)$.

解 (1)

$$\begin{aligned}&(9x^4-15x^2+6x)\div 3x\\&=9x^4\div 3x-15x^2\div 3x+6x\div 3x\\&=3x^3-5x+2.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&(28a^3b^2c+a^2b^3-14a^2b^2)\div(-7a^2b)\\&=28a^3b^2c\div(-7a^2b)+a^2b^3\div(-7a^2b)-14a^2b^2\div(-7a^2b)\\&=-4abc-\frac{1}{7}b^2+2b.\end{aligned}$$

练习

1. 计算：

(1) $(3ab-2a)\div a$;

(2) $(5ax^2+15x)\div 5x$;

(3) $(12m^2n+15mn^2)\div 6mn$;

(4) $(x^3-2x^2y)\div(-x^2)$.

2. 计算：

(1) $(4a^3b^3-6a^2b^3c-2ab^5)\div(-2ab^2)$;

(2) $\left(x^2y^3-\frac{1}{2}x^3y^2+2x^2y^2\right)\div\frac{1}{2}xy^2$.

习题11.4

A 组

1. 计算：

(1) $(-21a^2b^3) \div 7a^2b$；

(2) $7a^5b^2c^3 \div (-3a^3b)$；

(3) $\left(-\dfrac{1}{2}a^4x^4\right) \div \left(-\dfrac{1}{6}a^3x^2\right)$；

(4) $(16x^3 - 8x^2 + 4x) \div (-2x)$.

2. 计算：

(1) $(6a^3b - 9a^2c) \div 3a^2$；

(2) $(4a^3 - 6a^2 + 9a) \div (-2a)$；

(3) $(-4m^4 + 20m^3n - m^2n^2) \div (-4m^2)$；

(4) $\left(x^2y - \dfrac{1}{2}xy^2 - 2xy\right) \div \dfrac{1}{2}xy$.

3. 计算：

(1) $(12p^3q^4 + 20p^3q^2r - 6p^4q^3) \div (-2pq)^2$；

(2) $[4y(2x-y) - 2x(2x-y)] \div (2x-y)$.

4. 先化简，再求值：$[(a+2b)(a-2b)-(a-2b)^2] \div 2b$，其中 $a=3$，$b=2$.

5. 先化简，再求值：$[(2a+b)(2a-b)-(2a-b)^2] \div (2a-b)$，其中 $a \neq 1$，$b=2$.

B 组

6. 聪聪在一次数学课外活动中发现了一个奇特的现象：他随便想一个非零的有理数，把这个数平方，再加上这个数，然后把结果除以这个数，最后减去这个数，所得结果总是 1.你能说明其中的道理吗？

7. 已知多项式 A 与单项式 $5xy$ 的差，除以 $x-2y$，所得的商是 $3x+y$，求 A.

11.5　因式分解

回忆　运用前面所学的知识填空：

(1) $m(a+b+c)=$__________________;

(2) $(a+b)(a-b)=$__________________;

(3) $(a+b)^2=$________________________.

观察上面三个等式，填空：

(1) $ma+mb+mc=(\quad\quad)(\quad\quad\quad\quad)$;

(2) $a^2-b^2=(\quad\quad\quad\quad)(\quad\quad\quad\quad)$;

(3) $a^2+2ab+b^2=(\quad\quad\quad\quad)^2$.

概括　"回忆"中的三个等式是我们已熟悉的整式的乘法运算，而"试一试"中的三个等式，其运算过程正好与整式的乘法相反，它是把一个多项式化为几个整式的积的形式.

把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做多项式的**因式分解**(factorization).

> 还记得整数的因数分解吗？它与乘法之间是什么关系？

多项式 $ma+mb+mc$ 中的每一项都含有一个相同的因式 m，我们称之为**公因式**(common factor). 把公因式提出来，多项式 $ma+mb+mc$ 就可以分解成两个因式 m 和 $(a+b+c)$ 的乘积了. 像这种因式分解的方法，叫做**提公因式法**.

"试一试"中的小题(2)和小题(3)，实际上是将乘法公式反过来用，来进行因式分解的. 这种因式分解的方法称为**公式法**.

做一做

把下列多项式分解因式:

(1) $3a + 3b =$ ________________;

(2) $5x - 5y + 5z =$ ________________;

(3) $x^2 - 4y^2 =$ ________________;

(4) $m^2 + 6mn + 9n^2 =$ ________________.

例1 把下列多项式分解因式:

(1) $-5a^2 + 25a$;

(2) $3a^2 - 9ab$;

(3) $25x^2 - 16y^2$;

(4) $x^2 + 4xy + 4y^2$.

解 (1)
$$\begin{aligned}&-5a^2 + 25a\\&= -5a(a - 5).\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&3a^2 - 9ab\\&= 3a(a - 3b).\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&25x^2 - 16y^2\\&= (5x)^2 - (4y)^2\\&= (5x + 4y)(5x - 4y).\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&x^2 + 4xy + 4y^2\\&= x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2\\&= (x + 2y)^2.\end{aligned}$$

你知道如何检验因式分解的正确性吗?

例2 把下列多项式分解因式：

(1) $4x^3y-4x^2y^2+xy^3$；

(2) $3x^3-12xy^2$.

解 (1) $4x^3y-4x^2y^2+xy^3$

$=xy(4x^2-4xy+y^2)$

$=xy(2x-y)^2$.

先提公因式，再运用公式.

(2) $3x^3-12xy^2$

$=3x(x^2-4y^2)$

$=3x[x^2-(2y)^2]$

$=3x(x+2y)(x-2y)$.

练习

1. 判断下列因式分解是否正确，并说明理由．如果不正确，请写出正确答案．

(1) $4a^2-4a+1=4a(a-1)+1$；

(2) $x^2-4y^2=(x+4y)(x-4y)$.

2. 把下列多项式分解因式：

(1) a^2+a；　(2) $4ab-2a^2b$；

(3) $9m^2-n^2$；　(4) $2am^2-8a$；

(5) $2a^2+4ab+2b^2$.

习题11.5

A组

1. 把下列多项式分解因式：

(1) $3x+3y$；　(2) $-24m^2x-16n^2x$；

(3) x^2-1;

(4) $(xy)^2-1$;

(5) $a^4x^2-a^4y^2$;

(6) $3x^2+6xy+3y^2$;

(7) $(x-y)^2+4xy$;

(8) $4a^2-3b(4a-3b)$.

2. 把下列多项式分解因式：

(1) $(x-3)^2-1$;

(2) $(a+b)^2-2(a+b)c+c^2$;

(3) $(ab+a)-(b+1)$.

3. 先分解因式，再求值：$2x(a-2)-y(2-a)$，其中 $a=0.5$， $x=1.5$， $y=-2$.

4. 用简便方法计算：

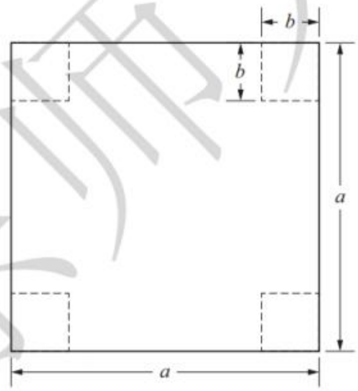
(1) 99×101;

(2) $2^{10}-2^9$;

(3) 99^2;

(4) $33^2-66\times49+49^2$.

5. 在一块边长 $a=6.6$ m 的正方形空地的四角均留出一块边长 $b=1.7$ m 的正方形空地修建花坛，其余的地方种植草坪. 问：草坪的面积有多大？



（第 5 题）

B 组

6. 已知二次三项式 x^2+ax+4 含有一个因式 $x-2$，求 a 的值.

7. 无论 x 为何实数，二次三项式 x^2+4x+5 的值均不小于 1. 为什么？

数学活动

面积与代数恒等式

在前面的学习中，我们已经接触了很多代数恒等式，知道可以用一些长方形(或正方形)的硬纸片拼成的图形面积来解释这些代数恒等式.

(1) 观察图 1 和图 2，指出它们分别包含哪些长方形和正方形，并分别说明图 1 和图 2 可以解释什么代数恒等式.

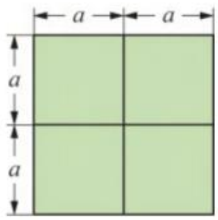


图 1

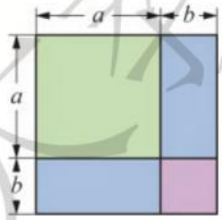


图 2

(2) 制作一些如图 3 所示的正方形和长方形的硬纸片. 利用这些硬纸片拼成一些长方形或正方形，并用所拼成的图形面积来解释所学的乘法公式及某些幂的运算公式.

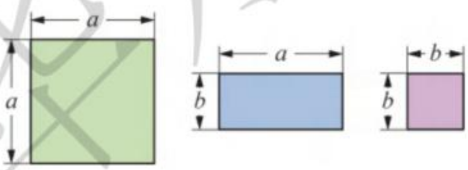


图 3

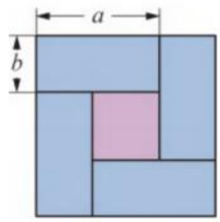


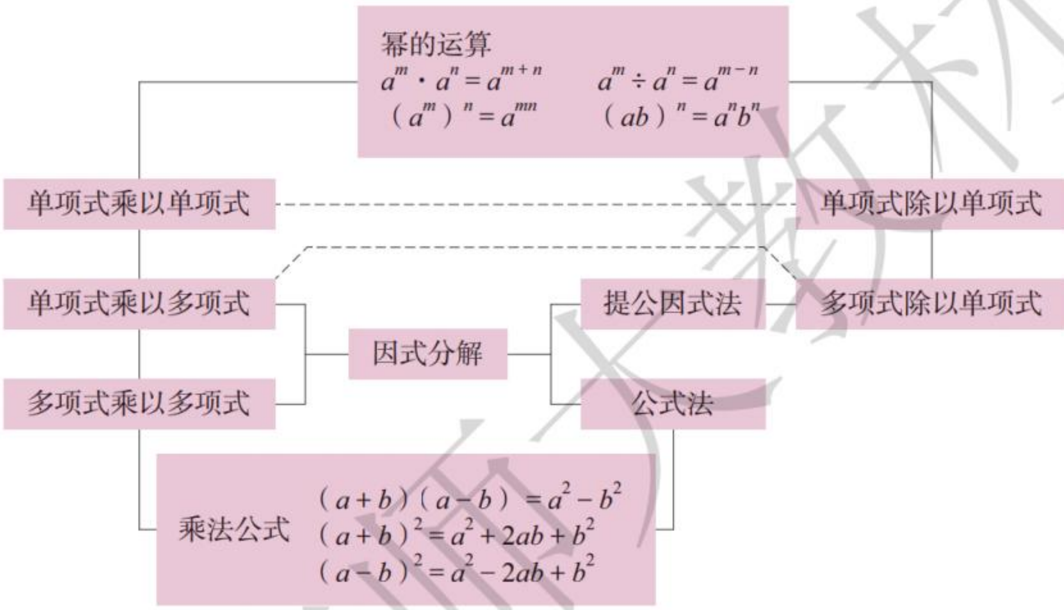
图 4

(3) 根据图 4，利用某一图形的面积的不同表示方法写出一个代数恒等式.

(4) 你能用图形的面积来解释代数恒等式 $(a+2b)(2a-b)=2a^2+3ab-2b^2$ 的正确性吗？尝试再写出一个代数恒等式，并用图形的面积来解释其正确性.

小结

一、知识结构



二、要点

1. 本章主要研究整式的乘法和除法，我们经历了对运算法则的探索、推导和应用的过程.

以整式的乘法为例，首先研究了幂的运算，接着逐步研究单项式乘以单项式、单项式乘以多项式和多项式乘以多项式，由特殊到一般，由已知到未知，由简到繁，层层深入，逐步发展，反映了人们对数学知识的认识和发展过程.

从运算来说，核心思想是化归. 多项式(单项式)乘以多项式，归结为项与项相乘，即单项式乘以单项式. 单项式乘以单项式归结为系数相乘和同底数幂的乘法. 幂的运算是它们的基础. 探索和推导所有这些整式运算法则的依据，从根本上说是沿用了数的运算律.

2. 有一些特殊形式的多项式乘法运算，结果较为简洁，在计算中可以作为乘法公式直接运用．这些公式用图形的面积来解释，直观明了，反映了数与形的美妙结合．乘法公式不仅可以使式的运算或变形更加简便，为进一步学习其他数学知识(如因式分解、用配方法解二次方程、研究二次函数等)奠定必要的基础，而且公式的简洁、对称、和谐给我们以数学美的享受．

3. 多项式的因式分解与整数的因数分解相类似，它与整式乘法的过程恰好相反．我们可以用整式的乘法法则和乘法公式得到因式分解的方法，也可以用整式的乘法来检验因式分解的正确性．

整式与整数还有着许多类似之处．例如，两个整数的和、差、积仍是整数，但两个整数的商(除数不为零)却未必是整数，从而需要引进分数；类似地，两个整式的和、差、积仍是整式，但两个整式的商(除式不为零)未必是整式，从而需要引进新的代数式(分式)，对此我们将在八年级下学期作进一步研究．本章研究的整式的除法只涉及可整除的情形．

复习题

A 组

1. 计算：

(1) $a^{10} \cdot a^{8}$；

(2) $(xy)^{2} \cdot (xy)^{3}$；

(3) $[(-x)^{3}]^{2}$；

(4) $[(-x)^{2}]^{3}$；

(5) $(-2mn^{2})^{3}$；

(6) $(y^{3})^{2} \cdot (y^{2})^{4}$.

2. 计算：

(1) $2a \cdot 3a^{2}$；

(2) $(-3xy) \cdot (-4yz)$；

(3) $(-2a^{2})^{2} \cdot (-5a^{3})$；

(4) $(-3x) \cdot (2x^{2} - x - 1)$；

(5) $(x-2)(x-6)$；

(6) $(2x-1)(3x+2)$；

(7) $(y-2)(y^{2}+2y+4)$；

(8) $(p-6q)(p^{2}+pq+q^{2})$.

3. 计算：

(1) $(x+2)(x-2)$；

(2) $(m+n)(m-n)$；

(3) $(-m-n)(-m+n)$；

(4) $(-m-n)(m+n)$；

(5) $(-m+n)(m-n)$；

(6) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y\right)^{2}$.

4. 计算：

(1) $2\,023^{2} - 2\,024 \times 2\,022$；

(2) $(4 \times 10^{4}) \times (2 \times 10^{3}) - (6.5 \times 10^{3}) \times (6 \times 10^{3})$；

(3) $(2x+5)^{2} - (2x-5)^{2}$；

(4) $2x \cdot \left(\frac{1}{2}x - 1\right) - 3x \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)$；

(5) $(-2x^{2}) \cdot (-y) + 3xy \cdot \left(1 - \frac{1}{3}x\right)$；

(6) $(-6x^{2})^{2} + (-3x)^{3} \cdot x$.

5. 计算：

(1) $a \cdot a^4 \div a^3$；

(2) $(-x)^6 \div (-x)^2 \cdot (-x)^3$；

(3) $27x^8 \div 3x^4$；

(4) $(-12m^3n^3) \div 4m^2n^3$；

(5) $(6x^2y^3z^2)^2 \div 4x^3y^4$；

(6) $(-6a^2b^5c) \div (-2ab^2)^2$.

6. 计算：

(1) $(6a^4 - 4a^3 - 2a^2) \div (-2a^2)$；

(2) $(4x^3y + 6x^2y^2 - xy^3) \div 2xy$；

(3) $\left(x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) \div \left(-\frac{1}{2}x\right)^2$；

(4) $(2ab^2 - b^3)^2 \div 2b^3$.

7. 计算：$[(x-2y)^2 + (x-2y)(x+2y) - 2x(2x-y)] \div 2x$.

8. 把下列多项式分解因式：

(1) $x^2 - 25x$；

(2) $2x^2y^2 - 4y^3z$；

(3) $am - an + ap$；

(4) $x^3 - 25x$；

(5) $1 - 4x^2$；

(6) $25x^2 + 20xy + 4y^2$；

(7) $x^3 - 4x^2 + 4x$.

9. 先化简，再求值：

(1) $3a(2a^2 - 4a + 3) - 2a^2(3a + 4)$，其中 $a=-2$；

(2) $(a-3b)^2 + (3a+b)^2 - (a+5b)^2 + (a-5b)^2$，其中 $a=-8$，$b=-6$.

B 组

10. 求下列各式的值：

(1) $(3x^4 - 2x^3) \div (-x) - (x - x^2) \cdot 3x$，其中 $x=-\frac{1}{2}$；

(2) $[(ab+1)(ab-2) - 2a^2b^2 + 2] \div (-ab)$，其中 $a=\frac{3}{2}$，$b=-\frac{4}{3}$.

11. 已知 $(x+y)^2 = 1$，$(x-y)^2 = 49$，求 $x^2 + y^2$ 和 xy 的值.

12. 已知 $a+b=3$，$ab=2$，求 a^2+b^2 的值.

13. 已知 $a-b=1$，$a^2+b^2=25$，求 ab 的值.

14. 把下列多项式分解因式：

(1) $x(x+y)-y(x+y)$；

(2) $(a+b)^2+2(a+b)+1$；

(3) $4x^4+4x^3+x^2$；

(4) $x^2-16ax+64a^2$；

(5) $(x-1)(x-3)+1$；

(6) $(ab+a)+(b+1)$.

15. (1) 一个正方形的边长增加 3 cm，它的面积增加了 45 cm^2，求这个正方形原来的边长.

(2) 一个正方形的边长减少 3 cm，它的面积减少了 45 cm^2，这个正方形原来的边长是多少呢？它和小题(1)的答案相同吗？

C 组

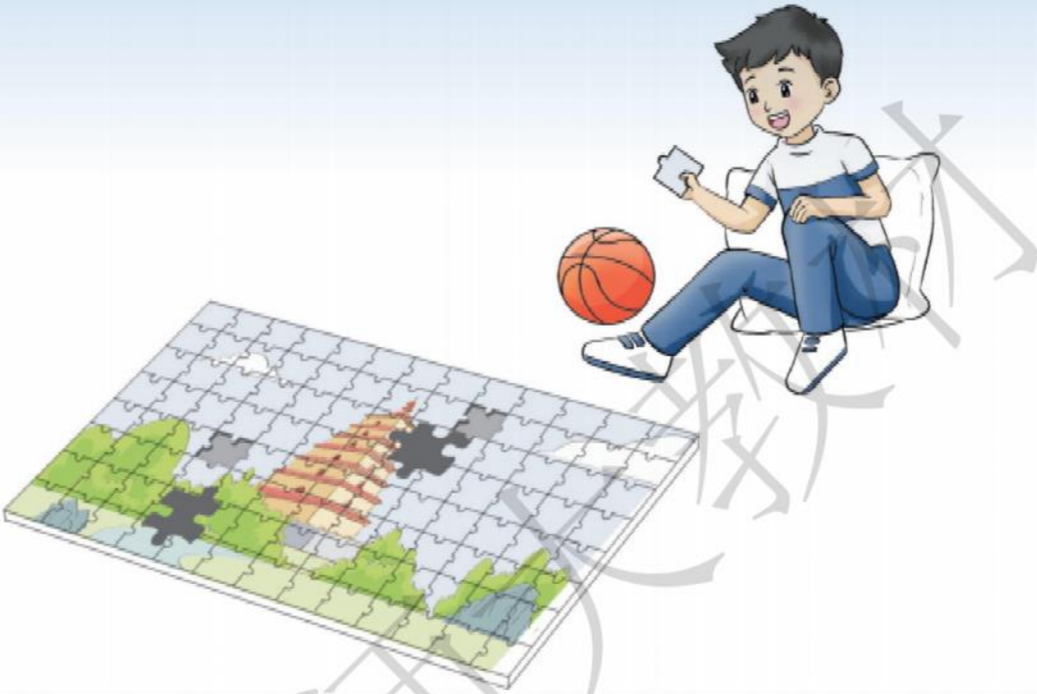
16. 已知一个长方形，若它的长增加 4 cm，宽减少 1 cm，则面积保持不变；若它的长减少 2 cm，宽增加 1 cm，则面积仍保持不变. 求这个长方形的面积.

17. 判断下列说法是否正确，并说明理由：

(1) 两个连续整数的平方差必是奇数；

(2) 若 a 为整数，则 a^3-a 能被 6 整除.

第 12 章　全等三角形



你玩过拼图游戏吗？它是指用许多各种颜色的小拼板拼成一幅幅美丽的图画．那些拼板有不少是形状相同、大小一样的．它们相互之间有什么关系呢？运用你的智慧，想想看！

★　本章将研究判定三角形全等的一些方法，并利用这些判定方法证明等腰三角形的性质和判定，以及线段垂直平分线和角平分线的性质定理及其逆定理，从中丰富对三角形的认识，进一步提高推理论证能力．

12.1 命题、定义、定理与证明

1. 命题

我们已经学过一些图形的特性，例如：

（1）三角形的内角和等于 180°；

（2）如果两个角是对顶角，那么这两个角相等；

（3）两直线平行，同位角相等；

（4）直角都相等.

它们都是判断某一件事情的语句，像这样表示判断的语句叫做**命题**(proposition).

许多命题是由条件和结论两部分组成的．条件是已知事项；结论是由已知事项推出的事项．这样的命题通常可写成“如果……，那么……”的形式．用“如果”开始的部分就是条件，用“那么”开始的部分就是结论.

例如，在上述命题(2)中，“两个角是对顶角”是条件，“这两个角相等”是结论．有的命题的条件和结论不十分明显，若将它写成“如果……，那么……”的形式，则容易分清它的条件和结论．例如，命题(4)可写成“如果两个角都是直角，那么这两个角相等”.

▶ **例 1** 把命题“三个角都相等的三角形是等边三角形”改写成“如果……，那么……”的形式，并分别指出该命题的条件和结论.

解 这个命题可以写成“如果一个三角形的三个角都相等，那么这个三角形是等边三角形”．该命题的条件是“一个三角形的三个角都相等”，结论是“这个三角形是等边三角形”.

根据已学过的知识，可以判断前面所列举的命题都是正确的，也就是说，如果条件成立，那么结论一定成立．像这样的命题，叫做真命题.

而有些命题，例如，“如果两个角相等，那么它们是对顶角”“一个锐角与一个钝角的和等于一个平角”等，当条件成立时，不能保证结论总是正确，也就是说结论不成立．像这样的命题，叫做假命题．

要判断一个命题是真命题，可以用演绎推理加以论证；而要判断一个命题是假命题，只要举出一个例子，说明该命题不成立，即只要举出一个符合该命题条件而不符合该命题结论的例子就可以了．在数学中，这种方法称为“举反例”．

例如，要说明命题“一个锐角与一个钝角的和等于一个平角”是假命题，只需举出一个反例（某一锐角与某一钝角的和不是 $180°$）．试试看，对所列的假命题举出反例：

____．

练习

1. 把下列命题改写成“如果……，那么……”的形式，并分别指出它们的条件和结论：

（1）全等三角形的对应边相等；

（2）在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线互相平行．

2. 指出下列命题中的真命题和假命题：

（1）同位角相等，两直线平行；

（2）多边形的内角和等于 $180°$；

（3）四边形的外角和等于 $360°$；

（4）平行于同一条直线的两条直线互相平行．

3. 指出下列命题中的真命题和假命题，若是假命题，请举出反例：

（1）两个锐角的和等于 $90°$；

（2）当 $x<0$ 时，$x^2-x>0$ 一定成立．

2. 定义、定理与证明

我们已经学过线段、角、平行线等许多名词. 我们需要用不同的语句来说明这些名词各自所包含的确切意义. 例如, 我们用"在同一平面内不相交的两条直线"来说明"平行线"所包含的意义. 这样的语句叫做这些名词的**定义**(difinition).

想想看, 你还学过哪些定义?

通过七年级的学习, 我们已经知道如下各命题都是正确的, 即都是公认的真命题:

两点确定一条直线;

两点之间线段最短;

同一平面内, 过一点有且只有一条直线与已知直线垂直;

过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行;

两条直线被第三条直线所截, 如果同位角相等, 那么这两条直线平行.

我们将这些命题视为基本事实, 它们是我们在继续学习过程中用来判断其他命题真假的原始依据, 即出发点.

数学中, 有些命题可以从基本事实或其他真命题出发, 用逻辑推理的方法判断它们是正确的, 并且可以作为进一步判断其他命题真假的依据, 这样的真命题叫做**定理**(theorem).

定理的作用不仅在于它揭示了客观事物的本质属性, 而且可以作为进一步确认其他命题真假的依据.

思考 (1) 一位同学在钻研数学题时发现:

$$2+1=3,$$
$$2\times3+1=7,$$
$$2\times3\times5+1=31,$$
$$2\times3\times5\times7+1=211.$$

于是, 他根据上面的结果并利用质数表得出结论: 从质数2开始, 排在前面的任意多个质数的积加1一定也是质数. 他的结论正确吗?

计算一下 $2\times3\times5\times7\times11+1$ 和 $2\times3\times5\times7\times11\times13+1$, 你发现了什么?

（2）如图 12.1.1，一位同学在画图时发现：三角形三条边的垂直平分线的交点都在三角形的内部．于是他得出结论：任何一个三角形三条边的垂直平分线的交点都在三角形的内部．他的结论正确吗？

画一个钝角三角形试试看．

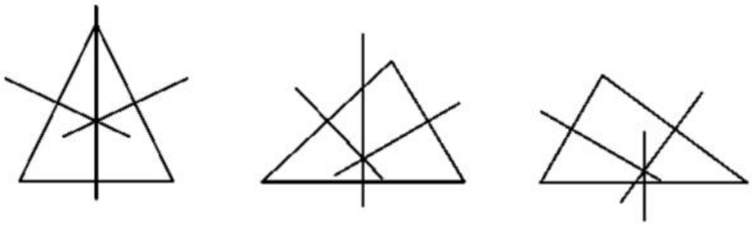


图12.1.1

（3）我们曾经通过计算四边形、五边形、六边形、七边形等的内角和，得到一个结论：n 边形的内角和等于 $(n-2)\times 180°$．这个结论正确吗？是否有一个多边形的内角和不满足这一结论？

实际上，这是一个正确的结论．

上面几个例子说明：通过特殊事例得到的结论可能正确，也可能不正确．因此，通过这种方式得到的结论，还需进一步加以证实．

根据条件、定义及基本事实、定理等，经过演绎推理，来判断一个命题是否正确，这样的推理过程叫做**证明**(proof)．

演绎推理是研究数学的一个重要方法．除了基本事实和已知的定理外，等式与不等式的有关性质以及等量代换也可以作为推理的依据．例如，有了“两条平行线被第三条直线所截，同位角相等”这条定理后，我们可以证明命题：

两条平行线被第三条直线所截，同旁内角互补．

已知：如图 12.1.2，直线 $a\parallel b$，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是同旁内角．

求证：$\angle 1+\angle 2=180°$．

证明：我们将 $\angle 1$ 的同位角记为 $\angle 3$．

$\because$ $a\parallel b$（已知），

$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$（两直线平行，同位角相等）．

又 $\because$ $\angle 3+\angle 2=180°$（邻补角的定义），

$\therefore$ $\angle 1+\angle 2=180°$（等量代换）．

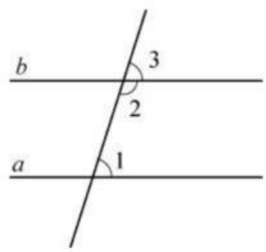


图12.1.2

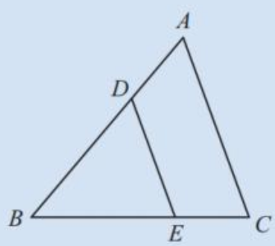
由一个定理直接推出的正确结论叫做这个定理的推论．例如“两条平行线被第三条直线所截，同旁内角互补”是定理“两条平行线被第三条直线所截，同位角相等”的推论．推论和定理一样，可以作为进一步证明的依据．

读一读

证明必须做到“言必有据”，每步推理都要有依据，它们可以是已知条件，也可以是定义、基本事实、已经学过的定理，以及等量代换、等式的性质、不等式的性质等．在开始学习书写证明的过程时，要求把依据写在每一步推理后面的括号内，熟练后可以逐渐简化．

练习

1. 把下列定理改写成“如果……，那么……”的形式，指出它们的条件和结论，并用演绎推理证明小题(1)所示的定理：
   (1) 同旁内角互补，两直线平行；
   (2) 三角形的外角和等于 $360°$．
2. 判断命题“两条直线被第三条直线所截，内错角相等”是真命题还是假命题，并说明理由．
3. 如图，已知 $\angle B=50°$，$\angle C=70°$，点 D、E 分别在 AB、BC 上，且 $\angle ADE=120°$．求证：$DE \parallel AC$．
   对于上述问题，请将下列证明过程补充完整．
   证明 $\because$ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$(三角形的内角和等于 $180°$)，
   $\angle B=50°$(已知)，$\angle C=70°$(已知)，
   $\therefore$ $\angle A=60°$(等式的性质)．
   ______________________________，
   ______________________________，
   ______________________________．

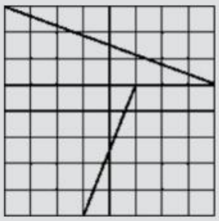


(第 3 题)

阅读材料

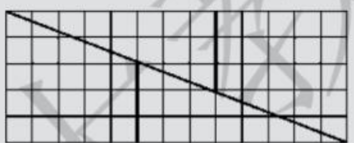
图形中的“裂缝”

几何图形的割补问题曾给我们带来不少有意义的结果，然而有时也会引发一些需要深入思索的现象．下面的图形问题是出现在萨姆·劳埃德（Sam Loyd，1841—1911）的《趣题大全》（*Cyclopedia of Puzzles*）中的一道趣题：将图 1 按所画粗线条剪开，再按图 2 拼合，方格图的面积竟然增加了一个平方单位！



$8\times8=64$

图 1



$13\times5=65$

图 2

面积为什么增加了？

这是视觉上的错觉欺骗了我们．实际上，当图 1 剪成四块拼成图 2 时，中间有一个如图 3 所示的平行四边形 $ABCD$ 的缝隙，它的面积正好为 1．也就是说，A、B、C 三点及 A、D、C 三点都分别不在同一条直线上，图形中出现了“裂缝”，而图 2 中误以为它们都在同一条直线上．这就说明了证明的重要性．

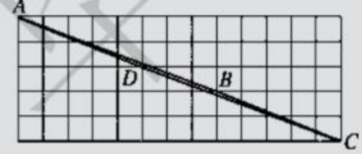


图 3

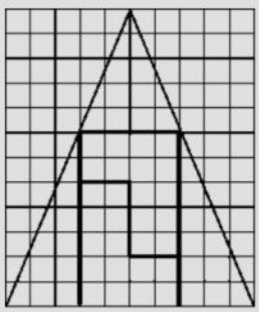


图 4

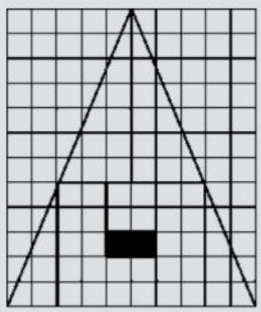


图 5

后来，有人将图 4 中的三角形区域按所画的粗线条剪开，再按图 5 重新拼合，结果在三角形的内部出现了一个“黑洞”．

你能对图 4 和图 5 中的现象作出解释吗？

习题12.1

A 组

1. 判断下列命题是真命题还是假命题，若是假命题，举一个反例加以说明：

（1）两个钝角的和大于平角；

（2）两条直线被第三条直线所截，同位角相等.

2. 判断命题“当 a 是整数时，$a^2 \geqslant a$ 一定成立”是真命题还是假命题，并说明理由.

3. 把下列命题改写成“如果……，那么……”的形式：

（1）全等三角形的对应角相等；

（2）有一个角等于60°的等腰三角形是等边三角形.

4. 如图，已知 $AB \perp MN$，$CD \perp MN$，垂足分别为点 E、F，直线 PQ 分别交 AB、CD 于点 S、T. 求证：$\angle AST = \angle STD$.

对于上述问题，请将下列证明过程补充完整.

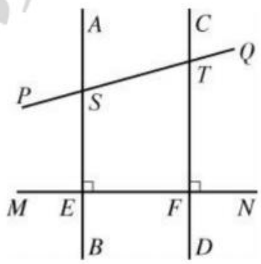
证明 ∵ $AB \perp MN$（已知），$CD \perp MN$（已知），

∴ $AB \parallel CD$（同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行）.

____

____

____



（第 4 题）

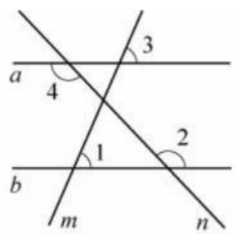
5. 如图，已知直线 a、b、m、n，$\angle 1 = \angle 3$. 求证：$\angle 2 = \angle 4$.

请补充完整下列证明的理由.

证明 ∵ $\angle 1 = \angle 3$（　　　　　　　　　　），

∴ $a \parallel b$（　　　　　　　　　　　　　　）.

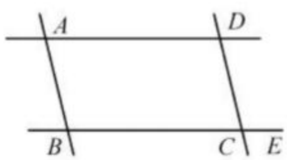
∴ $\angle 2 = \angle 4$（　　　　　　　　　　　　　　）.



（第 5 题）

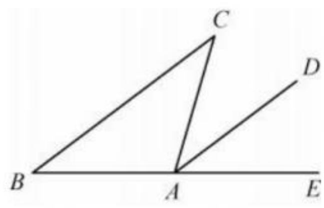
B 组

6. 如图，已知 $\angle BAD + \angle DCE = 180°$，$AD \parallel BC$. 求证：$AB \parallel CD$.

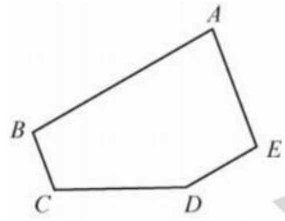


（第 6 题）

7. 如图，已知 $\angle B = \angle C$， $AD \parallel BC$，点 E 在 BA 的延长线上．求证：$\angle EAD = \angle CAD$．



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，已知 $\angle B = \angle E$， $AB \parallel DE$．求证：$BC \parallel AE$．

12.2 三角形全等的判定

在第 9 章中，我们知道，通过轴对称、平移和旋转这些变换，能够完全重合的两个三角形是全等三角形，并且全等三角形的对应边、对应角分别相等．我们还知道：若两个三角形的三条边和三个角都分别相等，那么这两个三角形一定可以互相重合，即全等．

本节中我们要探索的是，能否减少一些条件，找到更为简便的判定三角形全等的方法．

1．全等三角形的判定条件

显然，由于三角形的内角和等于 180°，如果两个三角形的两个角分别相等，那么第三个角必然也相等．这样，若两个三角形的三条边、两个角分别相等，则这两个三角形仍然全等．

能否再减少一些条件？对两个三角形来说，六个元素（三条边、三个角）中至少要有几个元素分别相等，这两个三角形才全等呢？

探索 如果两个三角形只有一组相等的元素，那么会出现几种可能的情况呢？这两个三角形会全等吗？

我们发现：

相等的元素		
三角形是否全等		

将你的发现填入表中，看看是否与你同伴的发现一致.

探索 如果两个三角形有两组分别相等的元素，那么会出现几种可能的情况呢？这时，这两个三角形会全等吗？

试一试

分别按照下面的条件，用刻度尺或量角器画三角形，并和周围的同学比较一下，所画的图形是否全等.

（1）三角形的两个内角分别为30°和70°.

（2）三角形的两条边分别为3 cm和5 cm.

（3）三角形的一个内角为60°，一条边为3 cm.

① 这条长3 cm的边是60°角的邻边；

② 这条长3 cm的边是60°角的对边.

你一定会发现，如果只知道两个三角形有两组分别相等的元素，那么这两个三角形是否全等的情况为：

分别相等的元素				
三角形是否全等				

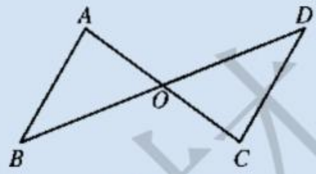
将你的发现填入表中，看看是否与你同伴的发现一致.

由以上的探索与发现，我们知道两个三角形只有一组或两组分别相等的元素（边或角）时，是无法判定这两个三角形全等的.

思考 如果两个三角形有三组分别相等的元素(边或角)，又会如何呢?

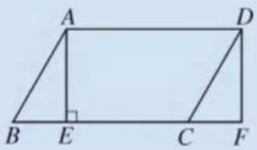
练习

1. 如图，将$\triangle AOB$绕点O旋转$180°$，得到$\triangle COD$，这时$\triangle AOB \cong \triangle$________. 这两个三角形的对应边是：$AO$与________，$OB$与________，$BA$与________；对应角是：$\angle AOB$与________，$\angle OBA$与________，$\angle BAO$与________.

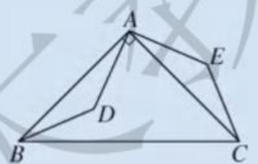


(第1题)

2. 如图，$AD \parallel BC$，$AD = BC$，$AE \perp BC$，将$\triangle ABE$沿AD方向平移，使点A与点D重合，此时点E平移至点F处，则$\triangle ABE \cong$________，$\angle F =$________°.



(第2题)



(第3题)

3. 如图，点D是$\triangle ABC$内一点，$\angle BAC = 90°$，$AB = AC$，将$\triangle ABD$绕点A逆时针旋转$90°$，点D旋转至点E处，则$\triangle ABD \cong$__________，$AD =$__________，$BD =$__________.

2. 边角边

探索 为了探索三角形全等的条件，现在我们考虑两个三角形有三组分别相等的元素，那么此时会出现几种可能的情况呢?

将三角形的六个元素(三条边、三个角)分类组合，可能出现：

两边一角分别相等；____

____.

你认为在这些情况下，两个三角形会全等吗?

我们发现，可能出现下列四种情况：

两边一角分别相等；两角一边分别相等；三角分别相等；三边分别相等.

下面将对这四种情况分别进行讨论.

先让我们观察两个三角形有两条边和一个角分别相等的情况，这时这两个三角形一定全等吗？

如图 12.2.1 所示，此时我们发现主要有两种情况：一种情况是角夹在两条边的中间，形成两边夹一角（边角边）；另一种情况是角不夹在两边的中间，为一组相等边的对角，形成两边一对角（边边角）.

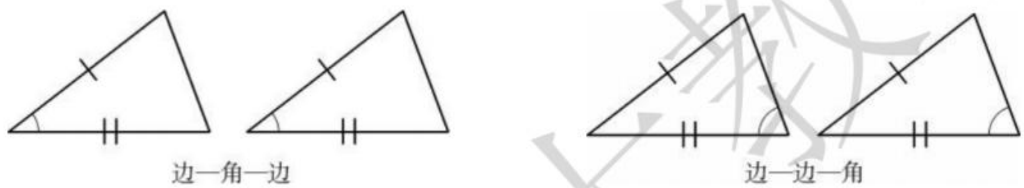


图12.2.1

如果两个三角形有两边及其夹角分别相等，那么这两个三角形会全等吗？为此我们以已知的两条线段和一个角为三角形的两边及其夹角，作三角形，看看你和同伴作出的三角形是否全等.

做一做

如图 12.2.2，已知线段 b、c 和 $\angle\alpha$，试作 $\triangle ABC$，使 $AB = c$，$\angle A = \angle\alpha$，$AC = b$.

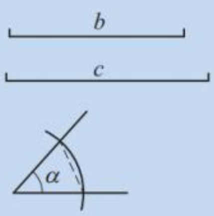


图12.2.2

作法：

（1）作线段 AB，使 $AB = c$；

（2）作 $\angle BAM = \angle\alpha$；

（3）在射线 AM 上截取 $AC = b$；

（4）连结 BC.

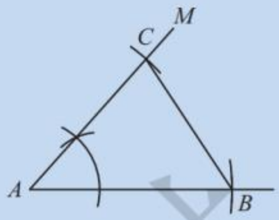


图12.2.3

如图 12.2.3，$\triangle ABC$ 即为所要求作的三角形.

把你作的三角形与其他同学作的三角形进行比较，或剪下你作的三角形，放到其他同学作的三角形上，看看是否完全重合．所作的三角形都全等吗？

换两条线段和一个角，试试看，是否有同样的结论.

下面我们用叠合的方法，看看你和同伴所作的两个三角形是否可以完全重合.

如图 12.2.4，在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，已知 $AB = A'B'$，$\angle A = \angle A'$，$AC = A'C'$.

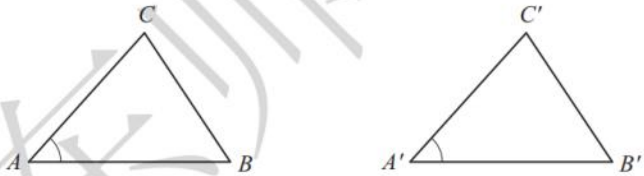


图12.2.4

由于 $AB = A'B'$，我们可以移动 $\triangle ABC$，使点 A 与点 A'、点 B 与点 B' 重合．因为 $\angle A = \angle A'$，所以可以使 $\angle A$ 的另一边 AC 与 $\angle A'$ 的边 $A'C'$ 重叠在一起，而 $AC = A'C'$，因此点 C 与点 C' 重合．于是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 重合，这就说明这两个三角形全等.

由此可得判定三角形全等的一个基本事实：

基本事实　两边及其夹角分别相等的两个三角形全等.

简写成“边角边”或“SAS”.

▶ **例 1** 如图 12.2.5，线段 AC、BD 相交于点 E，$AE = DE$， $BE = CE$. 求证：$\triangle ABE \cong \triangle DCE$.

证明 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCE$ 中，

$\because$ $AE = DE$（已知），

$\angle AEB = \angle DEC$（对顶角相等），

$BE = CE$（已知），

$\therefore$ $\triangle ABE \cong \triangle DCE$（SAS）.

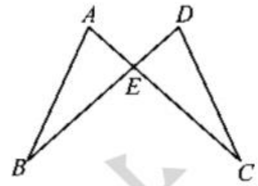


图12.2.5

▶ **例 2** 如图 12.2.6，有一池塘. 要测池塘两端 A、B 间的距离，可先在平地上取一个可以直接到达 A 和 B 的点 C，连结 AC 并延长到点 D，使 $CD = CA$. 连结 BC 并延长到点 E，使 $CE = CB$. 连结 DE，那么 DE 的长就是 A、B 间的距离. 你知道其中的道理吗？

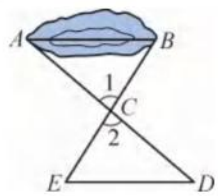


图12.2.6

已知：AD 与 BE 相交于点 C，$CD = CA$，$CE = CB$.

求证：$DE = AB$.

分析 我们可以通过证明 DE 和 AB 所在的两个三角形全等得出 $DE = AB$.

证明 在$\triangle DCE$ 和$\triangle ACB$ 中，

$\because$ $CD = CA$（已知），

$\angle 2 = \angle 1$（对顶角相等），

$CE = CB$（已知），

$\therefore$ $\triangle DCE \cong \triangle ACB$（SAS）.

$\therefore$ $DE = AB$（全等三角形的对应边相等）.

如果两个三角形有两边及其中一边的对角分别相等，那么这两个三角形全等吗？为此我们以已知的两条线段和一个角为三角形的两边及其中一边的对角，作三角形，看看你和同伴作出的三角形是否全等.

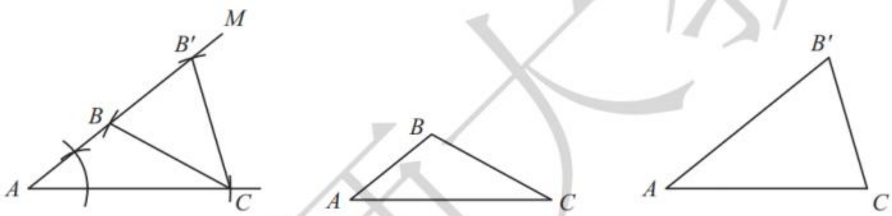
做一做

如图 12.2.7，已知线段 a、$b(b>a)$ 和 $\angle\alpha$，试作 $\triangle ABC$，使 $AC=b$，$\angle A=\angle\alpha$，$BC=a$.

图12.2.7

把你作的三角形与其他同学作的三角形进行比较，所作的三角形都全等吗？此时，符合条件的三角形有多少种？

如图 12.2.8①，我们可以发现，此时符合条件的三角形可以有如图 12.2.8②③两种，因此，“边边角”分别相等的两个三角形不一定全等.



① ② ③

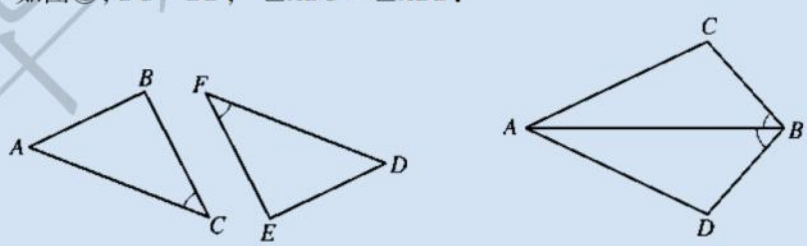
图12.2.8

练习

1. 根据下面的条件，能否判断如图所示的两个三角形全等？

（1）如图①，$AC=DF$，$\angle C=\angle F$，$BC=EF$；

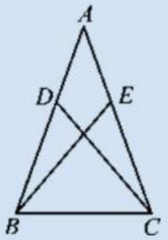
（2）如图②，$BC=BD$，$\angle ABC=\angle ABD$.



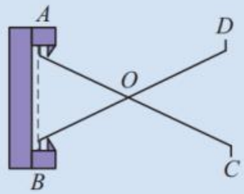
① ②

（第 1 题）

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，在 AB、AC 上分别截取相等的两条线段 AD、AE，并连结 BE、CD. 求证：$\triangle ADC \cong \triangle AEB$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，小明想设计一种测零件内径 AB 的卡钳. 在卡钳的设计中，要使测出的 DC 的长度恰好为内径 AB 的长度，那么卡钳各部分的尺寸应满足什么条件呢？请提出你的想法.

3. 角边角

前面我们已经讨论，当两个三角形有两边一角分别相等时，这两个三角形是否全等的两种情况，得到了全等三角形的一种判定方法：两边及其夹角分别相等的两个三角形全等.

现在，我们讨论有两角一边分别相等的情况：如果两个三角形有两个角、一条边分别相等，那么这两个三角形全等吗？

与有两边一角分别相等时类似，我们也会发现主要有两种不同的情况：如图 12.2.9 所示，一种情况是两个角及这两个角的夹边分别相等；另一种情况是两个角及其中一个角的对边分别相等.

图12.2.9

如果两个三角形有两个角及其夹边分别相等，那么这两个三角形会全等吗？为此我们以已知的两个角和一条线段为三角形的两个角及其夹边，作三角形，看看你和同伴作出的三角形是否全等.

做一做

如图 12.2.10，已知$\angle\alpha$、$\angle\beta$ 和线段 c，试作$\triangle ABC$，使 $\angle A=\angle\alpha$，$AB=c$，$\angle B=\angle\beta$.

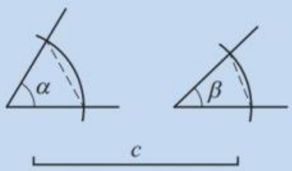


图12.2.10

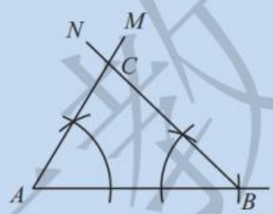


图12.2.11

作法：

（1）作线段 AB，使 $AB=c$；

（2）作 $\angle BAM=\angle\alpha$，$\angle ABN=\angle\beta$，AM 与 BN 交于点 C.

如图 12.2.11，$\triangle ABC$ 即为所要求作的三角形.

把你作的三角形与其他同学作的三角形进行比较，或剪下你作的三角形，放到其他同学作的三角形上，看看是否完全重合．所作的三角形都全等吗？

换两个角和一条线段，试试看，是否有同样的结论？

下面我们用叠合的方法，看看你和同伴所作的两个三角形是否可以完全重合.

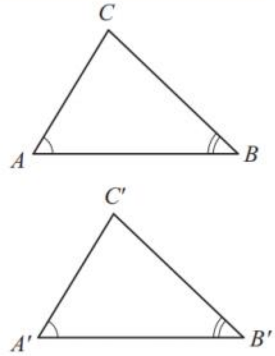


图12.2.12

如图 12.2.12，在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，已知 $AB=A'B'$，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$.

由于 $AB=A'B'$，我们可以移动 $\triangle ABC$，使点 A 与点 A'、点 B 与点 B' 重合，且使点 C 与点 C' 均位于线段 AB 的同侧．因为 $\angle A=\angle A'$，因此可以使$\angle A$ 的另一边 AC

与$\angle A'$的边$A'C'$重叠在一起，同样，因为$\angle B = \angle B'$，可以使$\angle B$的另一边BC与$\angle B'$的边$B'C'$重叠在一起．由于两条直线相交只有一个交点，因此点C与点C'重合．于是$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$重合，这就说明这两个三角形全等．由此可得判定三角形全等的另一个基本事实：

基本事实　两角及其夹边分别相等的两个三角形全等.

简写成“角边角”或“ASA”．

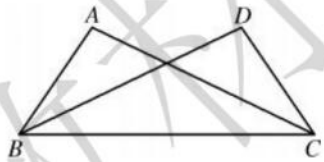


图12.2.13

▶ **例3**　如图12.2.13，$\angle ABC = \angle DCB$，$\angle ACB = \angle DBC$．求证：$\triangle ABC \cong \triangle DCB$，$AB = DC$．

证明　在$\triangle ABC$和$\triangle DCB$中，

$\because$ $\angle ABC = \angle DCB$（已知），

$BC = CB$（公共边），

$\angle ACB = \angle DBC$（已知），

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$（ASA）．

$\therefore$ $AB = DC$（全等三角形的对应边相等）．

思考　如图12.2.14，如果两个三角形有两个角分别相等，且其中一组相等的角的对边相等，那么这两个三角形是否一定全等？

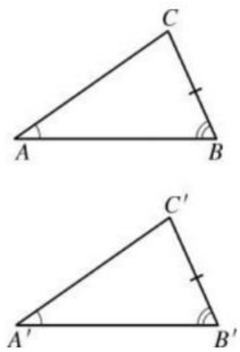


图12.2.14

分析　因为三角形的内角和等于180°，因此有两个角分别相等，那么第三个角必定相等，于是由“角边角”，便可证得这两个三角形全等．

下面我们证明这个定理：

两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等.

简写成“角角边”或“AAS”．

已知：如图12.2.14，$\angle A = \angle A'$，$\angle B = \angle B'$，$BC = B'C'$．

求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$．

证明　$\because$ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$（三角形的内角和等于180°），

$\therefore$ $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$（等式的性质）．

同理，$\angle C' = 180^\circ - \angle A' - \angle B'$.

$\because$ $\angle A = \angle A'$(已知)，$\angle B = \angle B'$(已知)，

$\therefore$ $\angle C = \angle C'$(等量代换).

在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，

________________________________，

________________________________，

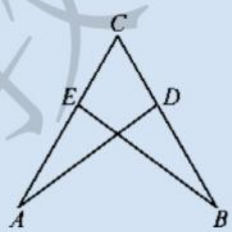
________________________________，

________________________________.

请补充完整证明过程.

练习

1. 如图，$\angle A = \angle B$，$CA = CB$，$\triangle CAD$和$\triangle CBE$全等吗？CD和CE相等吗？试说明理由.



(第 1 题)

2. 已知四边形$ABCD$，对角线BD将其分成两个三角形，其中$\angle ABD = \angle C$，$\angle ADB = \angle DBC$. 此时这两个三角形全等吗？请作出图形，并说说你的想法.

3. 课间，小明和小聪在操场上突然争论起来，他们都说自己比对方长得高. 这时数学老师走过来，笑着对他们说：“你们不要争了，其实你们一样高，瞧瞧地上，你俩的影子一样长!”你知道数学老师为什么能从他们的影长相等就断定他们的身高相同吗？你能运用全等三角形的有关知识说明其中的道理吗？

(第 3 题)

▶ **例 4** 如图 12.2.15，在$\triangle ABC$中，D是边BC的中点，过点C作直线CE，使$CE \parallel AB$，交AD的延长线于点E. 求证：$AD = ED$.

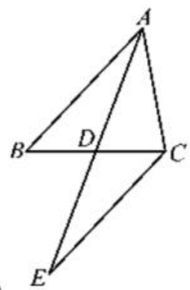


图12.2.15

证明 $\because$ $CE \parallel AB$(已知)，

$\therefore$ $\angle ABD = \angle ECD$，$\angle BAD = \angle CED$(两直线平行，内错角相等).

在$\triangle ABD$和$\triangle ECD$中，

$\because$ $\angle ABD = \angle ECD$（已证），

$\angle BAD = \angle CED$（已证），

$BD = CD$（已知），

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle ECD$（AAS）.

$\therefore$ $AD = ED$（全等三角形的对应边相等）.

概括 要证明两条线段 AD、ED 相等，我们发现它们分别属于$\triangle ABD$ 和$\triangle ECD$，若能证明这两个三角形全等，便可利用全等三角形的对应边相等得到要证明的结论. 这就是通常证明两条线段相等的一个重要方法.

可以采用类似的方法证明两个角相等.

▶ **例 5** 证明：全等三角形对应边上的高相等.

已知：如图 12.2.16，$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，$AD$、$A'D'$ 分别是$\triangle ABC$ 的边 BC 和$\triangle A'B'C'$ 的边 $B'C'$ 上的高.

求证：$AD = A'D'$.

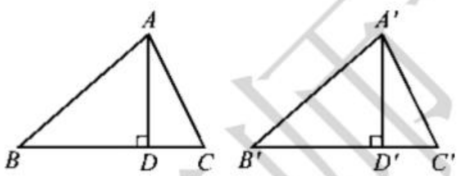


图12.2.16

你发现 AD、$A'D'$ 分别是哪两个三角形的边？这两个三角形全等吗？

分析 从图 12.2.16 中可以看出，AD、$A'D'$ 分别属于$\triangle ABD$ 和$\triangle A'B'D'$，要证 $AD = A'D'$，只需证明这两个三角形全等即可.

证明 $\because$ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$（已知），

$\therefore$ $AB = A'B'$（全等三角形的对应边相等），

$\angle B = \angle B'$（全等三角形的对应角相等）.

在$\triangle ABD$ 和$\triangle A'B'D'$ 中，

$\because$ $\angle ADB = \angle A'D'B' = 90°$（已知），

$\angle B = \angle B'$（已证），

$AB = A'B'$（已证），

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$（AAS）.

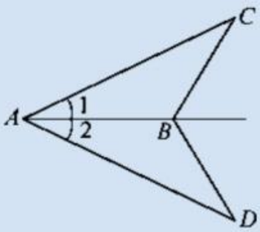
$\therefore$ $AD = A'D'$（全等三角形的对应边相等）.

思考　全等三角形对应边上的中线、对应角的平分线又有什么关系呢？你能说明其中的道理吗？

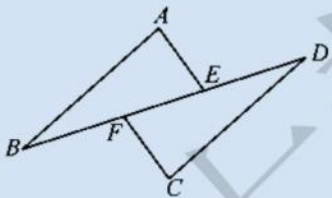
全等三角形对应边上的中线、对应角的平分线分别相等.

练习

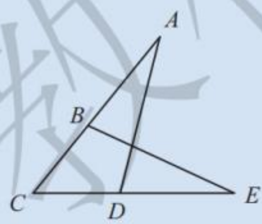
1. 如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle C=\angle D$. 求证：$AC=AD$.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

2. 如图，$AB \parallel CD$，$AE \parallel CF$，$BF=DE$. 试找出图中其他的相等关系，并给出证明.

3. 如图，点 B、D 分别在线段 AC、EC 上，$\angle A=\angle E$，$AD=EB$. 求证：$AC=EC$.

4. 边边边

我们已经讨论了两个三角形有两边一角，以及两角一边分别相等时，这两个三角形能否全等的情况.

如图 12.2.17，我们很容易发现，如果两个三角形有三个角分别相等，那么这两个三角形未必全等.

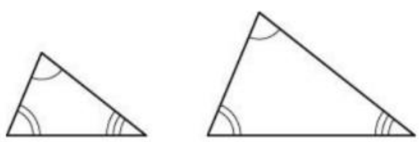


图12.2.17

最后，如果两个三角形有三条边分别相等，那么这两个三角形是否一定全等呢？为此我们以已知的三条线段为三角形的三边，作三角形，看看你和同伴作出的三角形是否全等.

做一做

如图 12.2.18，已知线段 a、b、c，试作△ABC，使 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$.

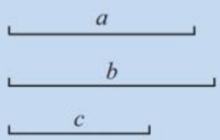


图12.2.18

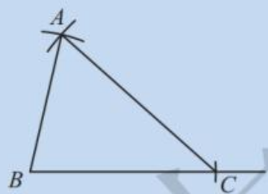


图12.2.19

想一想：三条线段需符合什么条件，才能作出一个三角形？

作法：

(1) 作线段 BC，使 $BC=a$；

(2) 以点 B 为圆心、线段 c 的长为半径作圆弧，以点 C 为圆心、线段 b 的长为半径作圆弧，两弧相交于点 A；

(3) 连结 AB、AC.

如图 12.2.19，△ABC 即为所要求作的三角形.

把你作的三角形与其他同学作的三角形进行比较，或剪下你作的三角形，放到其他同学作的三角形上，看看是否完全重合. 所作的三角形都全等吗？

换三条线段，试试看，是否有同样的结论？

由以上操作，可以发现它们完全重合，所作的三角形都全等.

于是可得判定三角形全等的又一个基本事实：

基本事实　三边分别相等的两个三角形全等.

简写成“边边边”或“SSS”.

▶ **例 6** 如图 12.2.20，在四边形 $ABCD$ 中，$AD = CB$，$AB = CD$．求证：$\angle B = \angle D$．

由于$\angle B$和$\angle D$分别属于$\triangle ABC$和$\triangle CDA$，所以只需证明这两个三角形全等即可．

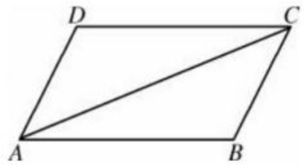


图12.2.20

证明 在$\triangle ABC$和$\triangle CDA$中，

$\because$ $CB = AD$（已知），

$AB = CD$（已知），

$AC = CA$（公共边），

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$（SSS）．

$\therefore$ $\angle B = \angle D$（全等三角形的对应角相等）．

思考

如图 12.2.21 所示，我们曾利用尺规作图作出一个角$\angle A'O'B'$等于已知角$\angle AOB$，现在你能证明这两个角确实相等吗？

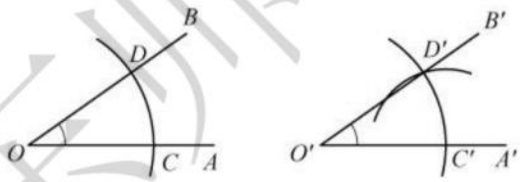


图12.2.21

▶ **例 7** 按如图 12.2.21 所示的尺规作图的作法，证明$\angle A'O'B' = \angle AOB$．

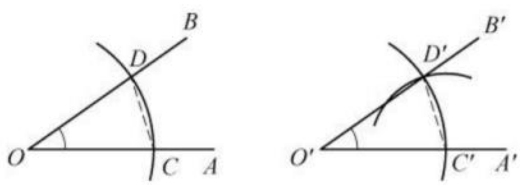


图12.2.22

证明 如图 12.2.22，连结 CD、$C'D'$．在$\triangle C'O'D'$和$\triangle COD$中，

$\because$ $O'C' = OC$（所作），

$O'D' = OD$(所作),

$C'D' = CD$(所作),

$\therefore\ \triangle C'O'D' \cong \triangle COD$(SSS).

$\therefore\ \angle C'O'D' = \angle COD$(全等三角形的对应角相等).

即 $\angle A'O'B' = \angle AOB$.

思考 如图 12.2.23 所示，我们还曾利用尺规作图作出已知角 $\angle AOB$ 的平分线，现在你能证明射线 OP 确实是 $\angle AOB$ 的平分线吗?

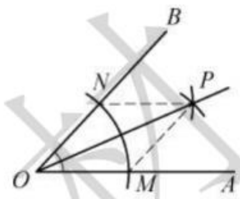


图12.2.23

由作法，可知 $OM = ON$，$MP = NP$．再借助线段 OP，就可以证明 $\triangle OMP$ 和 $\triangle ONP$ 全等，从而 $\angle MOP = \angle NOP$，射线 OP 即是 $\angle AOB$ 的平分线.

试写出整个证明过程.

读一读

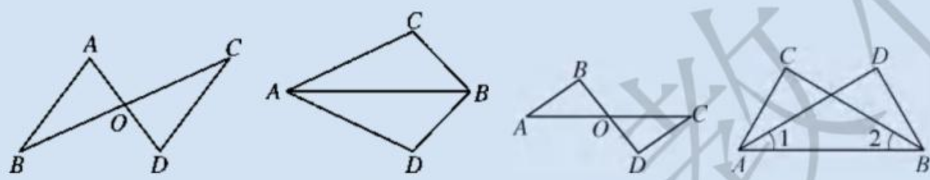
至此，我们已经学习了关于全等三角形的三个基本事实，这是进行演绎推理的重要依据．它们是我们通过探索发现的判定方法，其本质与用变换给出的全等三角形定义是一致的，即在这些条件下，两个三角形一定可以通过图形的基本变换(轴对称、平移和旋转)而相互重合.

概括 我们可以将前面在对全等三角形判定的探索中得到的结论归纳成下表(请补充完整表格中的内容):

分别相等的元素	两边一角		两角一边		三角	三边
	两边及其夹角	两边及其中一边的对角	两角及其夹边	两角及其中一角的对边		
三角形是否全等	一定(SAS)		一定(ASA)			

练习

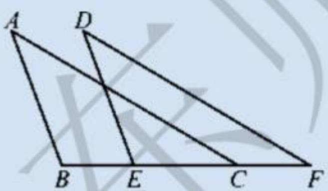
1. 根据题图及相应的条件，能否判定下面分别给出的两个三角形全等?
   (1) 如图①，线段 AD 与 BC 相交于点 O, $AO = DO$， $BO = CO$． $\triangle ABO$ 和 $\triangle DCO$.
   (2) 如图②, $AC = AD$， $BC = BD$． $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$.
   (3) 如图③, 线段 AC 与 BD 相交于点 O， $\angle A = \angle C$， $\angle B = \angle D$． $\triangle ABO$ 和 $\triangle CDO$.
   (4) 如图④, $\angle CAB = \angle DBA$， $\angle 1 = \angle 2$. $\triangle ABC$ 和 $\triangle BAD$.



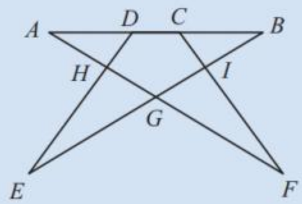
① ② ③ ④

（第 1 题）

2. 如图，点 B、E、C、F 在同一条直线上, $AB = DE$， $AC = DF$， $BE = CF$.
   (1) 求证：$\angle A = \angle D$;
   (2) 找出图中互相平行的线段，说明你的理由.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，点 C、D 是线段 AB 上的点, $AD = BC$， $AF = BE$， $CF = DE$. 求证：$\triangle ACF \cong \triangle BDE$. 图中还有其他的全等三角形吗？说明你的理由.

5. 斜边直角边

我们已经知道，对于两个三角形，如果有“边边角”分别相等，那么不能保证这两个三角形全等.

在两个直角三角形中，当斜边和一条直角边分别相等时，也属于“边边角”相等的情况，这时这两个直角三角形是否全等呢？

为此我们以已知两条线段为直角三角形的直角边和斜边，作直角三角形，看看你和同伴所作的直角三角形是否全等.

做一做

如图 12.2.24，已知线段 a、$b(b>a)$，试作 Rt$\triangle ABC$，使 $\angle B=90°$，$BC=a$，$AC=b$.

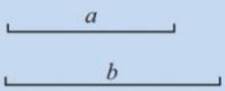


图12.2.24

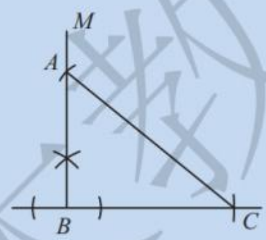


图12.2.25

作法：

（1）作线段 BC，使 $BC=a$；

（2）作 $\angle CBM=90°$；

（3）以点 C 为圆心、线段 b 的长为半径作圆弧，交射线 BM 于点 A；

（4）连结 AC.

如图 12.2.25，$\triangle ABC$ 即为所要求作的三角形.

把你作的直角三角形与其他同学作的直角三角形进行比较，或剪下你作的直角三角形，放到其他同学作的直角三角形上，看看是否完全重合. 所作的直角三角形都全等吗？

换两条线段，试试看，是否有同样的结论？

由以上操作，可以发现它们完全重合，所作的直角三角形都全等. 于是可得：

斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等.

简写成“斜边直角边”或“HL”.

这是一个定理，以后会给出它的证明.

▶ **例 8** 如图12.2.26，$AC = BD$， $\angle C = \angle D = 90°$.
求证：$BC = AD$.

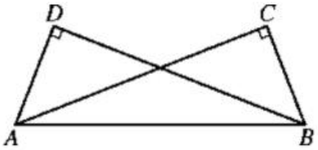


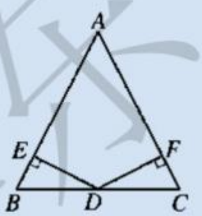
图12.2.26

由于 AD 和 BC 分别属于$\triangle BAD$ 和$\triangle ABC$，所以只需证明这两个三角形全等即可.

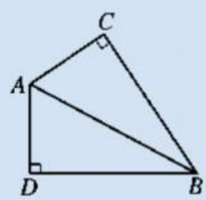
证明 ∵ $\angle C = \angle D = 90°$(已知)，
∴ $\triangle ABC$ 和 $\triangle BAD$ 都是直角三角形(直角三角形的定义).
在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle BAD$ 中，
∵ $AB = BA$(公共边)，
$AC = BD$(已知)，
∴ Rt$\triangle ABC \cong$ Rt$\triangle BAD$(HL).
∴ $BC = AD$ (全等三角形的对应边相等).

练习

1. 如图，在$\triangle ABC$ 中，点 D 为 BC 的中点，$DE \perp AB$， $DF \perp AC$，点 E、 F 为垂足，$DE = DF$. 求证： Rt$\triangle BED \cong$ Rt$\triangle CFD$.

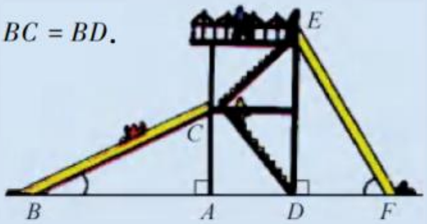


(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，$AC = AD$， $\angle C = \angle D = 90°$. 求证： $BC = BD$.
3. 如图，有两个长度相同的滑梯，左边滑梯的高度 AC 与右边滑梯水平方向的跨度 DF 相等，这两个滑梯的倾斜角$\angle CBA$ 与$\angle EFD$ 的大小有什么关系？说说你的想法和理由.



(第 3 题)

阅读材料

由尺规作图产生的三大难题

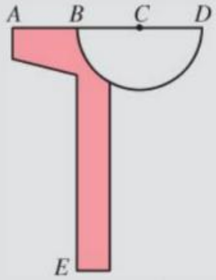
我们曾经用过很多作图工具，如刻度尺、三角板、量角器、圆规等．我们也曾利用尺规作图作一条线段等于已知线段、作一个角等于已知角、作已知线段的垂直平分线、作已知角的平分线、过一点作已知直线的垂线．有了这些基本的作图，我们还可进一步作出许多几何图形．

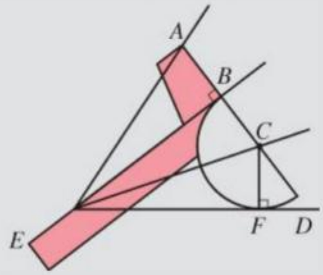
古希腊人很早就开始利用尺规作图，他们的主要目的在于训练智力、培养逻辑思维能力，所以对作图工具有严格的限制．正是在这种严格的限制下，产生了种种难题．

相传神话中的一个国王对儿子给他建造的立方体坟墓不满意，命令把坟墓的体积扩大一倍，但当时的工匠都不知如何解决．后来，雅利安人为了摆脱某种瘟疫，遵照神谕，必须把阿波罗的立方体祭坛的体积扩大一倍．这就是著名的倍立方问题．除倍立方问题外，还有三等分任意角、化圆为方(作一个正方形，使其面积等于给定的圆的面积)这两个难题．

在数学史中，很难找到像这样长期被人关注的问题．两千多年以来，无数人的聪明才智倾注于这三大难题而毫无结果．但对这三个问题的深入探索，却促进了几何学的发展，引出了大量的发现，如圆锥曲线、许多二次和三次曲线以及几种超越曲线等．后来又有关于有理域、代数数、超越数、群论和方程论等数学理论的发展．直到19世纪，即距第一次提出这三个问题两千年之后，这三个问题才被证实在所给的条件下是不可能解决的．

现在还有不少人创造了各种各样的辅助工具，用来解决这些尺规作图无法解决的问题．如下图所示的工具就可以用来解决三等分任意角的问题(这样的作图就相当于用量角器三等分任意角，已不属于尺规作图的范畴)．你能说出其中的道理吗?

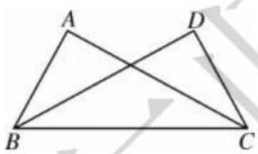




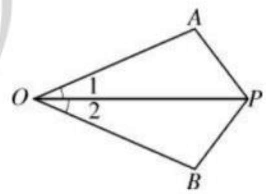
习题12.2

A 组

1. 如图，$AB=DC$，$AC=DB$．求证：$\triangle ABC \cong \triangle DCB$．



（第 1 题）



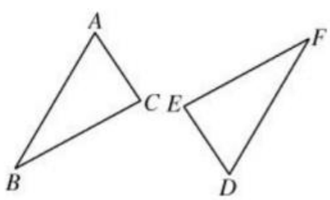
（第 2 题）

2. 如图，$\angle 1=\angle 2$，$AO=BO$．求证：$\triangle AOP \cong \triangle BOP$．

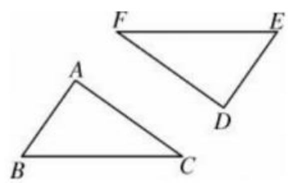
3. 要使题图中的各对三角形全等，还需要增加什么条件？

（1）如图①，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle F$；

（2）如图②，$\angle A=\angle D$，$AB=DE$．



①

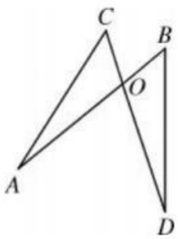


②

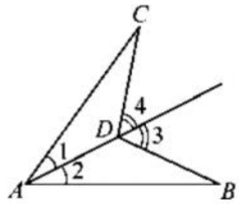
（第 3 题）

4. 如图，AB 与 CD 相交于点 O，$\angle A=\angle D$，$CO=BO$. 求证：$\triangle AOC\cong\triangle DOB$.

5. 如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 求证：$AB=AC$.



（第 4 题）



（第 5 题）

（第 6 题）

6. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 是边 BC 上的高.

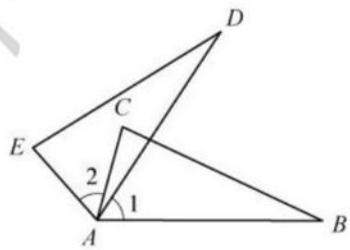
（1）求证：$BD=CD$；

（2）求证：$\angle BAD=\angle CAD$.

B 组

7. 一名工作人员不慎将一块如图所示的三角形模具打碎成了两块，他是否可以只带其中一块碎片到商店去，就能配一块与原来一样的三角形模具呢？他该带哪块去呢？请用数学知识解释你的结论.

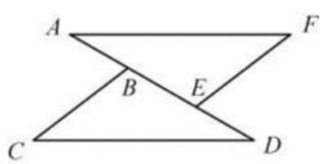
（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，$AB=AD$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle C=\angle E$. 求证：$AC=AE$.

9. 如图，点 B、E 在线段 AD 上，$AB=DE$，$BC\parallel EF$，$BC=EF$. 求证：$AF\parallel DC$.



（第 9 题）

12.3 等腰三角形

1. 等腰三角形的性质

在现实生活中，你看到哪些物体的表面具有等腰三角形的形状？

我们知道，有两条边相等的三角形叫做**等腰三角形**(isosceles triangle). 如图 12.3.1, $AB=AC$, $\triangle ABC$ 就是等腰三角形.

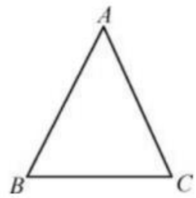


图12.3.1

指出 $\triangle ABC$ 的腰、底边、顶角和底角.

等腰三角形中，相等的两边都叫做**腰**，另一边叫做**底边**，两腰的夹角叫做**顶角**，腰和底边的夹角叫做**底角**.

做一做

剪一张等腰三角形的半透明纸片，每人所剪的等腰三角形的大小和形状可以不一样，如图 12.3.2，把纸片对折，让两腰 AB、AC 重叠在一起，折痕为 AD. 你能发现什么现象吗？

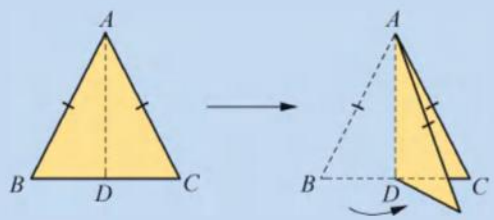


图12.3.2

可以发现，折叠的两个部分是互相重合的，所以等腰三角形是一个轴对称图形，折痕 AD 所在的直线就是它的对称轴. 我们还可以发现 $\angle B = \angle C$.

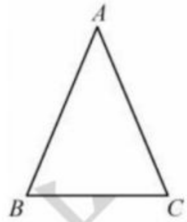


图12.3.3

由此得到以下等腰三角形的性质：

等腰三角形的两个底角相等.

简写成“等边对等角”.

已知：如图 12.3.3，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$.

求证：$\angle B = \angle C$.

分析 由上述操作可以得到启发，即添加等腰三角形的顶角平分线 AD，然后证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

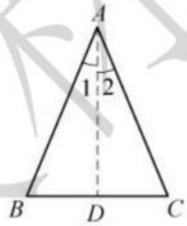


图12.3.4

证明[①] 如图 12.3.4，作 $\angle BAC$ 的平分线 AD.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$\because AB = AC$,

$\angle 1 = \angle 2$,

$AD = AD$,

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$（SAS）.

$\therefore \angle B = \angle C$（全等三角形的对应角相等）.

注意 在证明过程中，为了需要，在原来的图形上添加的线叫做辅助线. 辅助线通常作成虚线. 例如，上述证明中所添加的顶角平分线 AD.

▶ **例 1** 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB = AC$，$\angle B = 80°$. 求 $\angle C$ 和 $\angle A$ 的度数.

解 $\because AB = AC$,

$\therefore \angle C = \angle B = 80°$（等边对等角）.

又 $\because \angle A + \angle B + \angle C = 180°$（三角形的内角和等于 180°），

$\therefore \angle A = 180° - \angle B - \angle C$

$= 180° - 80° - 80° = 20°$.

① 为简化推理格式，今后只注明主要依据，省略“已知”“等量代换”“等式的性质”等依据.

探索 由前面的“做一做”，你还可以发现什么结论？请写出你的发现：

______________________________，

______________________________，

______________________________．

回顾“等腰三角形的底角相等”的证明过程，直接推断这一结论成立．

我们发现，AD 既是底边上的中线，又是顶角的平分线和底边上的高．由此可得：

等腰三角形底边上的高、中线及顶角的平分线重合．

简写成“**等腰三角形的三线合一**”．

▶ **例 2** 如图 12.3.5，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 是边 BC 上的中点，$\angle B=30°$．

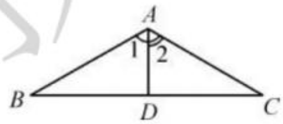


图12.3.5

（1）求 $\angle ADC$ 的度数；

（2）求 $\angle 1$ 的度数．

解 （1）$\because$ $AB=AC$，$BD=DC$，

$\therefore$ $AD \perp BC$（等腰三角形的三线合一）．

$\therefore$ $\angle ADC=\angle ADB=90°$．

（2）$\because$ $\angle 1+\angle B+\angle ADB=180°$（三角形的内角和等于 180°），

$\angle B=30°$，

$\therefore$ $\angle 1=180°-\angle B-\angle ADB$

$=180°-30°-90°=60°$．

“等腰三角形的三线合一”是经常会用到的重要性质．

思考 如图 12.3.6 所示，我们曾利用尺规作图作出一条线段 AB 的垂直平分线 PQ，现在你能证明所得的直线 PQ 确实是已知线段 AB 的垂直平分线吗？

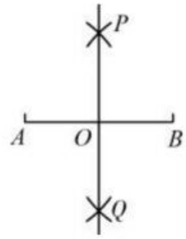


图12.3.6

▶ **例 3** 按如图 12.3.6 所示的尺规作图的作法，证明直线 PQ 是已知线段 AB 的垂直平分线．

证明 如图12.3.7，设 AB 与 PQ 相交于点 O，连结 PA、PB、QA、QB．在 $\triangle APQ$ 和 $\triangle BPQ$ 中，

$\because$ $AP = BP$，

$AQ = BQ$，

$PQ = PQ$，

$\therefore$ $\triangle APQ \cong \triangle BPQ$(SSS)．

$\therefore$ $\angle APQ = \angle BPQ$(全等三角形的对应角相等)．

又 $\because$ $AP = BP$，

$\therefore$ $AO = BO$ 且 $PQ \perp AB$(等腰三角形的三线合一)．

因此直线 PQ 是已知线段 AB 的垂直平分线.

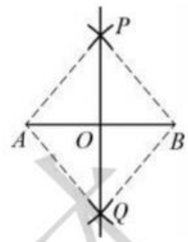


图12.3.7

思考 如图12.3.8所示，我们还曾利用尺规作图过点 C 作出已知直线 AB 的垂线 CP．当点 C 在直线 AB 上时，垂线 CP 即是平角 ACB 的平分线所在的直线，那么当点 C 在直线 AB 外时，你能证明所作的直线 CP 确实是直线 AB 的垂线吗？

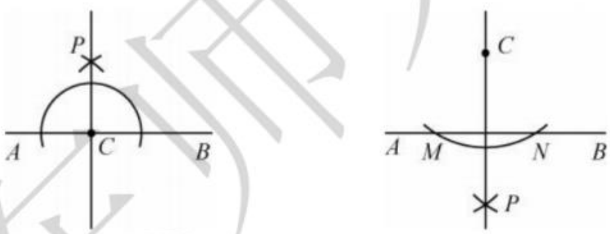


图12.3.8

比较图12.3.8的作法示意图与图12.3.6的垂直平分线的作法示意图，我们可以发现两者十分类似，过直线 AB 外一点 C 作 AB 的垂线，就相当于作线段 MN 的垂直平分线．那么类似于垂直平分线的证明，自然就可以证明过点 C 所作的直线 CP 确实是已知直线 AB 的垂线.

试写出整个证明过程.

三条边都相等的三角形叫做**等边三角形**(equilateral triangle)．如图12.3.9，在等边三角形中，每个角的度数是多少呢？

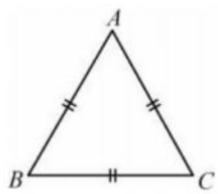


图12.3.9

显然，$AB = AC$，根据“等边对等角”，可以得到

$$\angle B = \angle C,$$

同理可得 $$\angle A = \angle B,$$

所以 $$\angle A = \angle B = \angle C.$$

而 $$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ,$$

所以 $$\angle A = \angle B = \angle C = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ.$$

等边三角形也是轴对称图形．它有几条对称轴？

也就是说：

等边三角形的各个角都相等，并且每一个角都等于 60°．

等边三角形的三条边都相等，三个角都相等，也称为正三角形．

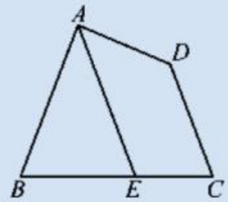
练习

1. 填空：

（1）如果等腰三角形的一个底角为 50°，那么其余两个角的度数分别为______和______；

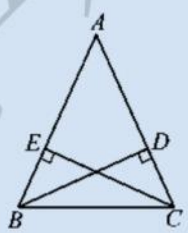
（2）如果等腰三角形的顶角为 70°，那么它的一个底角的度数为______．

2. 如图，点 E 在 BC 上，$AE \parallel DC$，$AB = AE$．求证：$\angle B = \angle C$．

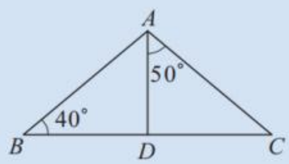


（第 2 题）

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$BD \perp AC$，$CE \perp AB$，垂足分别为点 D、E．求证：$BD = CE$．



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，$AB = AC$，$\angle B = 40^\circ$，点 D 在 BC 上，且 $\angle DAC = 50^\circ$．求证：$BD = CD$．

2. 等腰三角形的判定

对于一个三角形，怎样判定它是不是等腰三角形呢？我们已经知道的方法是按定义，看它是否有两条边相等．现在再看看能否找到其他的判定方法．

探索 我们知道，等腰三角形的两个底角相等．反过来，在一个三角形中，如果有两个角相等，那么它是等腰三角形吗？

画画看，你发现了什么？

我们可以发现，如果一个三角形中有两个角相等，那么它就是等腰三角形．即**有两个角相等的三角形是等腰三角形．**

简写成“**等角对等边**”．

已知：如图 12.3.10，在$\triangle ABC$ 中，$\angle B = \angle C$.

求证：$AB = AC$.

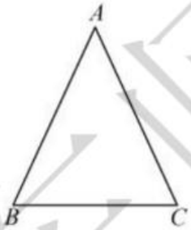


图12.3.10

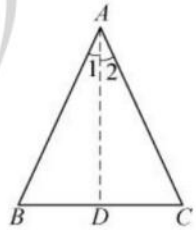


图12.3.11

分析 要证明 $AB = AC$，可设法构造两个全等三角形，使 AB、AC 分别是这两个全等三角形的对应边，于是想到作$\angle BAC$ 的平分线 AD .

证明 如图 12.3.11，作$\angle BAC$ 的平分线 AD .

在$\triangle BAD$ 和$\triangle CAD$ 中，

$\because$ $\angle B = \angle C$,

$\angle 1 = \angle 2$,

$AD = AD$,

$\therefore$ $\triangle BAD \cong \triangle CAD$(AAS).

$\therefore$ $AB = AC$ (全等三角形的对应边相等).

想想看，还可以添加什么辅助线证明这一结论？

例 4 如图 12.3.12，在$\triangle ABC$中，已知$\angle A=40°$，$\angle B=70°$．求证：$AB=AC$．

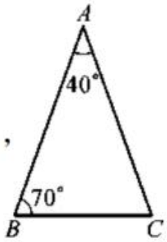


图12.3.12

证明 $\because\ \angle A+\angle B+\angle C=180°$（三角形的内角和等于 180°），

$\angle A=40°$，$\angle B=70°$，

$\therefore\ \angle C=180°-\angle A-\angle B$

$=180°-40°-70°=70°$．

$\therefore\ \angle C=\angle B$．

$\therefore\ AB=AC$（等角对等边）．

由上述等腰三角形的判定定理，我们还可以得到等边三角形的两个判定定理：

你能证明这两个定理吗?

三个角都相等的三角形是等边三角形；

有一个角等于 60°的等腰三角形是等边三角形．

例 5 如图 12.3.13，$AB\ /\!/\ CD$，$\angle 1=\angle 2$．求证：$AB=AC$．

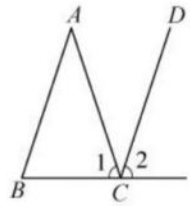


图12.3.13

分析 要证$AB=AC$，可以设法证明$\angle B=\angle 1$，而$\angle 1=\angle 2$，因此只要证明$\angle B=\angle 2$．

证明 $\because\ AB\ /\!/\ CD$，

$\therefore\ \angle B=\angle 2$（两直线平行，同位角相等）．

又$\because\ \angle 1=\angle 2$，

$\therefore\ \angle B=\angle 1$．

$\therefore\ AB=AC$（等角对等边）．

例 6 如图 12.3.14，在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$ 中，$\angle ACB=\angle A'C'B'=90°$，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$．

求证：Rt$\triangle ABC\cong$ Rt$\triangle A'B'C'$．

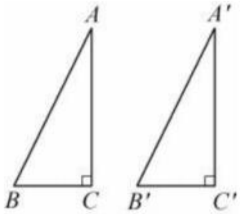


图12.3.14

证明 由于直角边$AC=A'C'$，我们通过平移和轴对称，改变Rt$\triangle ABC$的位置，使点A与点A'、点C与点C'重合，且使点B与点B'分别位于$A'C'$的两侧，如图 12.3.15 所示．

$\because\ \angle A'C'B = \angle A'C'B' = 90°$,

$\therefore\ \angle B'C'B = \angle A'C'B' + \angle A'C'B = 180°$,

即点 B'、C'、B 在同一条直线上.

在$\triangle A'B'B$ 中,

$\because\ A'B' = AB = A'B$,

$\therefore\ \angle B = \angle B'$（等边对等角）.

在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$中,

$\because\ \angle B = \angle B'$,

$\angle ACB = \angle A'C'B'$,

$AC = A'C'$,

$\therefore$ Rt$\triangle ABC \cong$ Rt$\triangle A'B'C'$（AAS）.

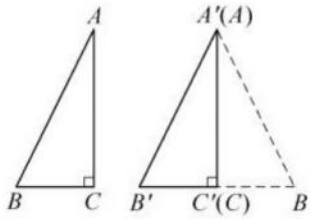


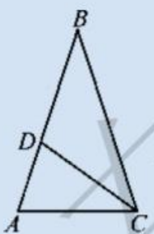
图12.3.15

这样，我们就证明了前面已给出的判定直角三角形全等的 HL 判定定理.

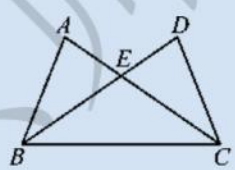
练习

1. 如图，$\angle A = 72°$，$\angle B = 36°$，CD 平分 $\angle ACB$. 试指出图中的哪些三角形是等腰三角形，并说明理由.

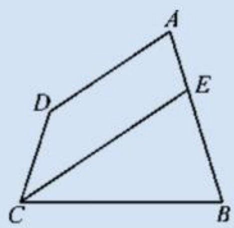
2. 如图，$AB = DC$，$\angle ABC = \angle DCB$，AC、BD 相交于点 E. 求证：$EB = EC$.



（第 1 题）



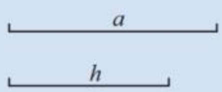
（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，$\angle A = \angle B$，$CE \parallel DA$. 求证：$CE = CB$. 需再增加什么条件，可使$\triangle BCE$ 成为等边三角形?

4. 已知底边及底边上的高线作等腰三角形. 即：如图，已知线段 a、h，求作$\triangle ABC$，使 $AB = AC$，$BC = a$，边 BC 上的高 $AD = h$.



（第 4 题）

信息技术应用

探索三角形边、角的关系

1. 我们已经知道，等腰三角形的底角相等．如果三角形有两条边不相等，那么这两条边所对的角相等吗？

如图 1，在$\triangle ABC$ 中，已知 $AB\neq AC$，我们利用动态几何软件作$\triangle ABC$，并测量 AB、AC、$\angle B$ 和$\angle C$ 的值．如图 2，改变顶点 A（或顶点 B、C）的位置，可以发现，当 $AB\neq AC$ 时，$\angle B$ 与$\angle C$ 不相等．

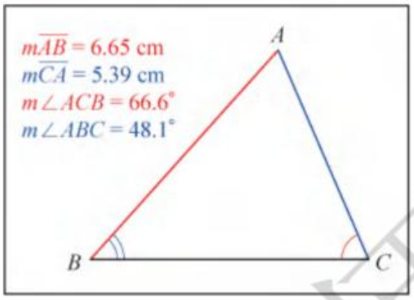


图 1

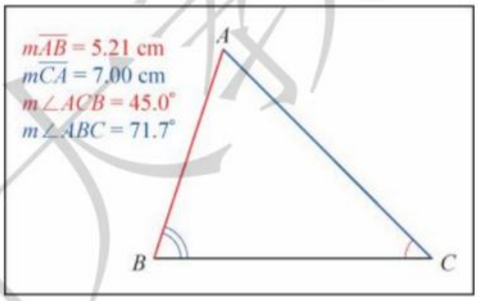


图 2

我们也可以用推理的方法，证明如果三角形有两条边不相等，那么这两条边所对的角不相等：假设 $\angle C=\angle B$，根据“等角对等边”，就有 $AB=AC$，与已知 $AB\neq AC$ 矛盾！因此 $\angle C\neq\angle B$，即“如果三角形有两条边不相等，那么这两条边所对的角也不相等”．

同样，我们也可以探索发现并证明：如果三角形有两个角不相等，那么这两个角所对的边也不相等．

2. 在$\triangle ABC$ 中，如果 $AB>AC$，那么$\angle C$ 与$\angle B$ 哪个大？

我们利用动态几何软件作$\triangle ABC$，并测量 AB、AC、$\angle B$ 和$\angle C$ 的值，如图 3 所示．我们发现不管如何改变顶点 A（或顶点 B、C）的位置，当 $AB>AC$ 时，总有 $\angle C>\angle B$．

我们将$\angle A$ 对折，即将$\triangle ADC$ 沿$\angle BAC$ 的平分线 AD 翻折，由于 $AB>AC$，点 C 必定落在边 AB 上的点 E 处，如图 4 所示．你能依据图中$\angle AED$ 与$\angle B$、$\angle C$ 的关系，说明 $\angle C>\angle B$ 吗？你还有其他证明方法吗？

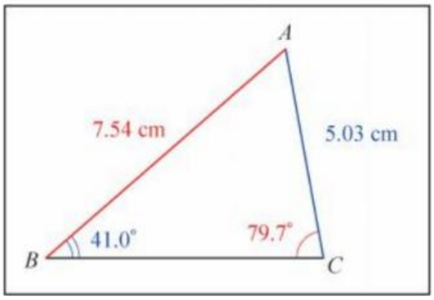


图 3

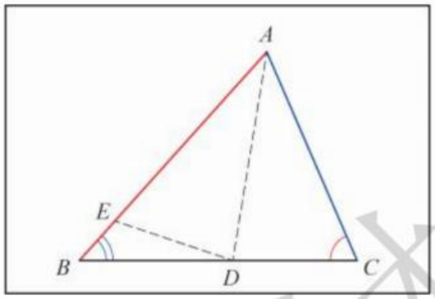


图 4

同样，我们也可探索发现并证明：如果 $\angle C > \angle B$，那么 $AB > AC$.

3. 如图 5，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，如果 $AB > AC$，那么 $\angle ADB$ 与 $\angle ADC$ 哪个大？BD 与 CD 哪条线段长？

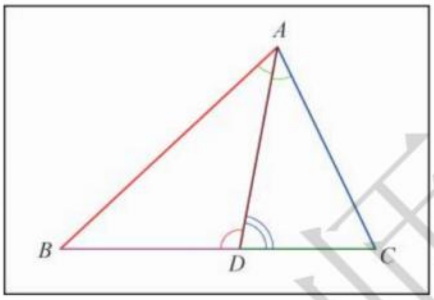


图 5

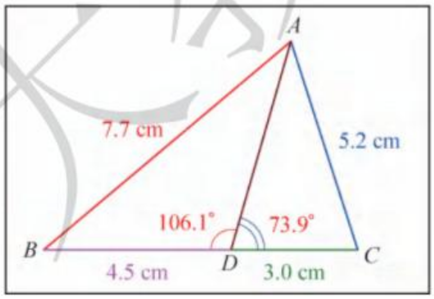


图 6

我们利用动态几何软件作 $\triangle ABC$ 及 $\angle BAC$ 的平分线，测量 AB、AC、BD、CD、$\angle ADB$ 和 $\angle ADC$ 的值，如图 6 所示．我们发现不管如何改变顶点 A（或顶点 B、C）的位置，当 $AB > AC$ 时，总有 $\angle ADB > \angle ADC$，$BD > CD$.

如图 4 那样，将 $\angle A$ 对折，即将 $\triangle ADC$ 沿 $\angle BAC$ 的平分线 AD 翻折，由于 $AB > AC$，点 C 必定落在边 AB 上的点 E 处．连结 DE，此时 $CD = DE$，$\angle ADE = \angle ADC$，从而得到 $\angle ADB > \angle ADC$. 依据 $\angle BED$ 与 $\angle ADC$、$\angle B$ 的关系，你能说明 $\angle BED$ 与 $\angle B$ 的大小关系，从而得到 $BD > DC$ 的结论吗？

4. 如图 7，在 $\triangle ABC$ 中，如果 $AB > AC$，你能说明 AD 与 AC 哪条线段长吗？

我们先就如图 7 那样的三角形看看可以得到什么结论.

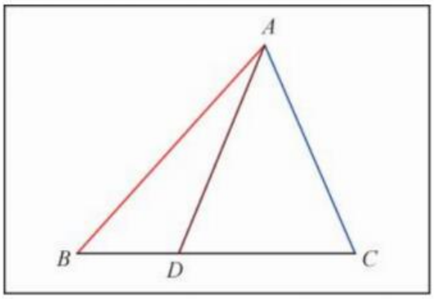


图 7

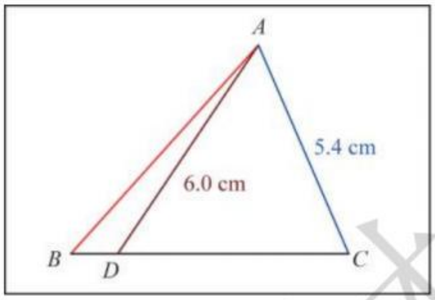


图 8

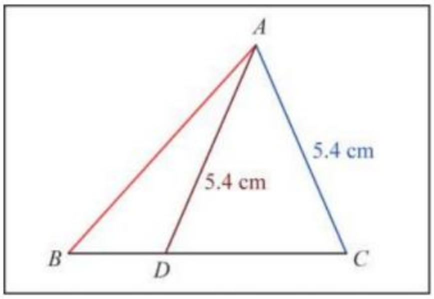


图 9

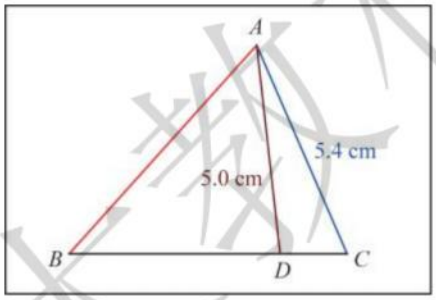


图 10

当 $AB > AC$，且 $\angle C$ 为锐角时，我们拖动点 D，改变点 D 在边 BC 上的位置，发现当点 D 由点 B 出发，逐渐向点 C 移动时，一开始 AD 大于 AC(图 8)，然后等于 AC(图 9)，而后小于 AC(图 10)．你能说明其中的原因吗？

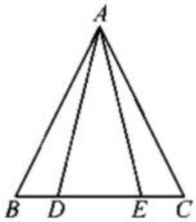
当 $\angle C$ 为钝角(或直角)时，会有怎样的结论呢？试用动态几何软件探索一下，并用推理的方法证明，相信你一定会得到有意义的结论！

习题12.3

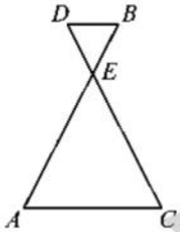
A 组

1. 等腰三角形的周长为 16，其中一条边的长是 6，求另两条边的长．
2. 等腰三角形的底角比顶角大 15°，求各个角的度数．
3. 有两个三角形，它们的三个角分别为：① 20°，40°，120°；② 20°，60°，100°．怎样把它们分别分成两个等腰三角形？画出图形试试看．

4. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D、E是边BC上的点，且$BD=CE$．求证：$\angle ADE=\angle AED$．



（第4题）



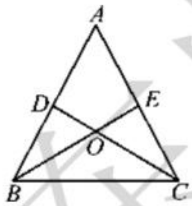
（第5题）

5. 如图，AB、CD相交于点E，$EA=EC$，$AC \parallel BD$．求证：$EB=ED$．

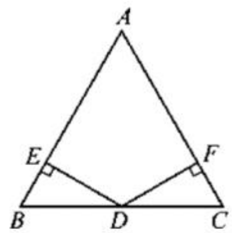
B 组

6. 如图，在等腰三角形ABC中，两底角的平分线BE、CD相交于点O．求证：$OB=OC$，$OD=OE$．

7. 如图，已知点D为BC的中点，$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，点E、F为垂足，且$BE=CF$，$\angle BDE=30°$．求证：$\triangle ABC$是等边三角形．

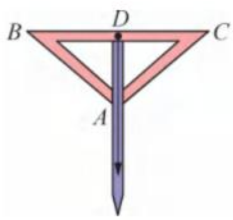


（第6题）



（第7题）

8. 在如图所示的三角测平架中，$AB=AC$，在边BC的中点D处挂一个重锤，自然下垂．调整架身，使点A恰好在重锤线上．试问：此时BC是否正好处于水平位置？为什么？



（第8题）

12.4 逆命题和逆定理

1. 互逆命题和互逆定理

观察这两个命题的条件和结论，你发现了什么？

我们已经知道，表示判断的语句叫做命题．例如“两直线平行，内错角相等”“内错角相等，两直线平行”都是命题．

上面两个命题的条件和结论恰好互换了位置．

在两个命题中，如果第一个命题的条件是第二个命题的结论，而第一个命题的结论是第二个命题的条件，那么这两个命题叫做**互逆命题**．如果把其中一个命题叫做**原命题**，那么另一个命题就叫做它的**逆命题**．

命题“两直线平行，内错角相等”的

条件为：________________；

结论为：________________．

因此它的逆命题为：

________________________________．

你还能举出原命题是真命题，而其逆命题是假命题的例子吗？

每一个命题都有逆命题，只要将原命题的条件改成结论，并将结论改成条件，便可得到原命题的逆命题．但是原命题正确，它的逆命题未必正确．例如真命题“对顶角相等”的逆命题为“相等的角是对顶角”，这个逆命题就是假命题．

如果一个定理的逆命题也是定理，那么这两个定理叫做**互逆定理**，其中的一个定理叫做另一个定理的**逆定理**．

我们已经知道命题“两直线平行，内错角相等”和它的逆命题“内错角相等，两直线平行”都是定理，因此它们就是互逆定理．

一个假命题的逆命题可以是真命题，甚至可以是定理．例如“相等的角是对顶角”是假命题，但它的逆命题“对顶角相等”是真命题，且是定理．

练习

1. 先指出下列各命题的条件和结论，再写出它们的逆命题，并判断其真假：

（1）如果一个三角形是直角三角形，那么它的两个锐角互余；

（2）等边三角形的每个角都等于60°；

（3）全等三角形的对应角相等；

（4）如果 $a=b$，那么 $a^3=b^3$.

2. 举例说明下列命题的逆命题是假命题：

（1）如果一个整数的个位数字是5，那么这个整数能被5整除；

（2）如果两个角都是直角，那么这两个角相等.

3. 在你所学过的知识内容中，有没有原命题与它的逆命题都正确的例子？试举出几对.

2. 线段垂直平分线

我们已经知道线段是轴对称图形，线段的垂直平分线是线段的对称轴. 如图12.4.1，直线 MN 是线段 AB 的垂直平分线，点 P 是 MN 上任意一点，连结 PA、PB. 将线段 AB 沿直线 MN 对折，我们发现 PA 与 PB 完全重合. 于是有：

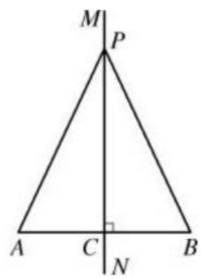


图12.4.1

线段垂直平分线的性质定理　线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等.

已知：如图12.4.1，$MN\perp AB$，垂足为点 C，$AC=BC$，点 P 是直线 MN 上的任意一点.

求证：$PA=PB$.

分析　图中有 Rt△APC 和 Rt△BPC，只要证明这两个三角形全等，便可证得 $PA=PB$.

请写出完整的证明过程.

探索　这一定理描述了线段垂直平分线的性质，那么反过来会有什么结果呢？

	条件	结论
性质定理		
逆命题		

写出该性质定理与它的逆命题的条件和结论，想想看，其逆命题是否是一个真命题？

你一定发现到线段两端距离相等的点的确在该线段的垂直平分线上．我们可以通过“证明”说明这一结论正确．

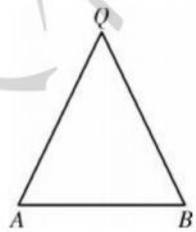


图12.4.2

已知：如图 12.4.2，$QA = QB$.

求证：点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上.

分析 为了证明点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上，可以先过点 Q 作线段 AB 的垂线，然后利用“等腰三角形的三线合一”，证明该垂线平分线段 AB；也可以先平分线段 AB，设线段 AB 的中点为 C，同样利用“等腰三角形的三线合一”，证明 QC 垂直于线段 AB .

证明 如图 12.4.3，过点 Q 作 $MN \perp AB$，垂足为点 C .

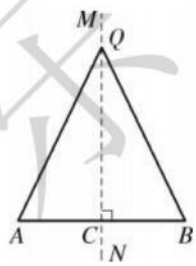


图12.4.3

你能根据分析中后一种添加辅助线的方法，写出它的证明过程吗？

$\because$ $QA = QB$，$QC \perp AB$，

$\therefore$ $AC = CB$（等腰三角形的三线合一）.

$\therefore$ 点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上.

于是就有定理：

到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上．

上述两条定理互为逆定理，根据上述两条定理，我们就能证明：三角形三边的垂直平分线交于一点.

试一试

从图 12.4.4 中可以看出，要证明三角形三边的垂直平分线交于一点，只需证明其中两条边的垂直平分线的交点一定在第三条边的垂直平分线上就可以了. 其思路可表示如下：

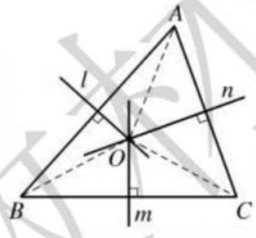


图12.4.4

l 是 AB 的垂直平分线 ⇒ $OA = OB$

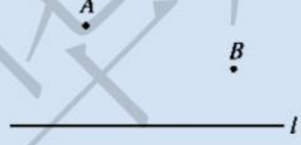
m 是 BC 的垂直平分线 ⇒ $OB = OC$

⇒ $OA = OC$ ⇒ 点 O 在 AC 的垂直平分线 n 上

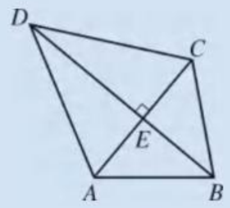
试试看，现在你会证明了吗?

练习

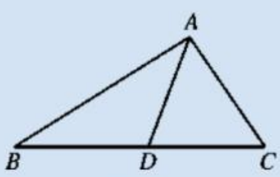
1. 如图，已知点 A、B 和直线 l，在直线 l 上求作一点 P，使 $PA = PB$.
2. 如图，$BD \perp AC$，垂足为点 E，$AE = CE$. 求证：$AB + CD = AD + CB$.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在△ABC 中，已知点 D 在边 BC 上，且 $BD + AD = BC$. 求证：点 D 在边 AC 的垂直平分线上.

3. 角平分线

我们已经知道角是轴对称图形，角平分线所在的直线是角的对称轴. 如图 12.4.5，OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，点 P 是 OC 上任意一点，作 $PD \perp OA$，$PE \perp OB$，垂足分别为点 D 和点 E. 将$\angle AOB$ 沿 OC 对折，我们发现 PD 与 PE 完全重合. 于是有：

角平分线的性质定理　角平分线上的点到角两边的距离相等.

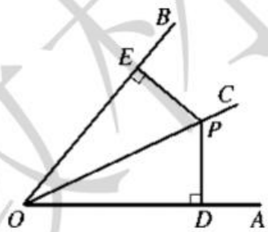


图12.4.5

已知：如图 12.4.5，OC 是$\angle AOB$ 的平分线，点 P 是 OC 上的任意一点，$PD \perp OA$，$PE \perp OB$，垂足分别为点 D 和点 E.

求证：$PD = PE$.

分析　图中有 Rt$\triangle PDO$ 和 Rt$\triangle PEO$，只要证明这两个三角形全等，便可证得 $PD = PE$.

请写出完整的证明过程.

探索　这一定理描述了角平分线的性质，那么反过来会有什么结果呢？

	条件	结论
性质定理		
逆命题		

写出该性质定理与它的逆命题的条件和结论，想想看，其逆命题是否是一个真命题?

你一定发现角的内部到角两边距离相等的点的确在该角的平分线上. 我们可以通过“证明”说明这一结论正确.

已知：如图12.4.6，$QD \perp OA$，$QE \perp OB$，垂足分别为点 D 和点 E，$QD = QE$.

求证：点 Q 在$\angle AOB$ 的平分线上.

分析 为了证明点 Q 在 $\angle AOB$ 的平分线上，可以作射线 OQ，然后证明 $\text{Rt}\triangle QDO \cong \text{Rt}\triangle QEO$，从而得到 $\angle AOQ = \angle BOQ$.

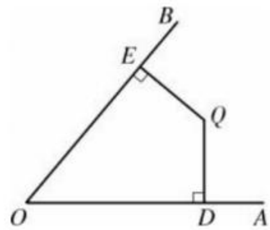


图12.4.6

证明 如图 12.4.7，过点 O、Q 作射线 OQ.

$\because$ $QD \perp OA$，$QE \perp OB$，

$\therefore$ $\angle QDO = \angle QEO = 90°$.

在 $\text{Rt}\triangle QDO$ 和 $\text{Rt}\triangle QEO$ 中，

$\because$ $OQ = OQ$，$QD = QE$，

$\therefore$ $\text{Rt}\triangle QDO \cong \text{Rt}\triangle QEO$(HL).

$\therefore$ $\angle DOQ = \angle EOQ$(全等三角形的对应角相等).

$\therefore$ 点 Q 在 $\angle AOB$ 的平分线上.

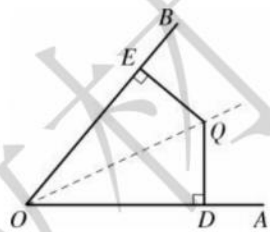


图12.4.7

于是就有定理：

角的内部到角两边距离相等的点在角的平分线上.

上述两条定理互为逆定理，根据上述两条定理，我们就能证明：三角形的三条角平分线交于一点.

试一试

从图 12.4.8 中可以看出，要证明三角形的三条角平分线交于一点，只需证明其中两条角平分线的交点一定在第三条角平分线上就可以了. 其思路可表示如下：

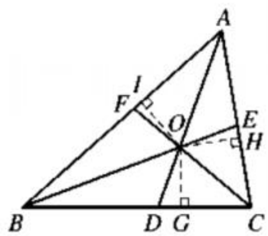


图12.4.8

AO 是 $\angle BAC$ 的平分线，$OI \perp AB$，$OH \perp AC$ ⇒ $OI = OH$

BO 是 $\angle ABC$ 的平分线，$OI \perp BA$，$OG \perp BC$ ⇒ $OI = OG$

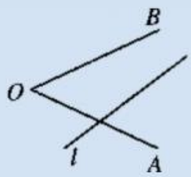
⇒ $OH = OG$

$OH = OG$，$OH \perp CA$，$OG \perp CB$ ⇒ 点 O 在 $\angle BCA$ 的平分线上

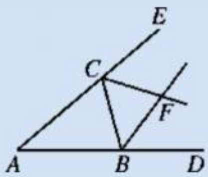
试试看，现在你会证明了吗？

练习

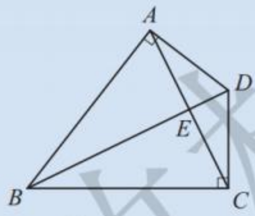
1. 如图，在$\angle AOB$的内部找出一点P，使得点P在直线l上，且点P到该角两边（即射线OA与OB）的距离相等.
2. 如图，$\triangle ABC$的外角$\angle CBD$和$\angle BCE$的平分线相交于点F．求证：点F在$\angle DAE$的平分线上.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，$\angle ABD=\angle CBD$，$DA\perp BA$，$DC\perp BC$. 求证：$\angle DAC=\angle DCA$.

阅读材料

《几何原本》

我们的前人将只研究图形形状和大小的学科称为几何学．几何学始于古巴比伦人和古埃及人所处的时代．相传古埃及尼罗河每年泛滥，河水冲毁耕地，每次泛滥后都需要重新丈量土地，从而推动了几何学的产生与发展．在希腊文和拉丁文中，“几何学”（geometry）一词的原意就是“测量土地”．公元前六百年左右，古希腊开始形成了较为系统的几何学知识，当时人们作了大量的几何猜想，并用逻辑推理的方法证实了许多发现．在其后的三百年中，用演绎推理证实数学猜想的方法发展得越来越完善．公元前三百年左右，古希腊数学家欧几里得（Euclid，约公元前330—公元前275）总结了前人的经验，将前人的成果和自己的发现写成了一本叫


欧几里得

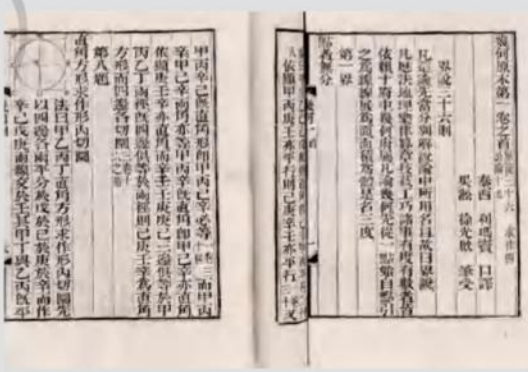
做 *Elements* 的书．这是一部经典的数学名著．从印刷技术发明到 19 世纪末，用各种文字发行的 *Elements* 已达一千版以上．这是一部划时代的名著，是最早用公理法建立数学演绎体系的典范．在这部数学名著中，欧几里得从当时人们认为的不言而喻的几条基本事实出发，运用演绎推理的方法，使一个接一个的几何发现（定理）得到证明，如同滚雪球一般，使得这个体系中精确无误的几何事实越积越多，从而推演出了内容丰富多彩的几何学．

在明朝万历年间（1607），我国科学家徐光启（1562—1633）和意大利传教士利玛窦（M. Ricci，1552—1610）共同将欧几里得原著的拉丁文本的前 6 卷翻译成了中文，取名为《几何原本》．徐光启巧妙地将“geometry”翻译成“几何”，既含有“多少”的意思，又考虑到了“geo”的发音．该名词一直沿用到现在．

将 *Elements* 翻译成中文以后，极大地影响了中国原有的数学学习和研究的习惯，因而，成了中国数学史上的一件大事．徐光启充分认识到几何学的重要意义，他说：“窃意百年之后，必人人习之．”清朝末年废科举、兴学堂之后，几何学成为学校中必修科目之一．这时出现了徐光启所预料的“必人人习之”的情况．

上海徐家汇是徐光启的故乡，徐家汇本名法华汇，为了纪念徐光启而改名为徐家汇，徐光启的石像至今还矗立在上海市徐家汇的光启公园中．园内还有徐光启纪念馆．

利玛窦（左）和徐光启（右）



徐光启翻译的《几何原本》页面

在清朝咸丰年间（1857），我国数学家李善兰（1811—1882）和英国传教士伟烈亚力（A. Wylie，1815—1887）共同将欧几里得原著的英文本的后 9 卷翻译成了中文．至此，对欧几里得的 *Elements* 的翻译工作宣告全部完成．

李善兰和他翻译的《几何原本》页面

欧几里得的 *Elements* 对几何学的发展和几何学的教学起了巨大作用．人们为了纪念欧几里得，一直把这种体系的几何学称为欧几里得几何学．

习题12.4

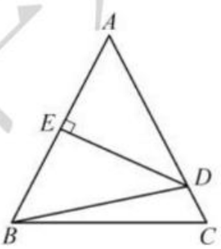
A 组

1. 写出下列命题的逆命题，并判断它们是真命题还是假命题：

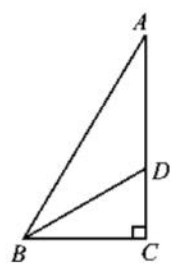
（1）如果 $x=y$，那么 $x^2=y^2$；

（2）如果一个三角形有一个角是钝角，那么它的另外两个角是锐角．

2. 如图，在△ABC 中，$AB=AC$，$\angle A=50°$，DE 垂直平分 AB．求 $\angle DBC$ 的度数．



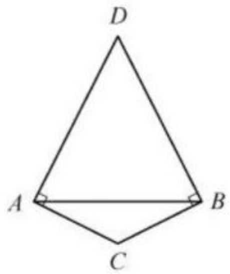
（第 2 题）



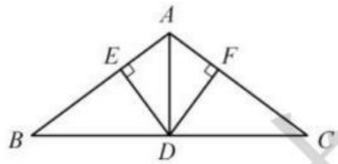
（第 3 题）

3. 如图，在△ABC 中，$\angle A=30°$，$\angle C=90°$，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，交 AC 于点 D．求证：点 D 在 AB 的垂直平分线上．

4. 如图，$CA \perp DA$，$CB \perp DB$，垂足分别为点 A 和点 B，$\angle CAB = \angle CBA$. 求证：点 C 在 $\angle ADB$ 的平分线上.



（第 4 题）

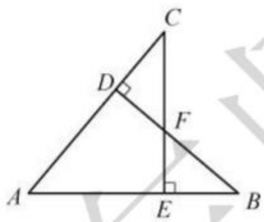


（第 5 题）

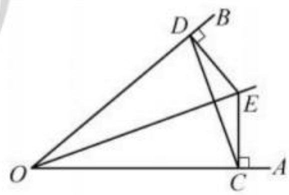
5. 如图，已知 $\angle ADE = \angle ADF$，$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，垂足分别为点 E 和点 F，$BE = CF$. 求证：$AB = AC$.

B 组

6. 如图，$BD \perp AC$，$CE \perp AB$，垂足分别为点 D 和点 E，BD 与 CE 相交于点 F，$BF = CF$. 求证：点 F 在 $\angle BAC$ 的平分线上.



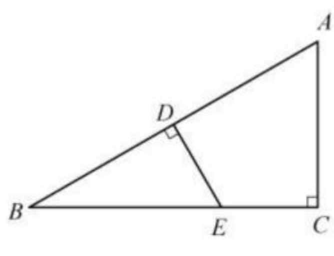
（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，已知点 E 是 $\angle AOB$ 的平分线上一点，$EC \perp OA$，$ED \perp OB$，垂足分别为点 C 和点 D. 求证：直线 OE 是线段 CD 的垂直平分线.

8. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，斜边 AB 的垂直平分线分别交边 AB、BC 于点 D、E，$ED = EC$. 求证：$\angle A = 2\angle B$，并求出 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的度数.



（第 8 题）

数学活动

三角形全等的判断

我们已经知道判断两个三角形是否全等的方法有：SAS、ASA(AAS)、SSS；对于两个直角三角形，还有特殊的判断方法：HL．直角三角形之所以有这样特殊的判断方法，在于它们之间已经存在一个相等关系——直角都相等.

那么对于另外一些特殊的三角形，是否也存在一些特殊的判断方法呢？

例如等腰三角形．显然对于两个等腰三角形，只有“一条腰相等”肯定不够，那么再加上什么条件，才能保证它们全等呢？

想想看，有哪些特殊的三角形，满足什么条件，才能判断它们全等.

将你的思考与新的发现填入下列表格中，与同伴交流，看看是否正确.

三角形的类型	判断全等的条件	说明

对于两个四边形，它们的边与角需要满足什么条件，才能判断它们全等呢？全等三角形有“边边边”(SSS)，那么全等四边形是否也有“边边边边”(SSSS)呢？或许还要添加一个角相等？或许……

写下你的探索，利用尺规作图，看看你的探索发现是否合理.

	判断全等的条件	说明
四边形		

小结

一、知识结构

- 全等三角形
  - 命题与定理
  - 三角形全等的判定
    - 边角边（SAS）
    - 角边角（ASA）—— 角角边（AAS）
    - 边边边（SSS）
    - 斜边直角边（HL）
  - 等腰三角形
    - 等腰三角形的两个底角相等
    - 等腰三角形底边上的高、中线及顶角的平分线重合
    - 等边三角形的各角都等于60°
    - 有两个角相等的三角形是等腰三角形
    - 三个角都相等的三角形是等边三角形
    - 有一个角是60°的等腰三角形是等边三角形
  - 逆命题与逆定理
    - 线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等
    - 到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上
    - 角平分线上的点到角两边的距离相等
    - 角的内部到角两边距离相等的点在角的平分线上

二、要点

1. 本章研究了命题、定理的条件和结论，以及原命题与它的逆命题、定理与它的逆定理之间的关系，这些术语在今后的学习中会经常遇到.

2. 本章研究的主要内容是三角形全等的判定方法. 判定三角形全等的三个基本事实是我们进行演绎推理的重要依据，它们是从静态的角度探索发现的依据三角形的基本元素判定三角形全等的方法. 实质上它们和动态的全等三角形定义是一致的，我们完全可以说明，在这些条件下的两个三角形一定可以通过图形的基本变换(轴对称、平移和旋转)而相互重合.

3. 在本章中，我们体会了证明的必要性，知道了经过合情推理探索发现的数学结论还需要经过演绎推理加以确认. 我们还学习了一些基本的证明方法.

4. 本章对于一些几何图形(等腰三角形、线段垂直平分线、角平分线)的研究，都经历了“探索发现—演绎证明”的过程，先通过几何直观、实验操作，探索发现某些结论，再通过演绎推理验证其正确与否，体现了合情推理与演绎推理是两种相辅相成的推理方式.

5. 我们已经知道利用尺规作图可以作一条线段等于已知线段、作一个角等于已知角、作已知角的平分线、经过一已知点作已知直线的垂线、作已知线段的垂直平分线. 本章通过逻辑推理的方法，完成了对这些基本的尺规作图方法的正确性的论证. 尺规作图方法是十分有效、十分有趣的，在今后的学习中，我们还会继续不断地进行探索.

复习题

A 组

1. 判断下列命题是真命题还是假命题，若是假命题，请举出反例说明：

（1）两直线平行，同旁内角互补；

（2）同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行；

（3）相等的角是内错角；

（4）有一个角是60°的三角形是等边三角形；

（5）若 a、b、c 都是有理数，且 $a>b$，则 $ac>bc$.

2. 判断题(对的在括号内填“✓”，错的在括号内填“×”)

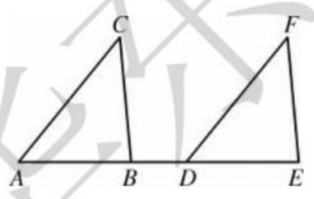
（1）每个命题都有逆命题.（　　）

（2）每个定理都有逆定理.（　　）

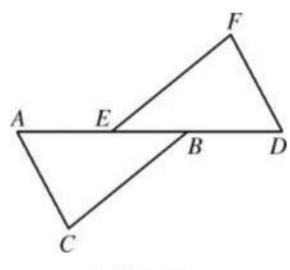
（3）真命题的逆命题都是真命题.（　　）

（4）假命题的逆命题都是假命题.（　　）

3. 如图，$AB=DE$，$AC\parallel DF$，$BC\parallel EF$. 求证：$\triangle ABC\cong\triangle DEF$.



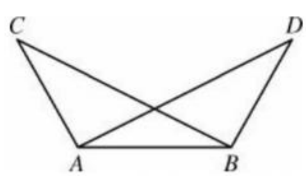
（第 3 题）



（第 4 题）

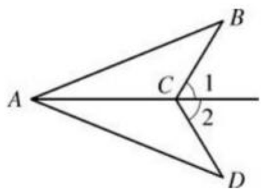
4. 如图，$AE=DB$，$BC=EF$，$BC\parallel EF$. 求证：$\triangle ABC\cong\triangle DEF$.

5. 如图，$AC=BD$，$BC=AD$. 求证：$\triangle ABC\cong\triangle BAD$.

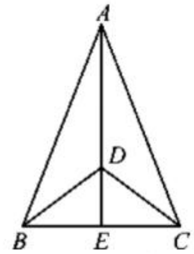


（第 5 题）

6. 如图，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle B = \angle D$. 求证：$\triangle ABC \cong \triangle ADC$.



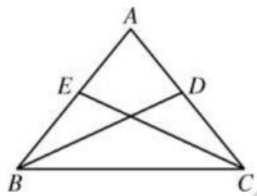
（第 6 题）



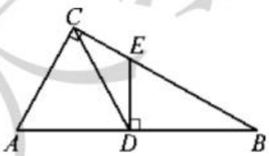
（第 7 题）

7. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$DB = DC$，AD 的延长线交 BC 于点 E. 求证：$\angle BAE = \angle CAE$，$BE = CE$.

8. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle BDA = \angle CEA$，$AE = AD$. 求证：$AB = AC$.



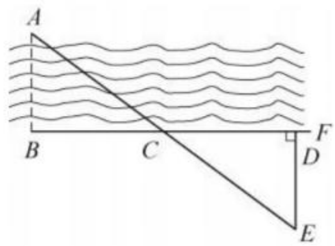
（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$AC = AD$，$DE \perp AB$. 求证：$\angle ECD = \angle EDC$.

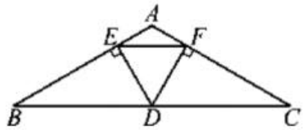
10. 如图，要测量河岸相对的两点 A、B 间的距离，先在 AB 的垂线 BF 上取两点 C、D，使 $BC = CD$，再作出 BF 的垂线 DE，使点 A、C、E 在同一条直线上，测得的 DE 的长就是 AB 的长，为什么？



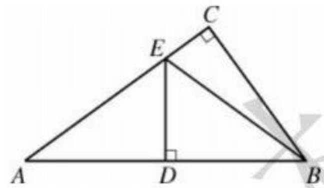
（第 10 题）

B 组

11. 如图，在△ABC 中，$\angle A = 120°$，$AB = AC$，点 D 是边 BC 的中点，$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，垂足分别为点 E 和点 F. 求证：△DEF 是等边三角形.



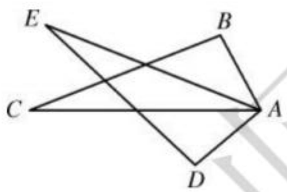
（第 11 题）



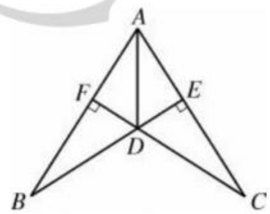
（第 12 题）

12. 如图，在△ABC 中，$\angle C = 90°$，$\angle A = 36°$，DE 是线段 AB 的垂直平分线，交 AB 于点 D，交 AC 于点 E. 求证：$\angle EBC = 18°$.

13. 如图，$AB = AD$，$AC = AE$，$\angle BAE = \angle DAC$. 求证：$\angle C = \angle E$.



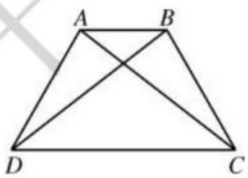
（第 13 题）



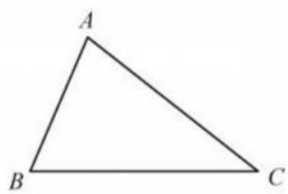
（第 14 题）

14. 如图，$BE \perp AC$，$CF \perp AB$，垂足分别为点 E 和点 F，$BF = CE$，BE 与 CF 相交于点 D. 求证：AD 平分 $\angle BAC$.

15. 如图，$AD = BC$，$\angle ADC = \angle BCD$. 求证：$\angle BAC = \angle ABD$.



（第 15 题）



（第 16 题）

16. 如图，已知△ABC，求作点 P，使 $AP = CP$，且点 P 到边 BA、BC 的距离相等.

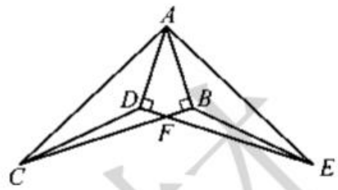
C 组

17. 两个直角三角形有两个角及一条边分别相等，这两个直角三角形会全等吗？试列出各种情况，并一一加以说明.

18. 如图，Rt$\triangle ABC \cong$ Rt$\triangle ADE$，$\angle ABC = \angle ADE = 90°$，$BC$ 与 DE 相交于点 F，连结 CD、EB.

(1) 请找出图中其他的全等三角形；

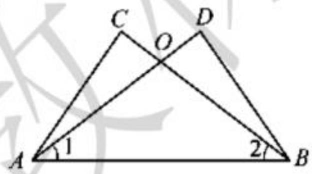
(2) 试证明 $CF = EF$.



(第 18 题)

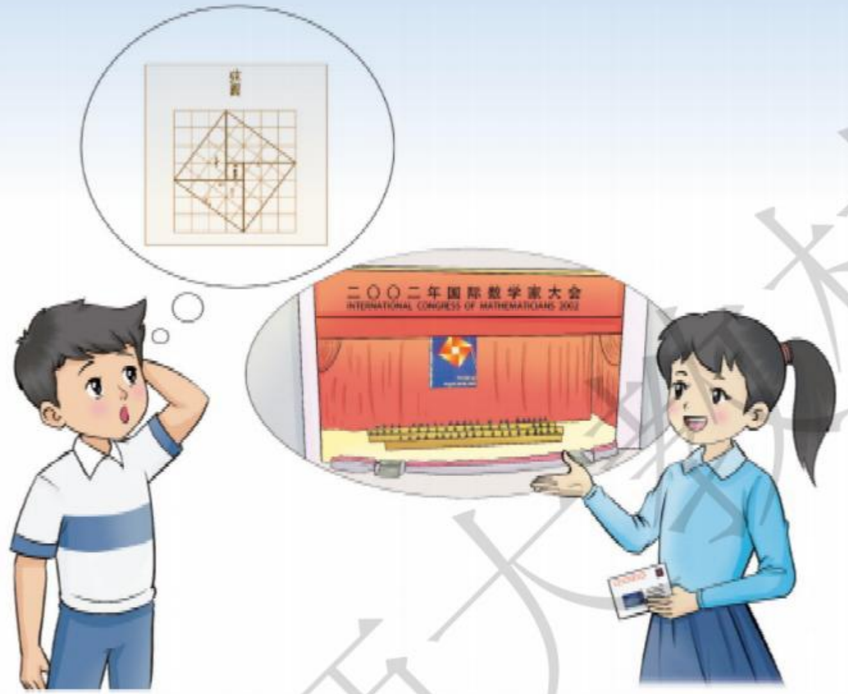
19. 如图，在$\triangle ABC$ 和$\triangle BAD$ 中，AD 与 BC 相交于点 O，$\angle 1 = \angle 2$，请你添加一个条件(不再添加其他线段，不再标注或使用其他字母)，使 $AC = BD$，并给出证明.

你添加的条件是：________.



(第 19 题)

第 13 章　勾股定理



你知道 **2002** 年在北京召开的国际数学家大会（**ICM 2002**）吗？在这次大会上，可以看到一个简洁优美、远看像旋转的纸风车的图案，它就是大会的会徽.

会徽的原型即是 **1700** 多年前中国古代数学家赵爽用来证明勾股定理的弦图.

★ 本章将探讨并证明勾股定理及其逆定理，并用以解决各种有趣的问题，进一步加深对直角三角形的认识.

13.1 勾股定理及其逆定理

我们知道直角三角形的内角之间存在一些特殊的关系：一个角为直角，另外两个锐角互余．那么，直角三角形的三条边之间是否也存在某种特殊关系呢？

1．直角三角形三边的关系

本章导图中的弦图隐含着直角三角形三边之间的一种奇妙关系，让我们首先观察正方形瓷砖铺成的地面．

图 13.1.1 是正方形瓷砖铺成的地面，观察图中着色的三个正方形，显然，两个小正方形 P、Q 的面积之和等于大正方形 R 的面积．即

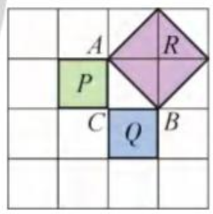


图13.1.1

$$AC^2+BC^2=AB^2,$$

这说明，在等腰直角三角形 ABC 中，两直角边的平方和等于斜边的平方．那么在一般的直角三角形中，两直角边的平方和是否等于斜边的平方呢？

观察图 13.1.2，如果每一小方格表示 $1\ \text{cm}^2$，那么可以得到：

正方形 P 的面积 = ________ cm^2；

正方形 Q 的面积 = ________ cm^2；

正方形 R 的面积 = ________ cm^2．

我们发现，正方形 P、Q、R 的面积之间的关系是________________．

由此，我们得出 Rt△ABC 的三边长之间存在的关系是____________

____________________.

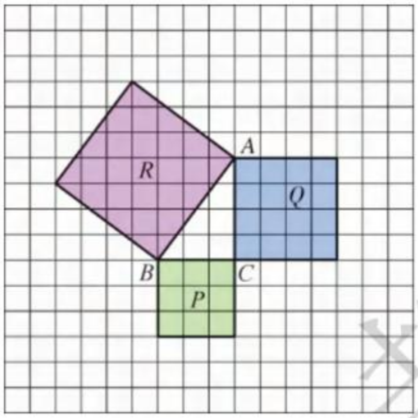


图13.1.2

做一做

作出两条直角边分别为 5 cm、12 cm 的直角三角形，然后用刻度尺量出斜边的长，并验证上述关系式对于这个直角三角形是否成立.

对于任意一个直角三角形，它的三边长之间是否都有这样的关系呢？

让我们回到导入语中所提到的 2002 年国际数学家大会的会标(图 13.1.3)中的那个像旋转的风车的会徽(图 13.1.4).

图13.1.3

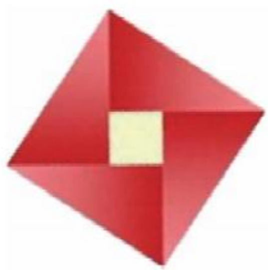


图13.1.4

它是由 4 个全等的直角三角形和 1 个小正方形组成的图案(图 13.1.4). 记直角三角形的两条直角边长分别为 a、b($b > a$), 斜边长为 c.

于是图 13.1.4 中各个部分的面积之间有如下的等式:

$$4 \times \frac{1}{2}ab + (b - a)^2 = c^2,$$

化简, 可得

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

概括　由上面的探索与验证, 可以发现: 对于任意的直角三角形, 如果它的两条直角边分别为 a、b, 斜边为 c, 那么一定有

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

这种关系, 我们称之为勾股定理.

勾股定理　直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方.

这就是我国古代所发现的勾股定理.

读一读

勾股定理揭示了直角三角形三边之间的关系.

我国古代, 人们把直角三角形中较短的直角边称为“勾”, 较长的直角边称为“股”, 斜边称为“弦”.

“弦图”最早是由三国时期的数学家赵爽在为《周髀算经》作注时给出的, 它标志着中国古代伟大的数学成就. 2002 年在北京召开的国际数学家大会(ICM 2002)的会徽, 其图案正是由“弦图”演变而来.

▶ **例 1** 在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$AB=6$，$BC=8$．求 AC 的长．

应用勾股定理，由直角三角形任意两边的长，可以求出第三边的长．

解 根据勾股定理，可得

$$AB^2+BC^2=AC^2.$$

所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

练习

1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$，$\angle C=90°$.
   （1）若 $a=6$，$c=10$，求 b；（2）若 $a=24$，$c=25$，求 b.
2. 如果一个直角三角形的两条边长分别是 3 cm 和 4 cm，那么这个三角形的周长是多少厘米？（精确到 0.1 cm）

▶ **例 2** 如图 13.1.5，Rt$\triangle ABC$ 的斜边 AC 比直角边 AB 长 2 cm，另一条直角边 BC 的长为 6 cm．求 AC 的长.

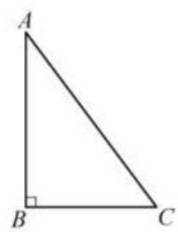


图13.1.5

解 由已知 $AB=AC-2$，$BC=6$ cm，根据勾股定理，可得

$$AB^2+BC^2=(AC-2)^2+6^2=AC^2,$$

解得 $$AC=10\text{ cm}.$$

▶ **例 3** 如图 13.1.6，为了求出位于湖两岸的点 A、B 之间的距离，一名观测者在点 C 处设桩，使$\triangle ABC$ 恰好为直角三角形．通过测量，得到 AC 的长为 160 m，BC 的长为 128 m．问：从点 A 穿过湖到点 B 有多远？

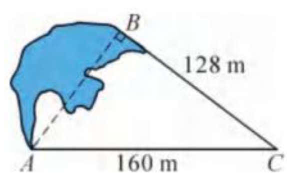


图13.1.6

解 如图 13.1.6，在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$$AC=160\text{ m},\quad BC=128\text{ m},$$

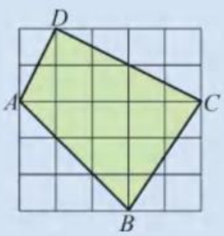
根据勾股定理，可得

$$
\begin{aligned}
AB &= \sqrt{AC^2 - BC^2} \\
&= \sqrt{160^2 - 128^2} \\
&= 96(\mathrm{m}).
\end{aligned}
$$

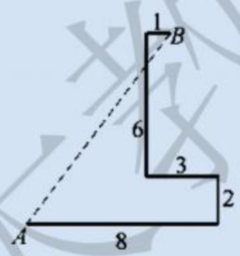
答：从点 A 穿过湖到点 B 有 96 m．

练习

1. 如图，小方格都是边长为 1 的正方形．求四边形 $ABCD$ 的面积和周长．（均精确到 0.1）



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 假期中，王强和同学到某海岛上去探宝旅游．如图，按照探宝图，他们在点 A 处登陆后先往东走 8 km，又往北走 2 km，遇到障碍后又往西走 3 km，再折向北走到 6 km 处往东一拐，仅走 1 km 就找到了宝藏．问：登陆点 A 到宝藏埋藏点 B 的直线距离是多少千米？

2. 直角三角形的判定

如何判定一个三角形是直角三角形？

我们已经知道，如果 $\angle A + \angle B = 90°$，那么$\triangle ABC$ 就是一个直角三角形，$\angle C$ 为直角．即有如下的直角三角形的判定方法：

有两个角互余的三角形是直角三角形．

根据三角形三边之间的某种特殊关系，我们同样可以找到判定直角三角形的方法．

由勾股定理，你能猜想是什么特殊关系吗？

古埃及人曾经用下面的方法画直角：

将一根长绳打上等距离的 13 个结，然后如图 13.1.7 那样钉成一个三角形，他们认为其中一个角便是直角.

你知道这是什么道理吗？

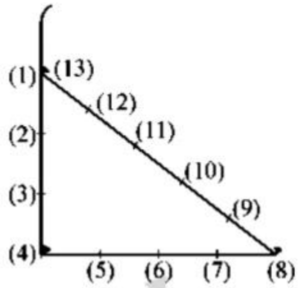


图13.1.7

试一试

试作出三边长分别为如下数据的三角形，看看它们是一些什么样的三角形：

(1) $a=3$，$b=4$，$c=5$；

(2) $a=4$，$b=6$，$c=8$；

(3) $a=6$，$b=8$，$c=10$.

可以发现，按(1)(3)所作的三角形都是直角三角形，最长边所对的角是直角；按(2)所作的三角形不是直角三角形.

你作的三角形如何？

在这三组数据中，(1)(3)两组数据恰好都满足 $a^2+b^2=c^2$. 对于直角三角形的判定，有一般的结论：

勾股定理的逆定理　如果三角形的三边长 a、b、c 有关系 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形，且边 c 所对的角为直角.

已知：如图 13.1.8①，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$，$a^2+b^2=c^2$.

求证：$\angle C=90°$.

证明　如图 13.1.8②，作 $\triangle A'B'C'$，使 $\angle C'=90°$，$A'C'=b$，$B'C'=a$，则 $A'B'^2=a^2+b^2=c^2$，即 $A'B'=c$.

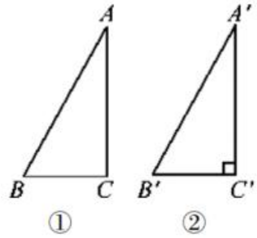


图13.1.8

在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中,

$\because$ $BC = a = B'C'$,

$AC = b = A'C'$,

$AB = c = A'B'$,

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

$\therefore$ $\angle C = \angle C' = 90°$.

▶ **例 4** 在$\triangle ABC$中,$AB = n^2 - 1$, $BC = 2n$, $AC = n^2 + 1$(n为大于1的整数).问:$\triangle ABC$是直角三角形吗?若是,哪一条边所对的角是直角?请说明理由.

解 $\because$ $AB^2 + BC^2 = (n^2 - 1)^2 + (2n)^2$

$= n^4 - 2n^2 + 1 + 4n^2$

$= n^4 + 2n^2 + 1$

$= (n^2 + 1)^2$

$= AC^2$,

想一想,为什么选择$AB^2 + BC^2$?AB、BC、CA的大小关系是怎样的?

$\therefore$ $\triangle ABC$是直角三角形,边AC所对的角是直角.

能够成为直角三角形三条边长的三个正整数,称为勾股数.例如:3、4、5,6、8、10,$n^2 - 1$、$2n$、$n^2 + 1$(n为大于1的整数),等等,都是勾股数.

练习

1. 设三角形的三边长分别等于下列各组数,试判断各三角形是不是直角三角形.若是,指出哪一条边所对的角是直角.

(1) 12,16,20;　　(2) 1.5,2,2.5.

2. 若一个三角形的三条边长a、b、c满足$\dfrac{a}{c-b} = \dfrac{c+b}{a}$,则这个三角形是直角三角形吗?

3. 想一想,你现在有多少种方法可以判定一个三角形是直角三角形.

3. 反证法

我们已经知道，当一个三角形的三边长 a、b、c（$a \leqslant b \leqslant c$）满足关系 $a^2+b^2=c^2$ 时，这个三角形一定是直角三角形. 如果此时 $a^2+b^2 \neq c^2$，那么这个三角形是否一定不是直角三角形呢？

做一做

作出以如下各组数为边长的三角形，算算较短的两边长的平方和是否等于最长边的平方，再观察它们的图形，你发现了什么？

（1）$a=1.0$，$b=2.4$，$c=2.6$；

（2）$a=2$，$b=3$，$c=4$；

（3）$a=2$，$b=2.5$，$c=3$.

我们可以发现，第一组恰好满足 $a^2+b^2=c^2$，由勾股定理的逆定理可知，组成的三角形是直角三角形，与所作图形一致. 而另外两个三角形较短的两边长的平方和都不等于最长边的平方，所作图形都不是直角三角形. 由此，可以猜想：当一个三角形的三边长 a、b、c（$a \leqslant b \leqslant c$）存在关系 $a^2+b^2 \neq c^2$ 时，这个三角形不是直角三角形.

然而，想从已知条件 $a^2+b^2 \neq c^2(a \leqslant b \leqslant c)$ 出发，直接经过推理得出结论，十分困难. 我们可以换一种思维方式，用如下方法证明这个结论：

注意 a、b、c 的大小关系：$a \leqslant b \leqslant c$.

（1）假设它是直角三角形；

（2）根据勾股定理，一定有 $a^2+b^2=c^2$，与已知条件 $a^2+b^2 \neq c^2$ 矛盾；

（3）因此假设不成立，即它不是直角三角形.

这种证明方法叫做“反证法”. 其步骤为：

先假设结论的反面是正确的；然后通过演绎推理，推出与基本事实、已证的定理、定义或已知条件等相矛盾；从而说明假设不成立，进而得出原结论正确.

回想一下，以前用过类似的方法吗？

读一读

反证法是数学证明的一种重要方法，历史上许多著名的命题都是用反证法证明的．一个命题，当从正面证明有困难或者不可能时，就可以尝试运用反证法，有时问题竟能轻易地被解决，此即所谓“正难，则反”．因此，牛顿就说过：“反证法是数学家最精良的武器之一．”用反证法不是直接证明结论，而是间接地去否定与结论相反的一面，从而得出事物真实的一面．反证法是一种间接的证明方法．在数与代数中关于“$\sqrt{2}$不是有理数”的证明所采用的正是反证法．今后还会多次用到这个有效的方法．

我们在七年级上学期证明“两直线平行，同位角相等”这一结论时，其实使用的就是反证法．

思考 现在再回到勾股定理：直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方．即“在$\triangle ABC$中，如果$AB = c$，$BC = a$，$CA = b$，且$\angle C = 90°$，那么$a^2 + b^2 = c^2$”是一个真命题．对于一般的非直角三角形，情况又会如何呢？即“在$\triangle ABC$中，如果$AB = c$，$BC = a$，$CA = b$，且$\angle C \neq 90°$，那么$a^2 + b^2 \neq c^2$”是真命题吗？

我们同样可以用反证法证明它是一个真命题．

先思考作什么假设，再用反证法写出推理过程．

例 5 证明：两条直线相交只有一个交点．

已知：两条相交直线l_1与l_2．

求证：l_1与l_2只有一个交点．

分析 想从已知条件“两条相交直线l_1与l_2”出发，经过推理，得出结论“l_1与l_2只有一个交点”是很困难的，因此可以考虑用反证法．

证明 假设两条相交直线 l_1 与 l_2 不止一个交点，不妨假设 l_1 与 l_2 有两个交点 A 和 B .

这样过点 A 和点 B 就有两条直线 l_1 和 l_2 . 这与“两点确定一条直线”，即“经过点 A 和点 B 的直线只有一条”这个基本事实矛盾.

所以假设不成立，因此两条直线相交只有一个交点.

▶ **例 6** 证明：在一个三角形中，至少有一个内角小于或等于 60°.

已知：$\triangle ABC$.

求证：$\triangle ABC$ 中至少有一个内角小于或等于 60°.

证明 假设$\triangle ABC$ 中没有一个内角小于或等于 60°，即

$$\angle A > 60^\circ,\quad \angle B > 60^\circ,\quad \angle C > 60^\circ.$$

于是

$$\angle A + \angle B + \angle C > 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ,$$

这与“三角形的内角和等于 180°”这个定理矛盾.

所以$\triangle ABC$ 中至少有一个内角小于或等于 60°.

练习

1. 求证：在一个三角形中，如果有两条边不相等，那么它们所对的角也不相等.
2. 求证：两条直线被第三条直线所截，如果内错角不相等，那么这两条直线不平行.
3. 求证：如果整数 m 的平方是一个偶数，那么 m 必为偶数.

阅读材料

勾股定理史话

勾股定理是人类最早发现、最基本的，也是应用最为广泛的一条定理. 勾股定理从发现到现在已有五千多年的历史，曾先后在不同地区或国家，被不同民族所发现，并成为这些地区或国家文明史中一个重要的标志性的文化事件.

我国古代有不少关于勾股定理的记载，让我们先从我们已认识的“赵爽弦图”说起.

赵爽(约 182—约 250)，东汉末至三国时代人，中国古代伟大的数学家，曾为现存最早的古代中国数学著作《周髀算经》撰序作注，他根据该著作的文字内容画了一组画，即“勾股圆方图”. 其中第一幅即“弦图”：由四个红色三角形(图 1 中表示“朱实”的部分)拼成的一个大正方形，中间围着一个黄色的小正方形(图 1 中表示“黄实”的部分).

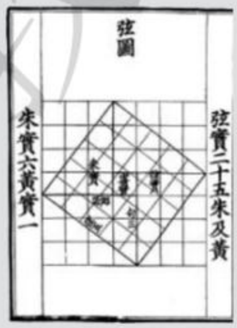


图 1

赵爽在“勾股圆方图”之后，给出注文“勾股圆方图说”：“勾股个自乘，并之为弦实，开方除之，即弦”. 若以 a、b、c 分别表示勾、股和弦，此即勾股定理的一般形式“$a^2+b^2=c^2$”或“$\sqrt{a^2+b^2}=c$”.

赵爽对他的“弦图”作了这样的解释：“案弦图，又可以勾股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以勾股之差自相乘，为中黄实，加差实亦成弦实.”用代数式表示，即

$$2ab+(b-a)^2=4\times\frac{1}{2}ab+(b-a)^2=c^2,$$

化简，即证得勾股定理 $a^2+b^2=c^2$.

那么赵爽是如何证明的呢？传说赵爽是通过面积移补的方法来证明的. 如图 2 所示，由以勾为边的正方形与以股为边的正方形合并的图形，将左、右下角的两个直角三角形分别移补到所示位置就得到以弦为边的正方形.

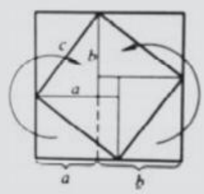


图 2

赵爽的这一证明，美国数学史家、哈佛大学教授库利奇（J. L. Coolidge，1873—1954）称其为“最省力的证明”；而西方希腊数学史权威学者希思（T. L. Heath，1861—1940）则指出这一证明与希腊几何学的思想方式有着“完全不同的色彩”.

现在让我们回到前面提到的《周髀算经》.

《周髀算经》大约成书于公元前 2 世纪的西汉时期，其涉及的数学、天文知识，有些可以追溯至公元前 11 世纪的西周年间．它从数学上讨论了宇宙的“盖天”模型，反映了中国古代数学与天文学的密切关系，其中最突出的数学成就为勾股定理及其在天文测量中的应用．该书中，既有勾股定理的特例，也包含了一般形式的勾股定理的陈述.

《周髀算经》中有公元前 11 世纪商高就勾股测量答周公的一段对话，以举例形式向统治者周公介绍了一条数学定理，即勾股定理：“勾广三、股修四、径隅五．”

在该书的另一处更进一步叙述了周公后人、贵族荣方与学者陈子的对话，其中最关键之处是这样的一句话：“勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日．”

荣方和陈子生活于公元前 7 世纪至公元前 6 世纪，大约与古希腊发现勾股定理的毕达哥拉斯同时代．他们的对话与前面提到的赵爽“勾股圆方图说”中的叙述一致，是一般的勾股定理．它是以天文测量总结出来的普遍规律的形式.

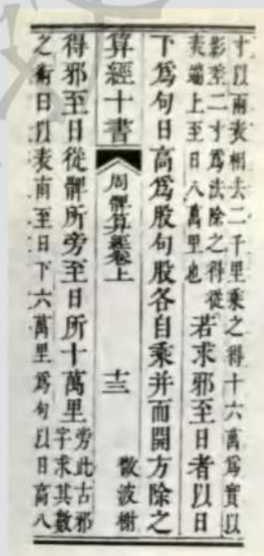

若求邪至日者以日
下爲句日高爲股句股各自乘并而開方除之
算經十書 周髀算經卷上 微波榭
得邪至日從髀所旁至日所十萬里

图 3

人们对于勾股定理的认识，经历过一个从特殊到一般的过程，是人类文明的共同语言.

勾股定理曾引起很多人的兴趣，历史上不同时代、不同国别的不同人士曾先后给出过四百多种勾股定理的证明，充分显示出它的灿烂光华.

信息技术应用

美丽的勾股树

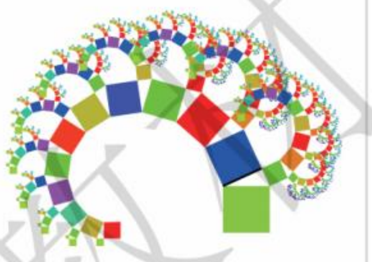


图 1

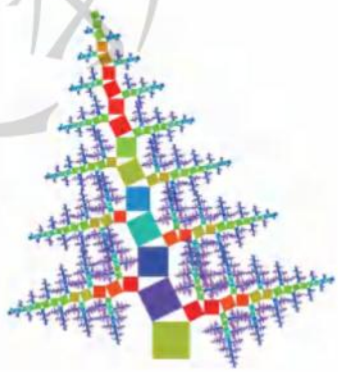


图 2

你可能去过森林公园，看到过许许多多千姿百态的植物. 可是你是否见过如图 1 和图 2 所示的勾股树呢?

我们可以利用动态几何软件作出图 1 和图 2 中美丽的勾股树.

首先作一个正方形，以其一条边为斜边作一个直角三角形，在这个直角三角形的两条直角边上再分别作正方形，如图 3 所示.

然后在这两个小正方形的边上，如前面同样的操作，分别作直角三角形，且使得所作的直角三角形左边的锐角与图 3 中直角三角形左边的锐角相等，接着在得到的两个小直角三角形的各条直角边上再作正方形，这样就可以得到如图 4 所示的图形.

接着在这 4 个小正方形的边上，按照上面的操作程序，继续作出直角三角形，再在各自的直角边上作正方形，得到如图 5 所示的图形.

继续不断地重复这个操作程序，就可得到如图 1 所示的勾股树. 你能想象出如图 2 所示的另一种勾股树的作法吗? 利用动态几何软件的迭代功能，可以又快又方便地完成这个重复过程，这样我们就可以快速地得到美丽的勾股树了.

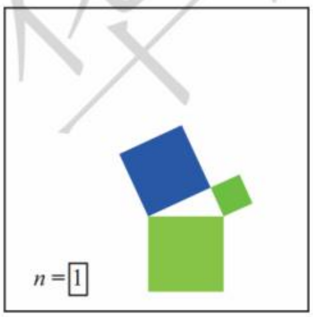


图 3

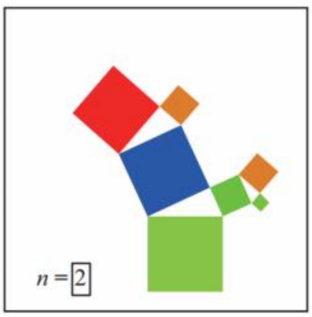


图 4

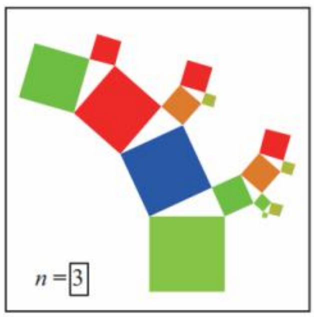


图 5

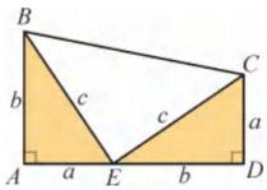
习题13.1

A 组

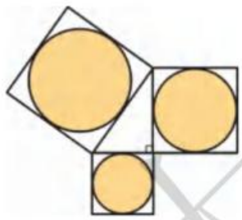
1. 把两个全等的直角三角形拼成如图所示的形状，使点 A、E、D 在同一条直线上．利用此图的面积表示式证明勾股定理．

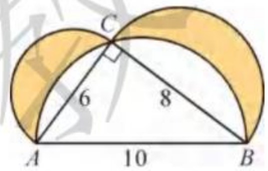
2. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B = 90°$，$AC = 13\,\text{cm}$，$BC = 5\,\text{cm}$．求 AB 的长．

3. 如图，分别以直角三角形的三边为边向外作正方形，然后分别以三个正方形的中心为圆心、正方形边长的一半为半径作圆．试探索这三个圆的面积之间的关系．



（第 1 题）


（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，已知 Rt$\triangle ABC$ 的三边长分别为 6、8、10，分别以它的三边为直径向上作三个半圆．求图中着色部分的面积．

5. 试判断下列各组以 a、b、c 为三边长的三角形是不是直角三角形．如果是，那么哪一条边所对的角是直角？

(1) $a = 25$，$b = 20$，$c = 15$； (2) $a = 1$，$b = 2$，$c = \sqrt{3}$；

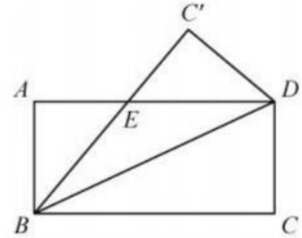
(3) $a = 40$，$b = 9$，$c = 40$； (4) $a : b : c = 5 : 12 : 13$．

B 组

6. 用反证法证明：在一个三角形中，如果两个角不相等，那么它们所对的边也不相等．

7. 人们习惯上以 in① 来计量电视机的大小，通常电视机的大小是以屏幕的对角线长度来衡量的，比如我们所说的 43 in、65 in 等指的就是这个指标．如果 1 in ≈2.54 cm，请你量一下家中电视机屏幕的长和宽，计算出电视机屏幕的对角线长，看看家中电视机是多少英寸的．

8. 如图，长方形 $ABCD$ 沿直线 BD 折叠，使点 C 落在同一平面内的点 C' 处，BC' 与 AD 交于点 E，$AD = 8$，$AB = 4$．求 DE 的长．



（第 8 题）

① in 是单位“英寸”的符号．

13.2 勾股定理的应用

勾股定理能解决直角三角形的许多问题，因此在现实生活和数学中有着广泛的应用.

▶ **例1** 如图 13.2.1，一个圆柱体的底面周长为 20 cm，高 AB 为 4 cm，BC 是上底面的直径．一只蚂蚁从点 A 出发，沿着圆柱的侧面爬行到点 C．求这只蚂蚁爬行的最短路程．（精确到 0.01 cm）

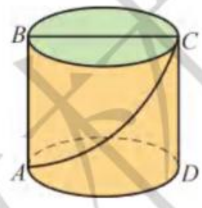


图13.2.1

分析 蚂蚁实际上是在圆柱的半个侧面内爬行，如果将这半个侧面展开（如图 13.2.2），得到长方形 $ABCD$，根据“两点之间线段最短”，所求的爬行的最短路程就是这一展开图——长方形 $ABCD$ 的对角线 AC 的长.

图13.2.2

解 如图 13.2.2，在 Rt△ABC 中，BC = 圆柱体底面周长的一半 = 10 cm．由勾股定理，可得

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 10^2} \\ &= \sqrt{116} \approx 10.77(\text{cm}). \end{aligned}$$

答：这只蚂蚁爬行的最短路程约为 10.77 cm．

▶ **例2** 一辆装满货物的卡车，其外形高 2.5 m，宽 1.6 m，要开进厂门形状如图 13.2.3 所示的某工厂．问：这辆卡车能否通过该工厂的厂门？（厂门上部分为半圆形拱门）

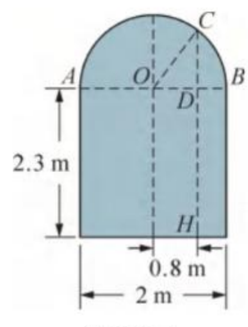


图13.2.3

分析 由于车宽 1.6 m，所以这辆卡车能否通过该工厂的厂门，只要比较距厂门中线 0.8 m 处的高度与车高即可．如图 13.2.3 所示，点 D 在离厂门中线 0.8 m 处，且 $CD \perp AB$，与地面相交于点 H．

解 在 Rt△OCD 中，由勾股定理，可得

$$CD=\sqrt{OC^2-OD^2}=\sqrt{1^2-0.8^2}=0.6,$$

$$CH=CD+DH=0.6+2.3=2.9>2.5.$$

可见高度上有 0.4 m 的余量，因此这辆卡车能通过该工厂的厂门.

做一做

如图 13.2.4，以 Rt△ABC 的三边为边分别向外作正方形．在以 BC 为边所作的正方形中，点 O 是正方形对角线的交点，过点 O 作 AB 的平行线，交正方形于 M、N 两点，过点 O 作 MN 的垂线，交正方形于 E、F 两点，这样把正方形划分成四个形状和大小都一样的四边形．试将图中 5 个着色的图形拼入到上方空白的大正方形中，填满整个大正方形.

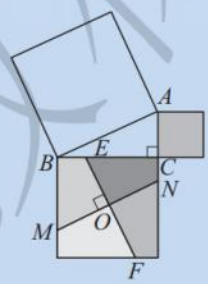
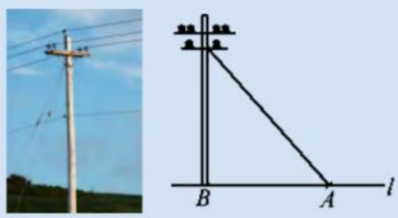


图13.2.4

练习

1. 为了加固电线杆，往往需要给它拉上一条固定于地面的钢缆．如图，从电线杆离地面 5 m 处向地面拉一条 7 m 长的钢缆．求钢缆在地面上的固定点 A 到电线杆底部 B 的距离．(精确到 0.1 m)



(第 1 题)

2. 轮船 A 以 16 kn① 的速度离开港口 O 向东北方向航行，轮船 B 在同时同地以 12 kn 的速度向西北方向航行．求 A、B 两船离开港口 O 1.5 h 后的距离.

---

① kn 是单位“海里/时”的符号.

▶ **例 3** 如图 13.2.5，在 3×3 的方格图中，每个小方格的边长都为 1，请在给定网格中按下列要求画出图形：

（1）画出所有从点 A 出发，另一个端点在格点（即小正方形的顶点）上，且长度为 $\sqrt{5}$ 的线段；

（2）画出所有以小题（1）中所画线段为腰的等腰三角形.

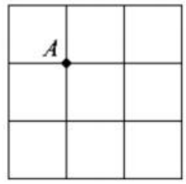


图13.2.5

分析 只需利用勾股定理看哪一条以格点为端点的线段满足要求.

解 （1）如图 13.2.6，AB、AC、AE、AD 的长度均为 $\sqrt{5}$.

（2）如图 13.2.6，$\triangle ABC$、$\triangle ABE$、$\triangle ABD$、$\triangle ACE$、$\triangle ACD$、$\triangle AED$ 就是所要画的等腰三角形.

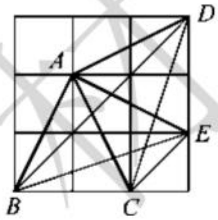


图13.2.6

▶ **例 4** 如图 13.2.7，已知 $CD=6\,\text{m}$，$AD=8\,\text{m}$，$\angle ADC=90^\circ$，$BC=24\,\text{m}$，$AB=26\,\text{m}$. 求图中着色部分的面积.

解 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，

$\because\ AC^2=AD^2+CD^2$

$=8^2+6^2=100$（勾股定理），

$\therefore\ AC=10.$

$\because\ AC^2+BC^2=10^2+24^2=676=26^2=AB^2$，

$\therefore\ \triangle ACB$ 为直角三角形（勾股定理的逆定理）.

$$\therefore\ S_{着色部分}=S_{\triangle ACB}-S_{\triangle ACD}$$

$$=\frac{1}{2}\times10\times24-\frac{1}{2}\times6\times8$$

$$=96(\text{m}^2).$$

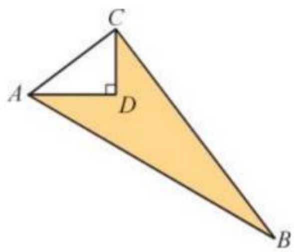


图13.2.7

练习

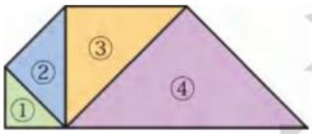
1. 形状为直角三角形的一块铁板的三边长分别为 2 m、4 m、x m，试求出 x 的所有可能值.（精确到 0.01 m）
2. 利用勾股定理，分别作出长度为 $\sqrt{3}$ cm 和 $\sqrt{5}$ cm 的线段.

习题13.2

A 组

1. 现有一张等腰直角三角形卡片，其斜边长为 2 cm．求它的直角边长和斜边上的高．（均精确到 0.1 cm）

2. 如图所示的图形由 4 个等腰直角三角形组成，其中直角三角形①的腰长为 1 cm．求直角三角形④的斜边的长．



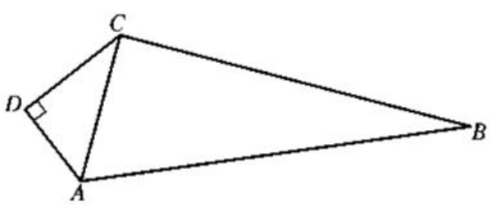
（第 2 题）

3. 如图，为了加固一个高 2 m、宽 3 m 的大门，需在相对角的顶点间加一根木条．求木条的长度．（精确到 0.1 m）

（第 3 题）

4. 已知三角形的三边长分别是 $n+1$、$n+2$、$n+3$．当 n 为多少时，该三角形是一个直角三角形？

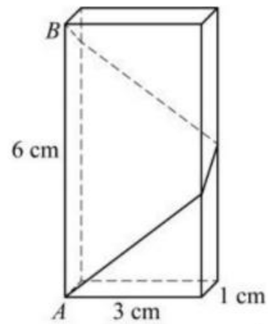
5. 如图，$AD \perp CD$，$AB=13$，$BC=12$，$CD=4$，$AD=3$，$\angle CAB=\alpha$．求 $\angle B$ 的度数．（用 α 表示）



（第 5 题）

B 组

6. 如图，长方体的底面边长分别为 1 cm 和 3 cm，高为 6 cm．如果用一根细线从顶点 A 开始经过 4 个侧面缠绕一圈到达顶点 B，那么所用细线最短需要多少厘米？如果从顶点 A 开始经过 4 个侧面缠绕 2 圈到达顶点 B，那么所用细线最短又需要多少厘米？绕 3 圈呢？绕 n 圈呢？（保留根号）

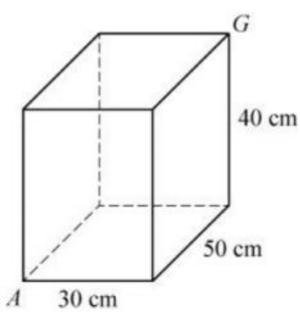


（第 6 题）

7. 如图，某地一条公路旁有两个居民点 C、D，它们各自到公路的垂直距离 CA、DB 分别为 10 km、15 km，公路上的 A、B 两地相距 25 km．现准备在公路上修建一所医院 E，因两地居民需求基本一致，考虑选择合适的地点建造，使得两地到医院的距离相等．试在图上确定医院 E 的建造位置，并求出该医院离 A 地的距离．

（第 7 题）

8. 如图，在长 30 cm、宽 50 cm、高 40 cm 的长方体上，有一只蚂蚁准备顺着长方体的表面从顶点 A 处爬到相对的顶点 G 处．试帮这只蚂蚁设计一条最佳路线，使其爬行的路程最短．



（第 8 题）

数学活动

探索勾股定理的无字证明

在勾股定理的学习过程中，我们已经学会了运用图 1，利用各个图形之间的面积关系，验证著名的勾股定理. 我们还可以如图 2 所示直接将图形适当割补，不用任何文字，验证勾股定理.

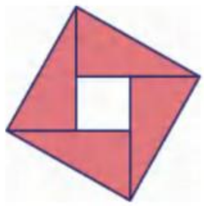


图 1

图 2

这种根据图形直观推论，验证数学规律和公式的方法，简称为“无字证明”.

对于勾股定理，我们还可以找到一些用于“无字证明”的图形，如图 3 和图 4. 你会用这些图形验证勾股定理吗?

图 3

图 4

现在请你和大家一起，查阅教科书和其他相关书籍，或上网查询各种相关的资料. 相信你一定会找到更多有趣的图形来验证勾股定理.

“无字证明”可以用于验证数与代数、图形与几何等领域中的许多数学公式和规律，“无字证明”通过可视化思维体现了数形结合的思想方法.

若有更多兴趣，或许还可以发现更多的数学上的“无字证明”，感悟数学美的魅力!

小结

一、知识结构

二、要点

1. 本章研究了揭示直角三角形三边之间关系的勾股定理和勾股定理的逆定理．勾股定理是一个著名的几何定理，在西方也被称为毕达哥拉斯定理，早在几千年前，我国古代劳动人民就已经发现并开始应用勾股定理了．勾股定理有几百种证明方法，本章主要介绍的是我国古代数学家赵爽的证明方法，这种方法利用了直角三角形面积与正方形面积的关系，数形结合，直观、简洁，体现了我国古代几何学的思想方法．

2. 如果知道了直角三角形任意两边的长，那么应用勾股定理可以计算出第三边的长；如果知道了一个三角形三边的长，也可以利用勾股定理的逆定理判断这个三角形是不是直角三角形．勾股定理可以解决直角三角形中的许多问题，在现实生活中有许多重要应用．

3. 反证法是从反面的角度着手的间接证明方法，即肯定条件而否定结论，从而得出矛盾，使命题获得证明．反证法是数学中常用的证明方法．当命题从正面不容易或不能得到证明时，就可以考虑运用反证法．

复习题

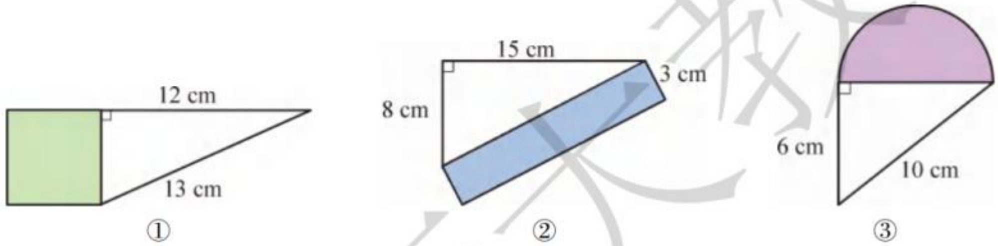
A 组

1. 求下列各图形着色部分的面积：

（1）如图①，着色部分是正方形；

（2）如图②，着色部分是长方形；

（3）如图③，着色部分是半圆（保留 π）.



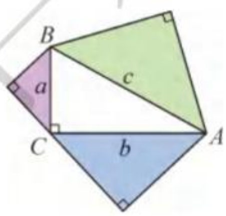
（第 1 题）

2. 如图，以 Rt$\triangle ABC$ 的三边为斜边分别向外作三个等腰直角三角形，试探索这三个等腰直角三角形的面积之间的关系.

3. 试判断由下列三边围成的三角形是不是直角三角形：

（1）三边长分别为 m^2+n^2、mn、m^2-n^2（$m>n>0$）；

（2）三边长之比为 $1:1:\sqrt{2}$.

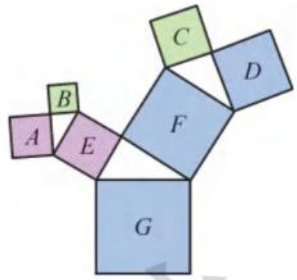


（第 2 题）

（第 4 题）

4. 一架 2.5 m 长的梯子靠在墙壁上，梯子的底部离墙 0.7 m，如果梯子的顶部滑下 0.4 m，梯子的底部向外滑出多远？

5. 在如图所示的图形中，所有的四边形都是正方形，所有的三角形都是直角三角形，其中最大正方形的边长为 7 cm．求正方形 A、B、C、D 的面积和.



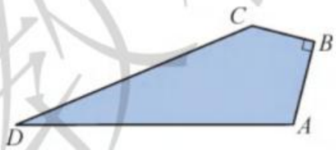
（第 5 题）

6. 在△ABC 中，$AB = AC = 10$，BD 是 AC 边上的高，$DC = 2$. 求 BD 的长.

7. 已知直角三角形的周长为 30 cm，斜边长为 13 cm．求这个三角形的面积.

B 组

8. 如图，有一块四边形地 $ABCD$，$\angle B = 90°$，$AB = 4$ m，$BC = 3$ m，$CD = 12$ m，$DA = 13$ m. 求这块四边形地的面积.



（第 8 题）

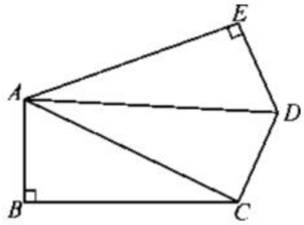
9. 我们已经知道，3、4、5，6、8、10 等都是一些勾股数. 请你再写出其他 5 组勾股数.

10. 试证明一个五边形不可能有 4 个内角为锐角.

11. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB = BC = 2$，$CD = 3$，$DA = 1$，且 $\angle B = 90°$. 求 $\angle DAB$ 的度数.

（第 11 题）

12. 如图，在五边形 $ABCDE$ 中，$\angle B = \angle E = 90°$，$AB = 5$ cm，△ABC 的面积为 30 cm^2，△ACD 与△AED 关于 AD 所在的直线成轴对称. 求 AE 的长.



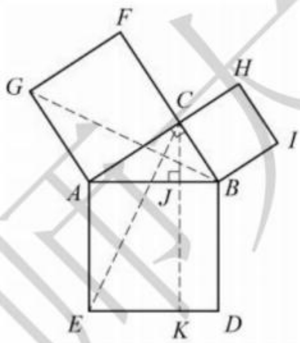
（第 12 题）

C 组

13. 已知$\triangle ABC$的三边长a、b、c满足条件：$a^4-b^4+b^2c^2-a^2c^2=0$. 试判断$\triangle ABC$的形状.

14. 试着用反证法证明勾股定理的逆定理.

15. 欧几里得在《几何原本》中给出了勾股定理的一个证明，其思路是把直角三角形斜边所构成的正方形分割成两个长方形，然后证明每个长方形的面积分别与两个由直角边所构成的正方形的面积相等. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，由 Rt$\triangle ABC$ 的三边分别向外作正方形，过点C作AB的垂线，分别交AB、ED于点J和点K，这样就把正方形$ABDE$分成两个长方形$AJKE$和$BDKJ$. 连结GB、CE. 请试着利用该图形证明勾股定理.



（第 15 题）

16. 折竹抵地（源自《九章算术》）：

今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺. 问折者高几何？

意即：

一根竹子，原高一丈，虫伤有病，一阵风将竹子折断，其竹梢恰好抵地，抵地处离竹子底部 3 尺远. 求折断后竹子离地面的高度.


（第 16 题）

第 14 章　数据的收集与表示

长时间看屏幕对眼睛不好，那么通常来说，大家每天看屏幕的时间是多少呢？看屏幕多长时间会安排休息呢？一些手机自带“护眼模式”，是否开启它就没事了？国家卫生健康委员会对儿童青少年科学、规范、合理地使用电子产品有什么建议？

★　本章将在通过统计活动解决问题的过程中，学习收集数据的一些基本方法，并在此基础上继续学习制作和应用统计图表直观形象地描述数据，从中发现数据蕴含的信息.

14.1　数据的收集

1. 数据有用吗

问题1　你喜欢看球赛吗？有没有注意过解说员是怎样点评一场球赛的？

解说员常常在比赛间隙对双方的表现进行评价，比如，领先的队为什么能取得优势，落后的队问题出在哪里，教练是否应该调整比赛策略，等等.

通常，在比赛开始之前，解说员会准备一些双方球队的数据资料，比如，每位队员的身高、体重、年龄以及球队以往的战绩等；另外，还会准备一份用于记录本场比赛攻守情况的统计表格.

2022 年中国女足时隔 16 年重夺亚洲杯冠军！表 14.1.1 是 2022 女足亚洲杯决赛双方技术统计表. 图 14.1.1 是 2022 女足亚洲杯决赛实时赛况.

表14.1.1　2022 女足亚洲杯决赛双方技术统计表

	中国	韩国
最终得分	3	2
控球率	59.9%	40.1%
射门次数	14	11
射正球门	6	5
角球	1	5
黄牌	3	0
红牌	0	0

图14.1.1　2022 女足亚洲杯决赛实时赛况

分析图表中的数据，思考中国队最终为什么能够战胜韩国队.

从整场比赛来看，中国队的控球率和射门次数都高于对方．这些良好的技术指标，来自中国女足的奋力拼搏！面对先失两球的逆境，“铿锵玫瑰”依然敢拼敢赢，实现反超，最终夺得冠军！

问题 2　表 14.1.2 汇总了最近四次全国人口普查所获得的我国各省市自治区(不含港澳台地区)关于家庭户人口变化的一些数据．所谓“家庭户”，是指“以家庭成员关系为主、居住一处共同生活的人组成的户”．回望过去三十余年，说说你从该表中读出了哪些信息？这样的数据信息有用吗？

表14.1.2　最近四次全国人口普查关于家庭户人口数据一览表

次序(年份)	第四次(1990)	第五次(2000)	第六次(2010)	第七次(2020)
家庭户数/万户	27 695	34 837	40 152	49 416
平均每个家庭户的人口数	3.96	3.44	3.10	2.62

(数据来源：国家统计局网站)

很明显，在过去三十余年中，我国家庭户的数量一直在增加，但是平均每个家庭户的人口数却在一路下滑，从 1990 年的 3.96 人降为 2020 年的 2.62 人.

我们看到，每年春运潮都会如期而至，那么多人赶去与家人团聚过年，感受其乐融融大家庭的温暖；我们还看到，哪怕与父母同在一个城市生活，不少年轻人工作或者结婚后也会从父母家搬出来，自己另立门户．

全国人口普查得到的数据能够让我们感受到家庭户增多、家庭规模缩小这一社会现象，从数量上更好地认识基本国情，从而把握社会变迁的趋势，便于国家民政部门科学地管理、解决诸如“空巢老人”“单身社会”“少子化”等现实问题，同时，相关的数据信息也会为众多行业的生产与发展提供指导．

像全国人口普查这样为特定目的而对所有考察对象作的全面调查叫做**普查**，但是其工作量极大，我国一般每十年进行一次．据报道，为完成 2020 年的人口普查工作，全国省、市、县、乡、村共组建了 67.9 万个普查机构，选聘了 700 多万名普查人员．

为特定目的而对部分考察对象作的调查叫做**抽样调查**．我国一般每五年进行一次全国 1% 人口的抽样调查，它是指从全国总人口中抽取 1%，然后对这部分人进行调查．

我们把所要考察的对象的全体叫做**总体**(population)，把组成总体的每一个考察对象叫做**个体**(individual)．从总体中取出的一部分个体叫做这个总体的一个**样本**(sample)．一个样本包含的个体的数量叫做**样本容量**(sample size)．

例如人口普查中，当考察我国人口年龄构成时，总体就是所有具有中华人民共和国国籍并在中华人民共和国境内常住人口的年龄，个体就是符合这一条件的每一个公民的年龄，符合这一条件的所有北京市公民的年龄就是一个样本．

普查和抽样调查分别是通过调查总体和样本的方式来收集数据的，当调查会给考察对象带来损伤或破坏时，当人力、物力、时间等条件受限时，抽样调查都是更好的选择．

请举出一些需要抽样调查的例子．

与普查相比，抽样调查的工作量减少很多，但是如果样本选择不合适，那就会影响调查结果的质量．

例 1 老师布置给每个小组一个任务：用抽样调查的方法估计全班学生的平均身高．坐在教室最后排的小亮为了争速度，立即就近对他周围的 3 位同学作调查，计算出他们 4 个人的平均身高后，就举手向老师示意已经完成任务了．他这样选择样本合适吗？

分析 因为小亮他们 4 个人坐在教室靠后面的位置，所以他们身高的平均数就很可能会大于整个班级学生身高的平均数，这样，样本就不具有代表性了．

你调查的对象在总体中必须要有代表性．

例 2 在投掷正方体骰子时，同学甲说：“6，6，6……啊！真的是 6！你只要一直想某个数，就会掷出那个数．”

同学乙说：“不对，我发现我越是想要某个数就越得不到那个数，倒是不想它反而会掷出那个数．”

这两位同学的说法正确吗？

分析 这两位同学的说法都不正确．因为几次经验说明不了什么问题．

你的样本容量要足够大．

例 3 小强想了解所在地区每个家庭使用智能语音控制家电的情况．为此，他和同学一起，调查了全校每个学生所在家庭使用的智能语音控制家电的数量．

分析 这样抽样调查是不合适的．虽然他们调查的人数很多，但是因为排除了他们所在地区那些没有中学生的家庭，所以调查结果不能推广到所在地区的所有家庭．

仅仅增加调查人数不一定能够提高调查质量．

这道例题提醒我们，在开展调查之前，要仔细检查总体中的每一个个体是否都有可能成为调查对象．

要使样本具有代表性，不偏向总体中的某些个体，有一个对每个个体都公平的办法，那就是用抽签的办法决定哪些个体进入样本．统计学家称这种理想的抽样方法为**简单随机抽样**(simple random sampling)．

练习

1. 下列调查中哪些是用普查方式，哪些是用抽样调查方式来收集数据的?
   (1) 为了解你们班的每位同学所穿鞋子的尺码情况，对全班同学作调查;
   (2) 为了解你们学校八年级同学所穿鞋子的尺码情况，对你们班的全体同学作调查;
   (3) 为了解你们班的同学每天的睡眠时间，在班上每个小组中各选取 2 位同学作调查;
   (4) 为了解你们班的同学每天的睡眠时间，选取班上学号为偶数的所有同学作调查.
2. 判断下面两个抽样调查选取样本的方法是否合适，并说明理由:
   (1) 某手表厂想要了解 6～11 岁少年儿童戴手表的比例，周末来到一家业余艺术学校，对在那里学习的 200 名学生进行调查;
   (2) 为调查某省的环境污染情况，调查该省省会城市的环境污染情况.

日常生活中，我们还会碰到各种各样的问题，如:

(1) 家庭教育是儿童青少年健康发展的起点和基础. 家长对孩子的期望会从他们对孩子某些方面的关注体现出来. 那么，同学们认为家长最关注我们什么? 我们最希望家长关注我们什么? 我们的家长又认为他们最关注我们什么? 这些期望与需求之间互相匹配吗?

(2) “同月同日生” 这样的缘分应该很难得吧，你们班有同月同日出生的同学吗?

(3) 许多人认为鹌鹑蛋比鸡蛋更有营养，实际是这样吗?

(4) 在我国，哪种癌症是目前最常见的癌症? 它是目前死亡人数最多的癌症吗? 从全球来看呢?

(5) 一些手机自带 “护眼模式”，大家对它的护眼作用是怎么看的?

(6) 豌豆荚里的豆子粒数不确定，那么豆子粒数有规律吗?

(7) 媒体报道说，上海于 2021 年国内生产总值(Gross Domestic Product，简称 GDP)超越伦敦和巴黎，历史性首次进入世界城市前五强. 如果以省市自治区(不含港澳台地区)为统计单位，那么，我国各地人均 GDP 的整体情况如何?

各地差异大吗?

请从上述问题中挑选一个，进行调查，并记录调查中收集到的数据.

要解决以上问题，与研究女足比赛和人口问题一样，离不开调查中得到的数据．数据有助于我们发现一些有趣的现象和事实，进而作出合理的判断.

收集数据有两种基本方法：一是经过亲自调查获取一手数据，如通过调查周围的人，询问他们认为开启手机“护眼模式”前后，各打算多久安排一次眼睛的间歇休息等问题来回答上述问题(5)；二是经过查阅文献等从现有、可用的数据资料中检索需要的二手数据，如通过访问国家统计局网站，获取我国 31 个省市自治区(不含港澳台地区)的人均 GDP 数据来回答上述问题(7).

2. 亲自调查获取一手数据

以调查手机“护眼模式”的作用效果为例，让我们回顾一下通过调查收集数据的过程.

第一步：明确调查问题——大家对手机“护眼模式”的认识与使用情况，对“护眼模式”作用的认识.

第二步：确定调查对象——周围的人，如同学、家长、邻居等.

第三步：选择调查方法——如直接询问调查对象对调查问题的看法，即访谈调查法；或者事先确定若干要求调查对象回答的问题，组成一份问卷请调查对象作答，待调查对象答完后再收回问卷，即问卷调查法.

第四步：展开调查——以采用访谈调查法为例，可向调查对象说明调查目的，征得对方同意；询问、听取并记录调查对象对所提问题的回答．如：(1) 向调查对象简单介绍一下什么是手机的“护眼模式”，征得对方同意后开始提问．(2) 收集调查对象的基本信息．(3) 询问调查对象了解与使用“护眼模式”的情况．(4) 询问调查对象认为开启“护眼模式”后，持续看屏幕多长时间需要安排一次休息；如果不开启“护眼模式”，多长时间需要安排一次休息．可以将数据记录在类似表 14.1.3 这样的表格中.

表14.1.3　调查数据记录表

序号	性别	年龄段		了解与使用“护眼模式”情况				多久安排间歇休息	
		不满18岁	18岁以上	不知道也没用过	知道但不用	有时用	总是用	开启后	不开启

第五步：分析数据——汇总全班同学收集到的数据，围绕调查问题，整理、分析数据. 我们用**频数**(frequency)这个词来表示每个对象出现的次数，用**频率**(relative frequency)这个词来表示每个对象出现的次数与各对象出现的总次数的比值(或者百分比). 很明显，频数和频率都能反映每个对象出现的频繁程度. 例如，我们可以统计“知道但不用‘护眼模式’”的人数(统计频数)，计算“知道但不用‘护眼模式’”的人占比多少(计算频率)，以及那些认为开启“护眼模式”后，持续看屏幕的时间可以至少增加一倍的人占比多少，等等.

第六步：得出结论——如，调查对象了解与使用“护眼模式”的情况如何，不同年龄段的调查对象对“护眼模式”的使用习惯是否差不多，他们对手机“护眼模式”作用效果的看法可以分为哪几类，持不同看法的人占比各是多少，等等.

思考　频数和频率都能反映每个对象出现的频繁程度，请举例说明两者在使用上的异同点.

读一读

我们知道，π 是一个无限不循环小数. 2021 年，据媒体报道，利用现有的超级计算机，计算一百多天后，人类可以将 π 的计算精确到小数点后六十万亿位，而且这一世界记录还在持续受到挑战.

从实用的角度说，利用计算机所得到的圆周率值并没有什么意义，但这个计算是对计算机性能的挑战．也有人试图在圆周率值中寻找某种规律，从而对圆周率，进而对无理数的认识有所启迪．下面两张表(表14.1.4 和表 14.1.5)就给同学们一些这样的体验．

表14.1.4　圆周率小数部分中各数字出现的频数

数字	$1\sim10^6$	$1\sim10^7$	$1\sim10^8$	$1\sim10^9$
0	99 959	999 440	9 999 922	99 993 942
1	99 758	999 333	10 002 475	99 997 334
2	100 026	1 000 306	10 001 092	100 002 410]
3	100 229	999 964	9 998 442	99 986 911
4	100 230	1 001 093	10 003 863	100 011 958
5	100 359	1 000 466	9 993 478	99 998 885
6	99 548	999 337	9 999 417	100 010 387
7	99 800	1 000 207	9 999 610	99 996 061
8	99 985	999 814	10 002 180	100 001 839
9	100 106	1 000 040	9 999 521	100 000 273

(注：表中第 2 行第 2 列的数“99 959”表示在 π 的小数点后 10^6 位当中，数字“0”出现了 99 959 次，其他数的含义以此类推)

表14.1.5　圆周率小数部分中特殊数字串首次出现的位置

特殊数字串	出现位置	特殊数字串	出现位置
111111	第 255 945 位	666666	第 252 499 位
222222	第 963 024 位	777777	第 399 579 位
333333	第 710 100 位	888888	第 222 299 位
444444	第 828 499 位	999999	第 762 位
555555	第 244 453 位	123456	第 2 458 885 位

3. 检索文献获取二手数据

国内生产总值(GDP)是国民经济核算的核心指标之一，也常被用来衡量一个国家或地区的经济状况和发展水平. 假如我们想知道2021年我国31个省市自治区(不含港澳台地区)人均GDP的整体情况，那么我们需要借助国家统计局网站，获取二手数据来解决问题.

打开国家统计局网站首页，进入“数据查询”部分的“中国统计年鉴”，选择2021年，在左侧目录中选取“3－9地区生产总值(2021年)”，即可查询到我国31个省市自治区(不含港澳台地区)2021年相应的人均GDP数据. 按人均GDP数据大小进行排序，将相关数据制成表14.1.6.

表14.1.6　2021年我国31个省市自治区(不含港澳台地区)的人均GDP

地区序号	人均GDP/元	地区序号	人均GDP/元	地区序号	人均GDP/元
1	183 980	12	75 360	23	57 686
2	173 630	13	70 321	24	56 831
3	137 039	14	69 440	25	56 398
4	116 939	15	65 560	26	55 450
5	113 732	16	65 026	27	54 172
6	113 032	17	64 821	28	50 808
7	98 285	18	64 326	29	49 206
8	86 879	19	63 707	30	47 266
9	86 416	20	62 549	31	41 046
10	85 422	21	61 725		
11	81 727	22	59 410		

数据表明，2021年，位于全国31个省市自治区(不含港澳台地区)之首的两个地区的人均GDP均超过了17万元. 我国各地经济发展水平差距较大，处于末位的地区2021年人均GDP约为4.1万元. 总的来说，人均GDP在6万元以下的地区较多，占比近三分之一. 人均GDP在7万元以下的地区有18个，占比达

58%，但人均 GDP 为 14 万元至 16 万元是一段空白，表明这是一个比较高的台阶.

由于各地的自然资源不均衡，造成它们的经济发展水平存在较大的差距. 尽管如此，随着改革开放的深入，各地都在不断发展. 据中国政府网 2022 年 1 月报道，经初步测算，2021 年世界人均 GDP 是 1.21 万美元左右，而我国是 1.25 万美元左右，已超过世界人均 GDP 水平.

阅读材料

谁是《红楼梦》的作者

我国有一部古典文学名著《红楼梦》，虽然书的封面上通常印有曹雪芹(约 1715—约 1763)和高鹗(约 1738—约 1815)两位作家的名字，但是它的作者究竟是谁，现在还是一个谜.

一些研究者试图通过统计和分析小说前 80 回和后 40 回的遣词造句，看前后两部分在写作手法上是否相似来推断《红楼梦》的作者. 例如，20 世纪 60 年代，有学者选定一些动词和副词短语，编制成索引，结果发现前后两部分用法迥然相异的例子远比相同的例子多，加上其他佐证，于是认为小说前后两部分不会出自同一作者的手笔.

计算机的广泛应用使这样的分析得以全面而深入地开展. 1980 年，有学者按章回顺序将《红楼梦》的 120 回分成 A、B、C 三组，并将《儿女英雄传》作为 D 组，用随机抽样的方法对每组的用词进行统计分析，结果发现前三组用词接近，而第四组差异明显，从而得出后 40 回也出自曹雪芹之笔的结论. 1987 年，又有学者从小说版本的选取、统计范围、考察项目的数量上对上述研究加以改进，最终得出后 40 回并非曹雪芹所作，但其中前半部分含有曹雪芹少量残稿的结论. 同年，另一位学者打破陈规，不对小说作者进行任何假定，把全书各章回作为 120 个不同对象进行统计分析，提出了不能笼统地认为前 80 回为一人所写、后

40 回为另一不相干的人所写等全新的看法.

使用数学方法来研究文学作品的著作权问题有趣又有用，但由于《红楼梦》流传至今有许多不同的版本，在传承过程中还存在残缺、抄录错误、改写等问题，因此选用哪个版本进行比较、比较什么、怎样比较，最终都会影响到统计的精确性和结论的科学性，这也是至今对“谁是《红楼梦》的作者”仍没有定论的原因.

习题14.1

A 组

1. 下列调查中哪些是用普查方式，哪些是用抽样调查方式来收集数据的？请指出其中抽样调查的总体和样本.

   (1) 为了解你们班的每位同学星期五、星期六晚上的睡眠时间，对全班同学作调查；

   (2) 为了解世界上一些国家的学生解决现实问题的能力，经济合作与发展组织(OECD)牵头，定期对参与评估项目的国家或地区的部分 15 岁学生实施“国际学生评估项目”(PISA)测试；

   (3) 为了解某商品促销广告中所称中奖率的真实性，某人买了 100 件该商品，调查其中奖率.

2. 请指出下列哪些调查不适合作普查而适合作抽样调查：

   (1) 了解夏季冷饮市场上冰激凌的质量情况；

   (2) 审查书稿中有哪些科学性错误；

   (3) 研究父母与孩子交流的时间量与孩子性格之间是否有联系；

   (4) 了解一个打字训练班学员的训练成绩是否都达到了预定训练目标.

3. 一天，家里来了一位陌生客人，平时活泼好动的小丽在客人面前却表现得特别安静. 小丽这一天的表现有代表性吗？如果这位客人以小丽这天的表现来评价小丽的性格的话，是否合理？

4. 设计一张记录全班同学身高、体重的统计表格，并向班上每位同学收集数据，填入所设计的表格中.（注意保存好数据以备用）

5. 挑选一个你感兴趣的城市，调查一下它这两个月来每天的最高(或最低)气温，其中最高(或最低)的温度是多少度？这两个月中有几天达到这个温度？这两个月每天的最高(或最低)气温中哪个温度出现得最多(频数最大)？有几天达到这个温度？它出现的频率是多少？

6. 查询最近 20 年我国的 GDP 数据，并用统计图表描述这一历史变化过程，说说你从数据中获得的信息.

B 组

7. 下表是某年 CBA 总决赛某场赛后公布的统计结果. 从表中的数据看，你认为 XJ 队最终为什么能够战胜 GD 队？请再举出一个可以用数据说话的例子.

	XJ	GD
最终得分	118	85
二分球	30/47	22/37
二分球命中率	64%	59%
三分球	11/24	8/32
三分球命中率	46%	25%
罚篮	25/29	17/26
罚篮命中率	86%	65%
进攻篮板	14	20
防守篮板	16	15
快攻	3/3	4/4
扣篮	2	3
盖帽	3	3
助攻	17	8
失误	18	22

8. 下面是从《中华人民共和国 2021 年国民经济和社会发展统计公报》中摘录的一张比较复杂的统计表，显示的是我国 2021 年末人口数及其构成．请说明表中被圈起来的数字分别表示什么意思．

	年末人口数/万人	比重/%
全国人口	141 260	100.0
其中：城镇	91 425	64.7
乡村	49 835	35.3
其中：男性	72 311	51.2
女性	68 949	48.8
其中：0～15 岁（含不满 16 周岁）	26 302	18.6
16～59 岁（含不满 60 周岁）	88 222	62.5
60 周岁及以上	26 736	18.9
其中：65 周岁及以上	20 056	14.2

9. 请指出下列哪些调查的样本缺乏代表性：

（1）在大学生中调查我国青年业余时间娱乐的主要方式；

（2）在公园里调查老年人的健康状况；

（3）调查一个班级里学号为 3 的倍数的学生，以了解该班学生对班主任老师某项新举措的意见和建议；

（4）某环保网站对“支持商店使用环保购物袋的程度”进行在线调查．

10. 将一张纸裁成 4 张完全相同的小纸片，依次给它们标上 1、2、3、4 这四个号码，折叠好，放入一个盒中摇匀．闭上眼睛取出一张，记录下它的号码，折叠好，重新放回盒中摇匀后再取．这样重复取 20 次，将你得到的结果填入下表．

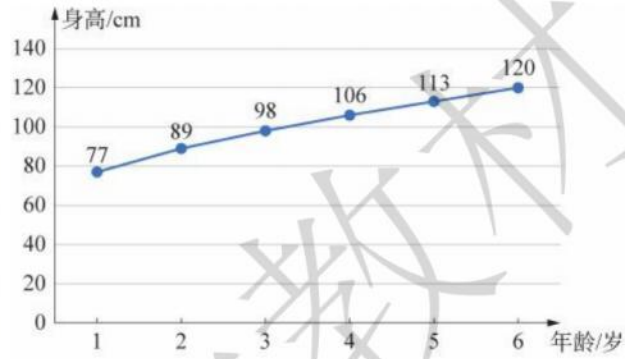
号　码	1	2	3	4
频　数				
频　率				

根据表中的数据，请尽可能多地列出你的发现和猜测．如果有兴趣，还可以再重复取 20 次，甚至 40 次，检验一下你猜想的结论是否总是正确的．

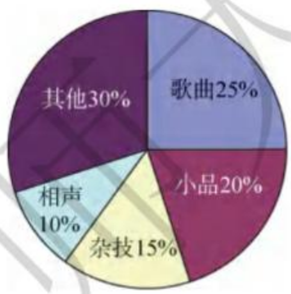
14.2 数据的表示

我们在小学阶段已经学过一些统计知识，也曾见到过类似如图 14.2.1 所示的统计图.

中国健儿在两届奥运会上获得的奖牌数



小文 1～6 岁身高变化



六年级学生最喜欢的文艺节目

图14.2.1　各类统计图

上图包括**条形统计图**(bar chart)、**折线统计图**(broken line graph)和**扇形统计图**(pie chart).

条形统计图是用宽度相同的条形的高低或长短来表示数据特征的统计图，它可以直观地反映出数据的数量特征. 如果有两个研究对象，常常把它们相应的数据并列表示在同一幅条形统计图中.

折线统计图是用折线表示数量变化规律的统计图. 如果关注的是某种现象随时间变化而发生的变化，常常以时间为水平放置的数轴，以折线的起伏直观地反映出数量随时间所发生的相应变化.

扇形统计图是用整个圆代表所研究的总体，用圆中各个扇形代表组成总体

的各个部分的统计图．它可以清晰地呈现总体中各部分所占百分比的多少．

现在让我们进一步认识统计图，直观地描述数据．我们先学习频数分布直方图，再学习制作扇形统计图，最后辨识一些容易误导读者的统计图．

1．频数分布直方图

问题1　20 位同学的立定投篮比赛成绩记录如图 14.2.2 所示．

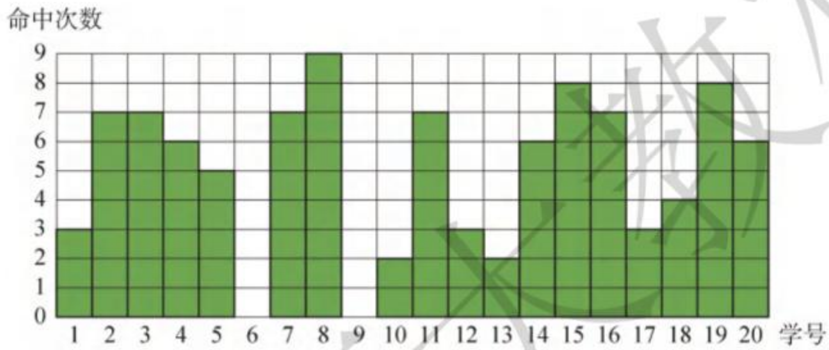


图14.2.2　20 位同学立定投篮命中次数

请从图中读取以下信息：

（1）7 号选手命中几个球？

（2）谁命中的次数最多，谁命中的次数最少？

（3）谁与 14 号选手的投篮成绩一样？

（4）有几个人命中了 6 个球？

如果学校有 5 个篮球架，要按投篮成绩把这 20 位同学分成 5 组分别训练，分组方案如表 14.2.1 的第一行所示，读懂了图 14.2.2，我们不难完成表 14.2.1 的第二行和图 14.2.3．

表14.2.1　分组方案及各组人数

命中次数 x	$0 \leqslant x < 2$	$2 \leqslant x < 4$	$4 \leqslant x < 6$	$6 \leqslant x < 8$	$8 \leqslant x < 10$
各组人数（频数）	2	5	2	8	3

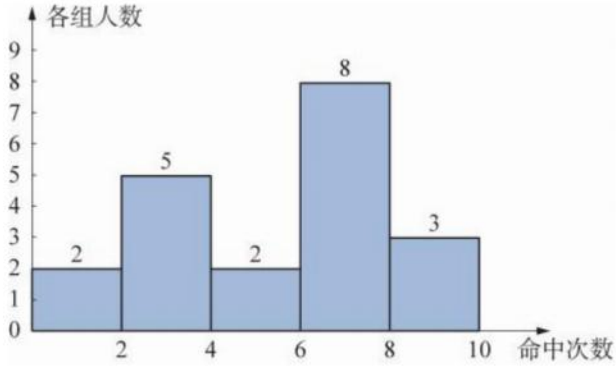


图14.2.3　按命中次数分组后的各组人数①

20 位同学的整体投篮水平分布情况一目了然.

思考　图 14.2.2 和图 14.2.3 描述的是同样的数据，它们是为便于回答不同类型的问题而设计的，请针对图 14.2.3 也提出几个问题来考考你的同伴.

为了解这 20 位同学的整体投篮水平，像表 14.2.1 那样，把这 20 位同学投篮的命中次数 x 分为相连的等长的 5 段，再清点命中次数落在各段上的人数（即频数），这样得到的统计表被称为**频数分布表**(frequency distribution table)，相应的统计图被称为**频数分布直方图**(frequency distribution histogram)，它们可以直观地显示数据的分布情况，比如哪一段上人数（频数）最多或最少，数据集中于哪里，分布是否对称，等等. 与条形统计图不同，画频数分布直方图之前先要将统计数据等距地分成相连的若干组，所以直方图的长条之间是没有空隙的.

问题 2　表 14.1.6 显示了 2021 年我国 31 个省市自治区（不含港澳台地区）人均 GDP 的数据. 试据此设计一张频数分布表和相应的频数分布直方图来考察 2021 年我国 31 个省市自治区（不含港澳台地区）人均 GDP 的整体情况及差异.

解　第一步，先准备好表 14.1.6，求出各地区人均 GDP 的最大值与最小值之差，即

$$183\,980-41\,046=142\,934(\text{元}).$$

① 本教科书中，在不作说明的情况下，每组的起点值属于本组，每组的终点值属于下一组.

第二步，决定组数和组距.

通常情况下，我们可以将数据分为5～12组. 这里，各地区人均GDP的差距较大，超过14万元，所以我们考虑多分几组，比如分10组. 组距是每组两个端点值的差，即

$$\frac{142\,934}{10}=14\,293.4(\text{元}).$$

为方便计算，这里不妨取整，将组距定为1.5万元.

第三步，确定分点，列出频数分布表.

分组必须涵盖所有的值，所以第一组的左端点要比最小值略小一点，比如可以定为4.1万元，最后一组的右端点则要比最大值略大一点. 表14.2.2中，$4.1 \leqslant x < 5.6$表示第一组包括所有人均GDP大于或等于4.1万元但小于5.6万元的省市自治区，其他组的含义可类推. 数出各组所含的地区个数(频数)，即可完成频数分布表14.2.2.

表14.2.2　2021年我国31个省市自治区(不含港澳台地区)人均GDP的频数分布表

人均GDP x/万元	频数	人均GDP x/万元	频数
$4.1 \leqslant x < 5.6$	6	$13.1 \leqslant x < 14.6$	1
$5.6 \leqslant x < 7.1$	13	$14.6 \leqslant x < 16.1$	0
$7.1 \leqslant x < 8.6$	3	$16.1 \leqslant x < 17.6$	1
$8.6 \leqslant x < 10.1$	3	$17.6 \leqslant x < 19.1$	1
$10.1 \leqslant x < 11.6$	2		
$11.6 \leqslant x < 13.1$	1		

第四步，画频数分布直方图.

横轴是人均GDP，纵轴是每组的频数. 这样就得到了直观形象的频数分布直方图14.2.4.

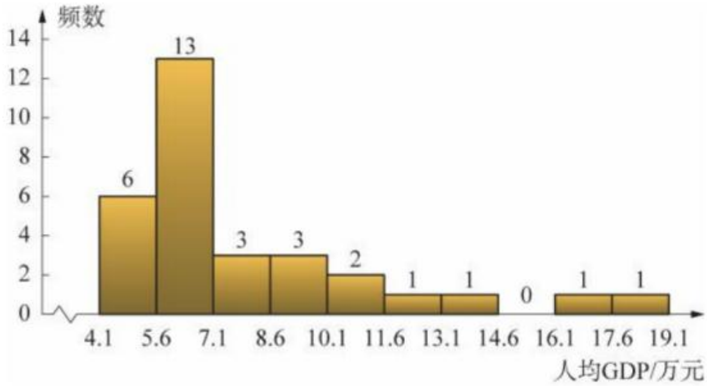


图14.2.4　2021 年我国 31 个省市自治区(不含港澳台地区)人均 GDP 的频数分布直方图

因为不是从 0 开始的，所以前面画了一段折线，表示 0～4.1 万元这一段被折叠了.

思考　根据上述频数分布直方图，回答以下问题:

① 哪一组含有的地区数最多？该组人均 GDP 范围是什么？

② 哪一组频数最小？该组人均 GDP 的范围是什么？

③ 人均 GDP 小于 7.1 万元的地区有多少个？它们占总体的百分数是多少？

④ 2021 年 31 个省市自治区(不含港澳台地区)人均 GDP 整体上是如何分布的？对称吗？集中在哪个范围内？

⑤ 如果等距分组的方案 1 是分 10 组，方案 2 是只分 5 组，那么这两种分组方案所画出的频数分布直方图，其外观会改变吗？画一画，体会一下增、减组数对了解分布的整体形态的影响.

我们发现，频数分布直方图能够直观、形象地反映大量数据整体的分布形态，如数据是否集中、分布是否对称等. 画直方图的关键步骤是确定组数和组距，它们与数据的分散程度、问题情境、数据分析对精度的要求等因素有关，没有统一的答案. 可以进行尝试，找出满意的分组方案. 因为是等距分组，所以直方图中每个小长方形的宽度都相等，是一个距离单位，高度则是频数.

练习

2021 年，中国科学院新增院士 65 位(不含外籍院士)，他们当年的年龄统计如下：

59，48，60，59，56，　58，56，59，56，63，
51，57，56，63，64，　62，56，57，60，53，
53，57，58，65，49，　57，46，58，63，57，
55，62，58，63，56，　62，58，45，56，53，
55，58，51，53，59，　58，68，56，59，55，
56，61，59，56，57，　55，58，56，52，63，
62，56，67，56，64．

请根据以上数据绘制相应的频数分布表和频数分布直方图．

2. 扇形统计图

问题 3　就长时间持续看屏幕后感觉最不舒服的一个症状，一些同学在汇报他们的调查结果时，画了下面这张海报，如图 14.2.5 所示．

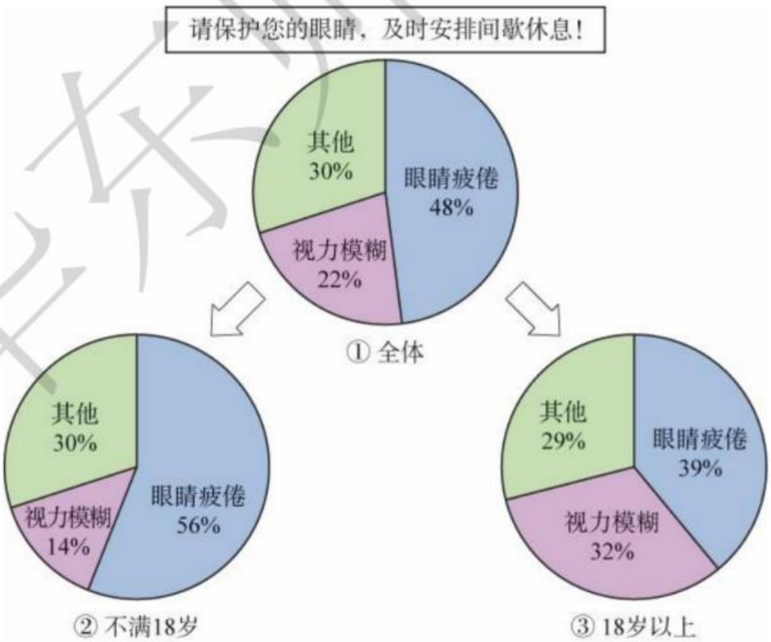


图14.2.5　长时间持续看屏幕后感觉最不舒服的症状

图中各个扇形分别代表什么？人们长时间持续看屏幕后感觉最不舒服的症状是什么？对于不同年龄的人群，情况有没有不同？

图①显示长时间持续看屏幕后感觉眼睛疲倦的占 48%，而图②显示占 56%，这是否意味着图②中感觉眼睛疲倦的人数一定大于图①中感觉眼睛疲倦的人数呢？

图中各个扇形统计图给我们提供了不少与长时间持续看屏幕后不适感受相关的信息.

以“眼睛疲倦”为例，从图①相应的扇形可以看出，被调查者中感觉眼睛疲倦的人在全体被调查人群中所占比例为 48%．图②和图③则进一步说明：在不满 18 岁的人群中，这一比例高达 56%；而在 18 岁以上的人群中，这一比例为 39%.

在全体被调查人群以及不同年龄段的人群中，“眼睛疲倦”都是人们长时间持续看屏幕后感觉最不舒服的症状.

需要注意的是，不同的两个扇形统计图，如果它们的总体数量不相等，那么占比大的那个部分的数量并不一定也大，例如图②中那 56%的人数就一定少于图①中那 48%的人数，因为图①中 48%的人是所有感觉眼睛疲倦的人，而图②中 56%的人则只是其中那些不满 18 岁的人，部分的数量一定少于全体的数量.

思考 图 14.2.5 所示的每个圆中所有扇形表示的百分比之和为多少？图 14.2.6 呈现了图 14.2.5 中的一个圆心角，请量出图 14.2.5 中所有 9 个圆心角的度数.

同一个扇形统计图中各扇形圆心角的大小与该扇形上所标的相应百分比之间有什么关系？如果不用量角器测量，你能根据百分比计算各个圆心角的度数吗？

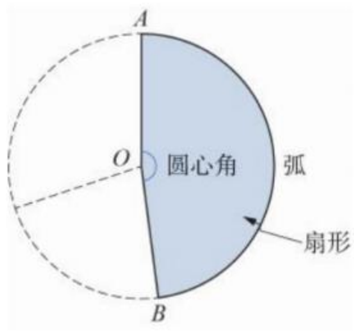


图14.2.6

我们知道，扇形统计图中，整个圆表示所研究的总体，圆内各个扇形表示组成总体的各个部分，扇形圆心角的大小反映出各个组成部分的数量占总体数量的百分比.

这样整个圆就是100%，即360°相当于100%. 如果知道某一扇形的圆心角的度数，那么按比例，就可以求出该圆心角所对应的这一部分应占全体的百分比大小；反之，由百分比的大小也可以求出所对应的扇形圆心角的度数.

问题 4 国家统计局在2010年和2020年对全国人口进行了普查，不同年龄段的人口数如表14.2.3所示. 完成该表，并制作两张扇形统计图来分别描述这两年各年龄段的人口数占总人口数的百分比，再说说制作扇形统计图的步骤.

表14.2.3 全国人口年龄结构表

年龄段	2010年			2020年		
	人口数/万人	占比	扇形圆心角的度数	人口数/万人	占比	扇形圆心角的度数
0～14岁	22 259	16.6%		25 277		
15～64岁	99 898			96 871		
65岁及以上	11 934			19 064		
总计	134 091			141 212		

（数据来源：国家统计局网站）

为制作2010年人口年龄结构扇形统计图，先计算各年龄段的人口数占总人口数的百分比. 如0～14岁的人口数占总人口数的百分比为

求百分比.

$$22\,259 \div 134\,091 \approx 16.6\%,$$

再计算各扇形圆心角的度数，如0～14岁这个扇形的圆心角的度数为

算圆心角.

$$360^\circ \times 16.6\% \approx 60^\circ.$$

在如图 14.2.7 所示的扇形统计图中依次画出了三个扇形，试着标记其中两个空白扇形对应的名称和百分比，完成该扇形统计图的制作.

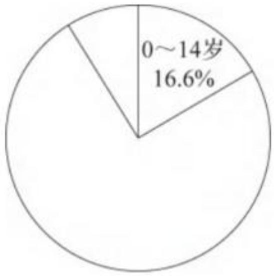


图14.2.7　2010 年全国人口年龄结构的扇形统计图

画扇形、作标记.

如果条件允许，请学习本章的“信息技术应用”栏目，尝试用计算机中的电子表格软件制作扇形统计图，看看是不是又快又方便.

练习

根据下表，你能用扇形统计图把各大洲的面积占世界陆地总面积的百分比表示出来吗？有条件的话，请尝试用计算机中的电子表格软件画图.（精确到 0.1%）

七大洲的面积

洲　名	亚洲	非洲	欧洲	北美洲	南美洲	大洋洲	南极洲
土地面积/万平方千米	4 400	3 020	1 016	2 422.8	1 785	897	1 400

3. 容易误导读者的统计图

简洁的统计表和形象的统计图可以在决策过程中帮助我们得到很多有用的信息，比如，最小值和最大值是多少，发展变化的趋势和快慢程度如何，等等.

不过，形象的统计图如果画得不规范也会给人留下不真实的印象. 这里，我们提醒大家注意几种容易误导读者的统计图.

问题 5　一则广告说：据调查，使用本厂牙膏可以较大地降低蛀牙率，并以图 14.2.8 示意其调查得到的数据.

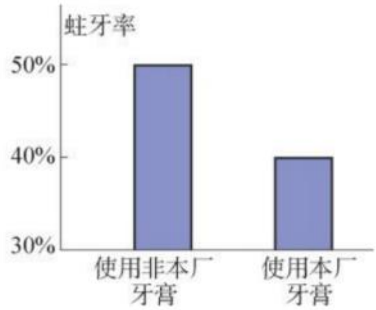


图14.2.8

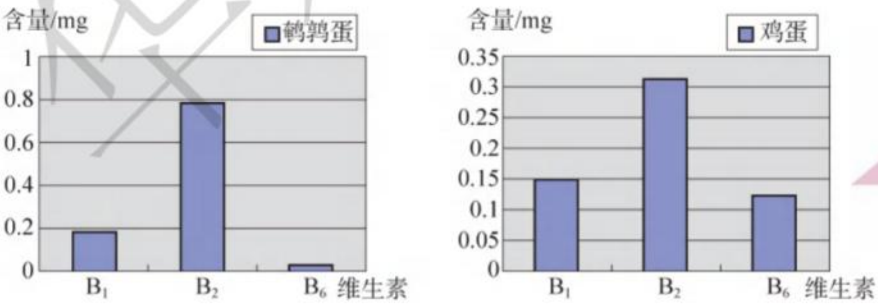
你觉得这样的统计图会给人留下怎样的印象？

分析　我们注意到该条形图的纵轴是从 30% 开始的，这样左边条形的高度就为右边条形高度的两倍，从而容易给人错误的印象：使用该厂牙膏会使蛀牙率减少一半.

问题 6　有许多人认为鹌鹑蛋比鸡蛋更有营养，是不是这样呢？

检测发现，每 100 g 鹌鹑蛋和鸡蛋的可食部分中各种维生素 B 的含量分别为：维生素 B_1 约 0.18 mg 和 0.15 mg；维生素 B_2 约 0.79 mg 和 0.31 mg；维生素 B_6 约 0.02 mg 和 0.12 mg .

厂商甲用两幅条形图比较两种蛋的各种维生素 B 的含量，如图14.2.9 所示.



鸡蛋的各种维生素 B 的含量比鹌鹑蛋高吗？

图14.2.9

厂商乙用一幅条形图比较两种蛋的各种维生素 B 的含量，如图14.2.10 所示.

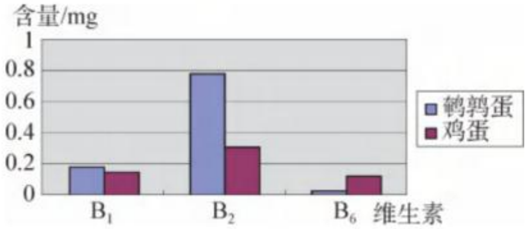


图14.2.10

哪种图示效果好？好在哪里？

分析 厂商甲的两幅图纵轴上的单位长度不同，容易引起误解；厂商乙的统计图是恰当的.

其实，除了比较维生素 B 的含量外，还需比较其他营养成分．据检测，在人体所需的氨基酸的含量上，鹌鹑蛋所含的赖氨酸比鸡蛋高，而鸡蛋所含的异亮氨酸、亮氨酸、蛋氨酸、苯丙氨酸、苏氨酸等则比鹌鹑蛋高．鹌鹑蛋和鸡蛋的营养价值在总体上是相当的.

问题 7 小文是集邮爱好者，2020 年她收藏了 100 张邮票；2021 年她收藏了 200 张邮票．她用图 14.2.11 来表示自己的收藏成果，这样的描述合适吗？

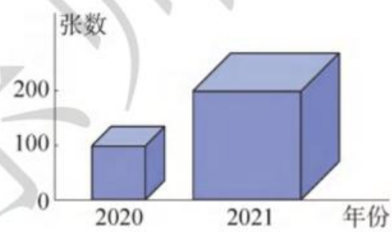


图14.2.11　小文的邮票数量

分析 从高度上看，图 14.2.11 中第二个正方体确实是第一个正方体的 2 倍；但从体积上看，却是 2^3 倍．这样就会使读者产生错误的印象，以为 2021 年小文收藏的邮票比 2020 年多了很多．因此这样的统计图不合适．你能帮小文画一幅合适的统计图吗？

习题14.2

A 组

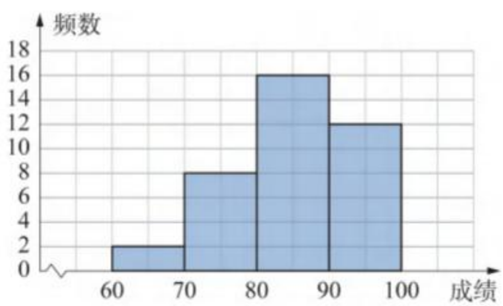
1. 一份关于“中国儿童青少年食物营养现状及对策”的研究报告指出：“儿童青少年脂肪来源于食用油、动物性食物和植物性食物的比例分别为 43.9%、36.6%、19.6%.”你认为作者在展示这组百分比数据时忽略了一个什么问题？

2. 国家体育总局组织了“2021 年全国体育场地统计调查”，发现篮球场地、全民健身路径和乒乓球场地这三种场地目前在全国数量最多，具体数量如下表所示：

	数量/万个	占比/%
篮球场地	105.36	
全民健身路径	92.93	
乒乓球场地	88.48	
羽毛球场地	22.59	
其他场地(如田径、足球等场地)	87.78	
总计		

据此信息，完成表中的“总计”与“占比”，再用扇形统计图描述各类体育场地数量占总场地数量的百分比. 建议使用新技术来计算和画图.

3. 某班学生数学考试成绩(成绩取整数)的频数分布直方图如图所示(图中每组的起点值属于本组，每组的终点值属于下一组，最后一组中包含 100).



(第 3 题)

请回答：

(1) 组数与组距分别是多少？

(2) 该班级共有多少学生？

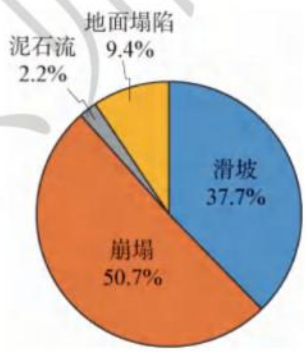
(3) 成绩优良(分数不低于 80 分)的学生占多少百分比？

(4) 此次成绩分布对称吗？学生成绩落在哪个组的人数最多？你估计此次考试对同学们来说是简单了，还是难了？说说你的理由.

B 组

4. 据新华社记者 2022 年 6 月报道，自 2020 年以来，四川省文物考古研究院等单位组成的联合考古队，在三星堆 1、2 号“祭祀坑”旁边，又发现、发掘了距今约 3 000 年的 3 号至 8 号共六个“祭祀坑”，目前共出土编号文物近 13 000 件，其中相对完整的文物 3 155 件. 这 3 155 件中的 1 293 件出自 3 号坑，包括铜器 764 件、金器 104 件、玉器 207 件、石器 88 件、陶器 11 件、象牙 104 件及其他 15 件. 请用扇形统计图描述 3 号坑内各类出土器物所占的百分比.

5. 我国自然资源部通报，2022 年 1 月至 5 月，全国共发生地质灾害 552 起. 按灾情类型制作了扇形统计图(如图所示)，请据此得出各类地质灾害发生的起数，并体会扇形统计图中的百分数常常为近似值，基于近似值的计算结果可能与实际数量有些许误差.



2022 年 1 月至 5 月全国地质灾害发生情况的扇形统计图

(第 5 题)

信息技术应用

计算机帮我们画统计图

利用计算机可以很方便地画出统计图．如果你有兴趣的话，不妨试一试用电子表格软件来画统计图．

打开电子表格软件，会出现一张画满格子的表．画图之前，我们需要先将数据填入电子表格．然后按下鼠标左键并拖动鼠标，选中你填好的数据，在工具栏“插入”—“图表”中，选择你要画的统计图类型，比如条形图(柱形图)、直方图、扇形图(饼图)或折线图等．

如果我们要根据立定投篮的命中次数画出条形统计图，那么先如图 1 左上方选中数据，再在工具栏“插入”—“图表”中选中柱形图类型后，点击“确定”，就会得到图 1 中所选中的结果了．

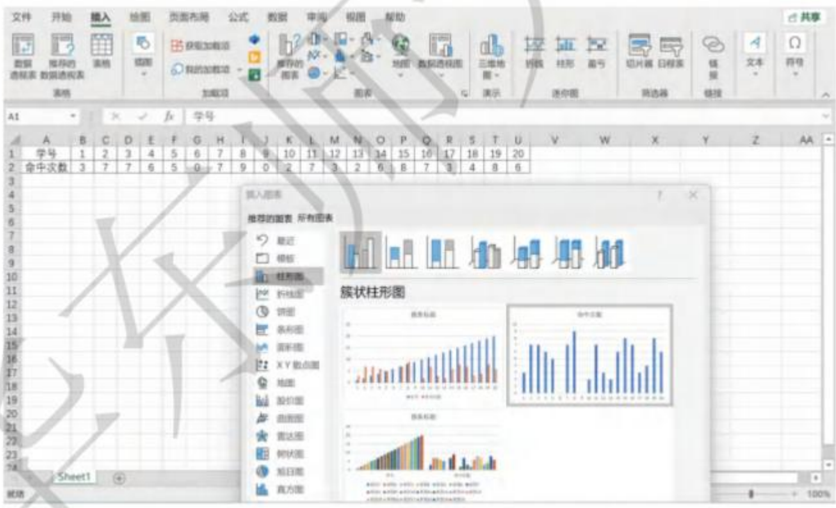


图 1

如果样例中没有我们想要的，你画出的是同时出现学号和命中次数的双柱(如图 2 左侧)，没关系，可以右键单击任何一个条形，然后点击“选择数据”，在弹出的“选择数据源”对话框中，去掉左栏中勾选的学号系列，点击右栏中

图 2

的“编辑”，选择学号所在的 20 个单元格，于是右栏类别就变为从 1 到 20 了，点击“确定”即可完成.

画频数分布直方图的基本步骤与画条形图相同，但还需要右键单击条形区域，通过“设置数据系列格式”，在“系列选项”中将条形的“间隙宽度”或“分类间距”调整为 0%.

如果我们要画出图 14.2.1 中“六年级学生最喜欢的文艺节目”扇形统计图，那么先如图 3 左侧选中数据，再在工具栏“插入”—“图表”中选中“饼图”类型后，点击“确定”，就会得到图 3 中所选中的结果了. 如果还希望看到相应的百分比，可以右键单击扇形图区域，然后点击“添加数据标签”. 若想增加百分比的小数位数，可以在“标签”下的“数字”里设置. 如果检查发现各百分比之和不是 1，可以手动微调某个百分比.

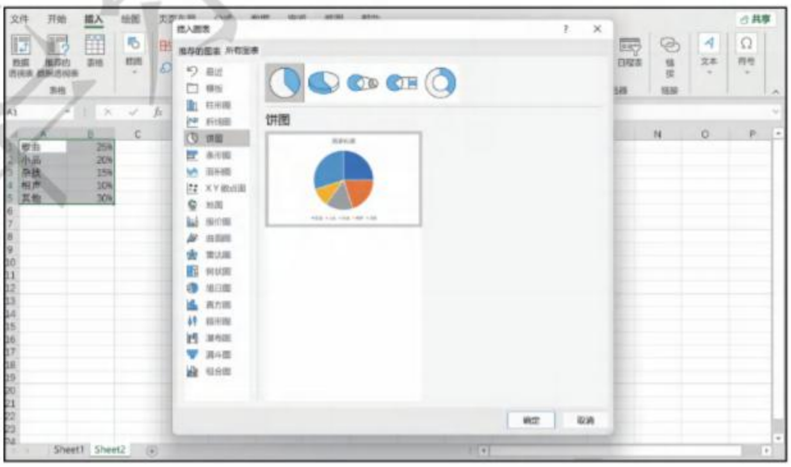


图 3

如果我们要画出图 14.2.1 中“小文 1～6 岁身高变化”折线统计图，那么先如图 4 左侧选中数据，再在工具栏“插入”—“图表”中选中“折线图”类型后，点击“确定”，就会得到图 4 中所选中的结果了．如果还希望调整纵轴刻度的最小值和最大值，或是希望增加坐标轴箭头等，可以右键点击选中的坐标轴区域，然后“设置坐标轴格式”，在“坐标轴选项”中可以设置最大值和最小值，在“线条”中可以选择箭头的样式等．

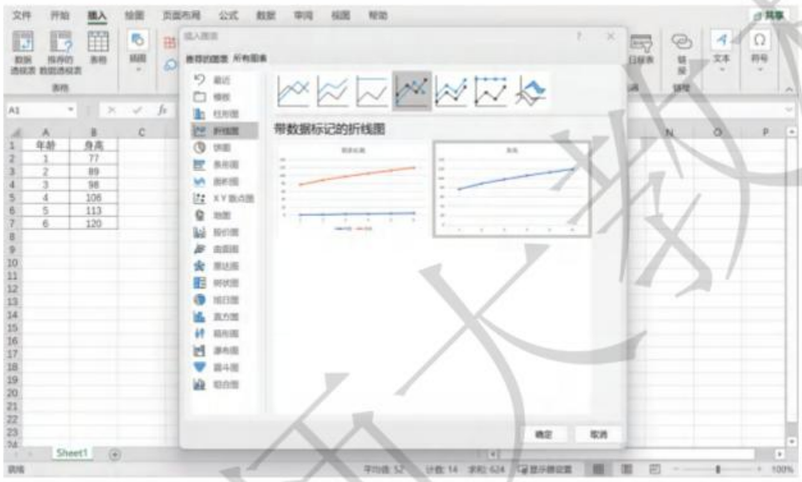


图 4

需要说明的是，电子表格软件画的折线图的横轴是类别，它通常是事先按 1、2、3……均匀地设定好的，与我们习惯使用的平面直角坐标系不一样，所以，当我们想要在横轴上呈现非等距的类别时，比如想要呈现 1989、2000、2008、2020 这四个年份时，可以在图表类型中选择“散点图”，如果需要呈现数据点之间的连线，就选择“带直线的散点图”．

数学活动

守护我们的健康

据中国营养学会网站介绍，自 2015 年起，每年 5 月的第三周为我国的“全民营养周”． 它倡导民众学习营养知识、改善膳食行为、注意吃动平衡、合理预防疾病． 青少年是祖国的未来，身体正处于快速生长发育期，对营养、热量有特殊的需求． 据报道，当前中国 6～17 岁儿童青少年的膳食现状表现出以下问题，值得注意：

（1）青少年膳食质量在改善，但蔬菜水果、蛋类、奶类和豆类摄入量还需提高；

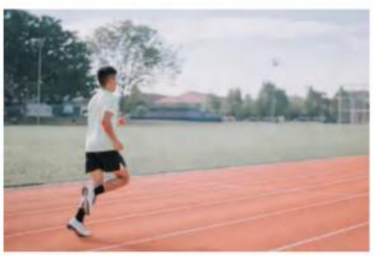
（2）青少年人群中，烹调油和烹调盐摄入高过推荐量的现象值得关注；

（3）儿童青少年能量的供给基本充足，部分微量营养素缺乏需要重视；

（4）儿童青少年的超重肥胖趋势呈现增长态势；

（5）儿童青少年中还存在饮水不足、饮料消费较多、身体活动不足和屏幕使用时间较长的问题．

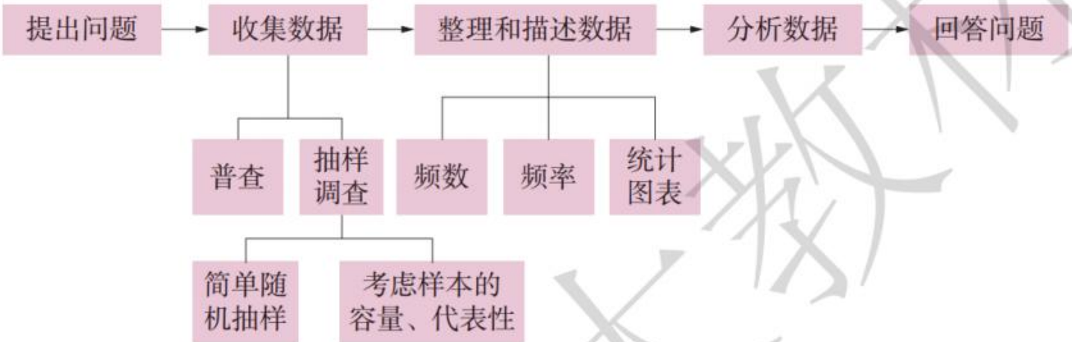
请学习中国营养学会关于平衡膳食的建议，提出一个你们感兴趣的问题（如吃早餐的习惯、膳食的质量、喝饮料的频次和数量、观看电子屏幕的时间、运动的频次和运动量，等等），对你们身边的朋友在合理饮食或适量运动方面开展调查研究，收集数据，并就你们所提的问题，写出调查报告．


小结

一、知识结构

利用数据，分析并解决简单实际问题的过程：



二、要点

1. 通过解决一些简单的实际问题，我们了解到：在现实生活中，有许多问题应当先做调查研究，收集数据，再通过分析给出回答.

2. 当我们所要考察的对象数不胜数的时候，当我们的考察会给考察对象带来损伤或破坏的时候，当我们的考察经费和时间都非常有限的时候，抽样调查就发挥出其独特的作用了. 简单随机抽样是一种很重要的抽样方法，它使每个个体都有相等的机会被选入样本.

3. 频数用来表示每个对象出现的次数，频率则表示每个对象出现的次数在总次数中所占的比值（或者百分比）. 频数和频率都能够反映每个对象出现的频繁程度. 但在总次数不相等时，应比较频率而不是频数.

4. 数据中蕴含着丰富的信息，我们可以运用数据分析的方法，借助统计图表读取或传递有用的信息，用数据说话. 同时，我们还了解到有些不够规范的统计图容易误导读者.

复习题

A 组

1. 下面哪些考察适合用普查方式，哪些适合用抽样调查方式？

（1）考察一片试验田里某种大麦的穗长情况；

（2）考察一个班级中的学生对建立班级生物角的看法；

（3）考察人们保护海洋的意识.

2. 一厂家在某城市几家经销本厂产品的大商场进行调查，得知本厂产品的销售量占这几个大商场同类产品销售量的 50%．据此，该厂家在广告中宣传说，他们的产品在国内同类产品的销售量中占 50%．请你根据所学的统计知识，判断该宣传中的数据是否可靠，为什么？

3. 下表记录了某班同学投掷一枚普通的正方体骰子出现的情况以及一些计算结果，请完成表中余下的计算.

投掷结果	甲 10 次	乙 10 次	甲、乙合计 20 次		全班合计 400 次	
	频数	频数	频数	频率	频数	频率
出现 1 点	0	0			66	
出现 2 点	3	0			62	
出现 3 点	0	2			77	
出现 4 点	2	1			74	
出现 5 点	3	5			60	
出现 6 点	2	2			61	

4. 一位同学在调查 50 位同班同学的出生月份时，记录的数据如下：

2， 5，11，7，9， 3，12， 1，8，10，12， 7， 8，2，11，10，
2， 9， 6，4，9，11， 5，12，3， 8， 4，10，12，7， 8， 6，1，
8，11， 7，5，3， 9，11， 4，2， 9， 6， 5， 8，3， 8，12，1.

（1）请为他设计一张统计表，使每个月出生人数的情况一目了然，别忘了写表标题哦．

（2）将上面的数据用条形统计图表示，体会使用统计图表示数据的好处．

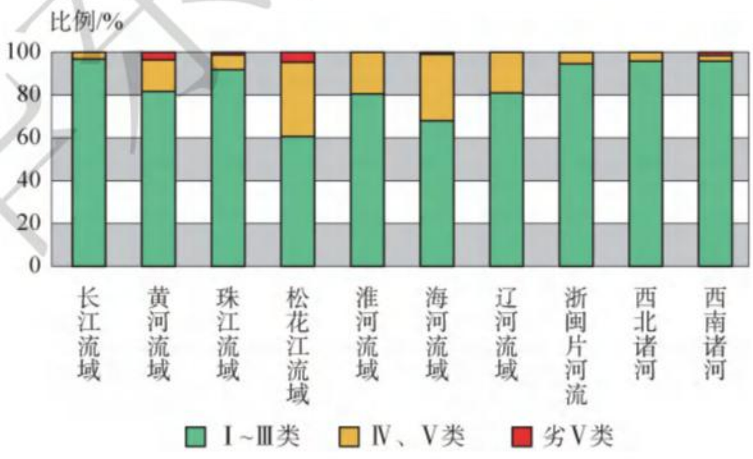
5. 教育部基础教育质量监测中心 2018 年完成的“义务教育数学学习质量监测结果报告”显示，四年级学生数学学习焦虑程度低、较低、较高和高的占比依次为 27.2%、48.0%、21.1%和 3.7%，八年级学生的相应占比则依次为 10.3%、48.8%、35.0%和 5.9%．

（1）根据这些调查数据，画两张扇形统计图的草图，来分别描述这两个年级学生不同数学学习焦虑程度分布的情况；

（2）根据这些调查数据，制作两张扇形统计图，再与你前面画的草图对照一下，看看草图中各个扇形的圆心角的大小是否大致合适；

（3）尽可能多地写下你从这两张统计图中读到的信息．

6. 中华人民共和国生态环境部公布的《2021 中国生态环境状况公报》中有如图所示的一幅描述我国七大流域和浙闽片河流、西北诸河、西南诸河水质状况的统计图．Ⅰ～Ⅲ类为水质良好至轻度污染，适用于作为饮用水水源、渔业水域等；Ⅳ～Ⅴ类为重度污染和严重污染，主要适用于一般工业、农业用水及景观水域，不能作为饮用水水源；劣Ⅴ类水质比Ⅴ类更差．读图后，请按水质状况把这些河流分为水质优、良好和急需治理三大类，并说明理由．

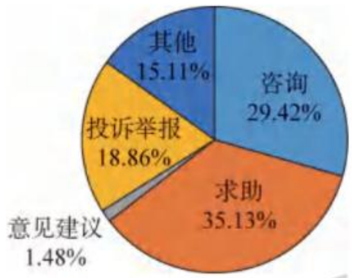


2021 年我国七大流域和浙闽片河流、西北诸河、西南诸河水质状况

（第 6 题）

B 组

7. 某市民服务热线某日收到的诉求分类占比如图所示．若已知求助类诉求为 10 674 件，占比 35.13%，求占比 29.42%的咨询类诉求的数量．



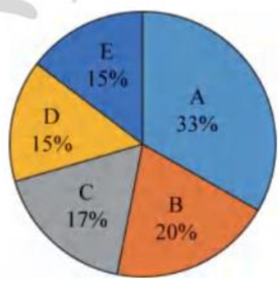
某市民服务热线某日收到的诉求分类占比

（第 7 题）

8. 据报告，2020 年我国品牌汽车销量前五名的企业集团销量如下表所示：

品牌	A	B	C	D	E
销量/万辆	253.1	150.4	132.1	113.4	111.2

将表中 5 个数据相加，可以知道，五个品牌在该年的总销量为 760.2 万辆．有人据此画出如图所示的 2020 年我国汽车市场品牌占有率的扇形统计图，称 A 品牌的市场占有率为 33%． 你同意吗？为什么？



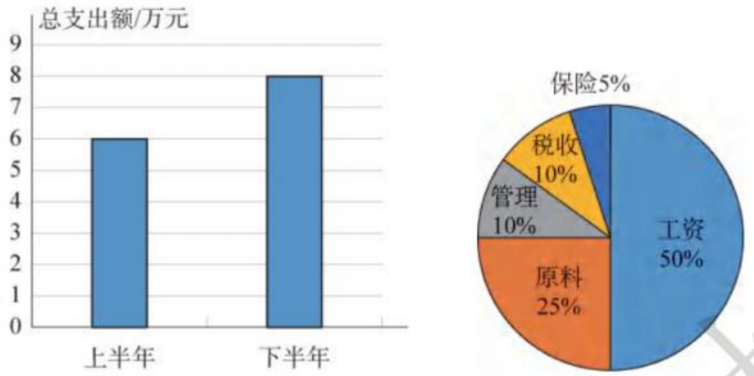
2020 年我国汽车市场品牌占有率

（第 8 题）

9. 利用图①②提供的某公司的一些信息，回答下列问题：

（1）下半年管理费支出的金额是多少？保险费支出的金额是多少？

（2）下半年的总支出比上半年增加多少？增加百分之几？



① 上半年和下半年的总支出　　② 下半年总支出的分配情况

（第 9 题）

C 组

10. 下面这张统计图直观地展现了我国汽车工业在这 20 年中的快速发展历程.

（1）指出该图存在的问题.

（2）图中汽车销量数据是读左边的坐标轴，还是右边的坐标轴？

（3）图中汽车销量增长率的起伏是用许多直线段连成的折线描述的，请问：介于相邻两年之间的线段是否表示某种意思？连线是为了显示什么？

（4）某年份的增长率下降，是否意味着该年份汽车销量也下降？

2001—2020 年中国汽车销量及增长率

（注：历史年度数据为当年发布数据）

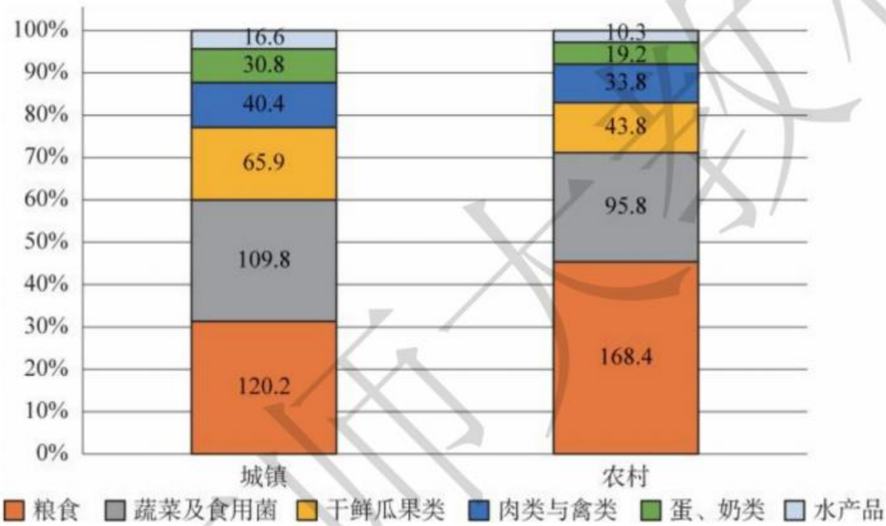
（第 10 题）

11. 人们有时也会使用如图所示的堆积条形图来描述各部分在总体中所占的比例. 请根据此堆积条形图中的数据, 尝试回答下列关于 2020 年度我国城镇和农村居民人均主要食品消费量的几个问题:

(1) 城镇和农村居民消费最多的食品各是什么? 该项人均消费量在城镇和农村各是多少? 各自约占多少百分比?

(2) 该年度城镇和农村居民人均主要食品消费的总量各是多少?

(3) 城镇和农村居民在人均主要食品消费量方面有哪些相同点和不同点?

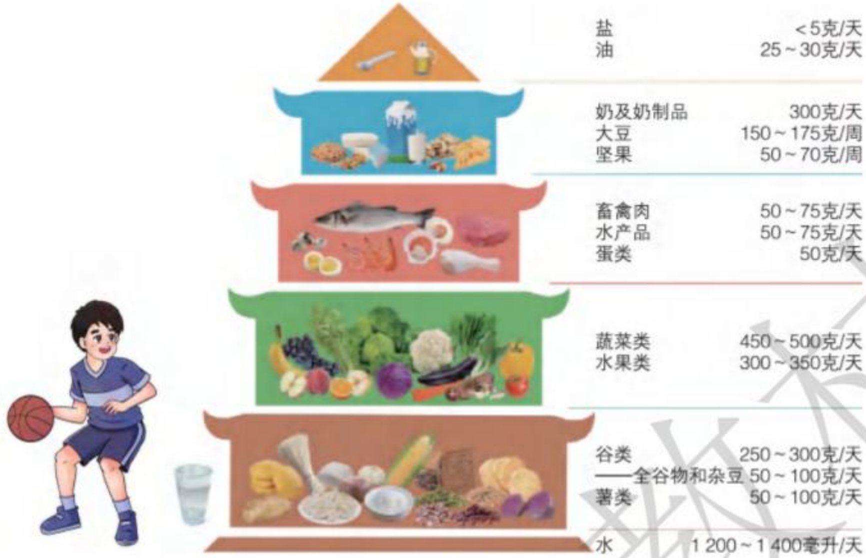


2020 年我国城镇、农村居民人均主要食品消费量及其占比(单位: kg,%)

(数据来源: 国家统计局网站公布的《中国统计年鉴 2021》)

(第 11 题)

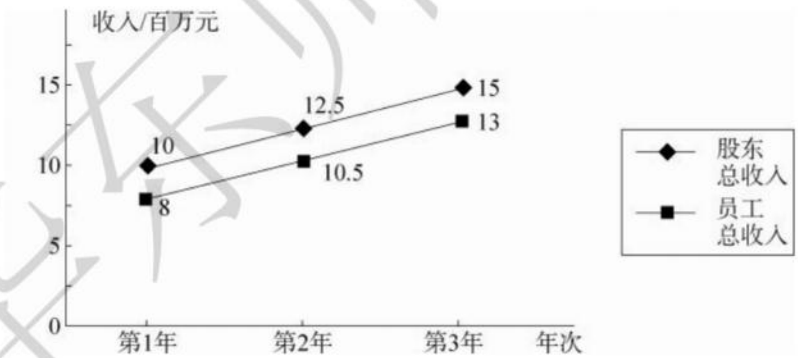
12. 小明认为可以用如图所示的这张由中国营养学会 2022 年推出的平衡膳食宝塔作为一个例子, 说明统计表有时可以比统计图更好地显示数据信息. 你同意吗? 说说你的理由.



14～17 岁青少年平衡膳食宝塔

（第 12 题）

13. 某公司为了说明其劳资双方的利益呈现同步增长的趋势，画出了如图所示的统计图．说说你看了这幅图后有什么想法．如果已知该公司共有 5 位股东和 100 名员工，你会如何分析劳资双方的收入？



股东、员工收入比较

（第 13 题）

项目学习 5

几何的妙用

几何学的发展历史悠长，贯穿人类文明的发展史中，对生产与生活产生了深远影响．纵向视之，几何与代数、数论等有着千丝万缕的联系；横向观之，几何在艺术、工程、科技等领域有着举足轻重的作用．有人制作道具或描绘图形，用于论证数学的巧妙；有人在简单的工具上赋予数学智慧，用以丈量土地与高山；还有人结合数学之美，设计出独具匠心的艺术作品．让我们走进几何世界，一起洞察几何之美！

所需数学知识或技能：全等三角形、勾股定理、黄金分割比等几何知识；尺规作图等基本技能．

所需跨学科知识：纸笔作图、手工制作等美术知识；电脑制图等信息技术知识．

所需材料：硬纸板、剪刀、胶水等手工工具；直尺、圆规等作图工具．

活动形式：收集资料、绘制与设计、制作与实验等．

成果形式：艺术作品、电子产品、自制工具等．

任务一　巧妙的几何证明

数学历史上有许多巧妙又直观的几何证明，譬如勾股定理便有诸多“无字证明”的方法，如赵爽弦图法、青朱出入图法等．毕达哥拉斯学派也经常用“形数”思想证明一些代数性质．此外，许多代数恒等式也可以用几何方法直观地证明．请你选择某些公式或定理，从几何的角度寻求证明思路，并为其设计和制作动态呈现的工具．

活动流程建议：

（1）厚积薄发．查阅相关书籍或网页资料，了解巧妙直观的几何

证明案例及数学史知识，尝试学习其中的原理．感受这些证明方法中所蕴含的数学思想方法．

（2）动态呈现．你见过“注水法”的勾股定理演示吗？——直角三角形上两个小正方形容器里的水经过旋转后恰好能注满大正方形容器．这样的数学实验甚是巧妙，却多用于“验证”，而非“证明”．你能否创新地设计一款产品（实体或数字产品均可），生动地演示某一证明过程呢？例如，你可以制作合适的积木拼图玩具演示青朱出入图法的证明，也可以利用软件制作动画进行演示．

（3）归纳反思．你的产品还有什么创新玩法吗？对于其他类似的证明是否也能制作类似的产品呢？请进一步反思活动中的收获与不足，以更多元的形式展示你的小组成果．

任务二　绝妙的几何设计

几何图形是对世界万物的高度概括，是简洁、直观又富有美感的表达方式．许多商标、旗帜、标识等正是借助了尺规作图，才更具设计感，且简洁易复刻．你能否用数学方法标准地画出我国国旗五星红旗以及中国共产党党旗等？请你学习用几何手段复刻一些作品（旗帜或商标等），在充分实践之后，利用几何知识创作出一件独特的标识或美术作品．

活动流程建议：

（1）数学眼光．有哪些商标、旗帜、标识、艺术作品等的设计中蕴含了几何设计？这些图形中的线段比例、角度等几何要素具有哪些特点？请查阅相关资料，用数学的眼光发现其中的几何美．

（2）动手复刻．从你收集的设计作品中选择若干项进行复刻．利用其中的数学原理，尽可能使用严谨的几何作图方法进行纸笔作图（如尺规作图等）．你也可以使用计算机软件作图．复刻作品的过程中尽量保留作图痕迹或补充步骤说明，体现作图的过程．

（3）创意发挥．请你借助几何知识（多边形、全等、尺规作图等）创造性地为自己、班级或某个活动设计和制作一个标识（或徽章、旗帜等）．不断反思与优化你的作品，更好地呈现你的小组设计成果．

项目学习 6

采集一手数据

人类已经迈入大数据时代，有效地收集和整理数据，并对其进行分析以获取有价值的信息，已经成为这个时代的潮流．然而，所收集数据的真实性与代表性直接影响了最终结论的准确性与有效性．因此，如何更好地收集数据便是我们需要学习和掌握的技能．那么，怎么确定研究对象并有效地将其数据化呢？如何通过统计调查或科学试验（测量）直接获取第一手统计数据呢？让我们在调查研究中一探究竟吧！

所需数学知识或技能：随机抽样、数据分析等统计知识．

所需跨学科知识：叶子特征等生物学知识；反应速度等物理与体育知识；统计图表制作、软件使用等信息技术知识．

所需材料：叶子、尺子、秒表、问卷等．

活动形式：提出问题、收集数据、处理数据、分析数据、生成结论等．

成果形式：调查报告、宣传海报、建议书或倡议书等．

任务一　叶子特征的调查

大自然中的植物千姿百态．德国著名哲学家、数学家莱布尼茨（Leibniz，1646—1716）说过，世界上没有两片完全相同的叶子．不过，如果你细心观察就会发现：虽然叶子的形状各不相同，但同一种植物的叶子却有着许多类似的特征，而不同植物的叶子通常有着不同的特征．比如，夹竹桃的叶子又细又长，银杏树的叶子像把小扇子，黄杨树的叶子接近于椭圆形……请你选择一种或多种植物，提出关于叶子的数学问题，并基于对叶子特征的调查回答问题．

活动流程建议：

（1）提出问题．请你选定一种植物，查阅与其相关的资料，了解它的习性与叶子形状．观察其叶子的特征，提出你的研究问题与猜想（例如叶子长与宽的关系、叶子不同部位宽度的关系等）．你也可以选定多种不同的植物作为研究对象，比较它们叶子的差异，尝试利用数学知识加以区分．

（2）收集数据．到大自然中去收集足够多且丰富多样的叶子，根据你的研究问题，测量不同时期、不同植株、不同大小的叶子，收集真实的一手数据（关注所收集数据的准确性与代表性）．

（3）解决问题．借助表格、统计图等数学工具记录数据，进一步分析数据特征，回答研究问题，提炼研究结论．反思活动过程，总结活动经验并提出更多的思考，完成调查报告或制作宣传海报．

任务二　反应速度的调查

2021 年 8 月 1 日，在东京奥运会男子 100 m 跑半决赛中，中国运动员以 9 秒 83 的好成绩打破了亚洲纪录，创造了历史！一声枪响，中国运动员的起跑反应速度仅为 0.142 秒，优秀的起跑为好成绩奠定了基础．反应速度体现了人体对各种信号刺激（声、光、触等）快速应答的能力．对运动员而言，优秀的反应速度对运动水平的发挥有着重要的影响；而对于普通人而言，良好的反应速度可以让人们在发生某种危急情况时及时采取相应措施以避免危险．请你查阅资料并加以学习，设计出测量反应速度的有效方法，并用以调查某类人群的反应速度．

活动流程建议：

（1）提出问题．请你查阅相关资料，了解反应速度的相关概念，学习其测量的方法并明确其基本范围．结合生活经验，提出特定群体内与反应速度相关的研究问题．

（2）收集数据．测量反应速度的方法有哪些？请你分析不同测量方法的优缺点，根据你的研究问题选择合适的方法，并设计测量反应速度的方案．例如，你可以用尺子并结合自由落体运动的相关知识进

行测量，也可以用秒表和示意工具(如小灯泡、铃铛等)进行测量．然后选择特定的群体(如某班级学生、某学校体育特长生、某类工作人员等)进行测量，收集足够的一手数据(过程中要注意样本的代表性及数据的合理性)．

（3）解决问题．借助表格、统计图等数学工具记录数据．进一步分析数据特征，回答研究问题，提炼研究结论．你还可以尝试探究反应速度是否与某些因素(如年龄、性别等)有关．反思活动过程，总结活动经验并提出更多的思考，完成调查报告或制作宣传海报．

任务三　评价标准的调查

我们在生活中会遇到各种考核或评价，也会参与到对他人或各种事物的评价工作中，例如评价哪些产品是优质的，哪些人员是优秀的，等等．每个人的主观认知都有一定的参考价值，但又有所差异，因此，制定一套公平的评价体系便显得尤为重要．请你选择一个评价问题，设计问卷调查不同人心目中的评价标准，并基于收集的数据制定出一套相对公平的评价标准．例如：学生眼中什么样的老师是一位好老师？什么样的学生才算好学生？现在的中学生幸福吗？等等．

活动流程建议：

（1）设计问卷．请选择你感兴趣的领域，提出一个你想制定的评价标准问题．通过查阅相关资料，或访谈相关人员，了解该评价标准可能需要涉及的主要指标有哪些，进而设计并制作调查问卷．

（2）收集问卷．选择合适的样本，发放问卷，收集真实、有代表性、有效的数据．将数据记录在表格或计算机软件中，用数学方法处理数据(如生成统计图表、计算基本统计量等)．

（3）制定标准．进一步分析数据，提炼结论，生成评价标准．在现实背景下寻找一些个例，尝试运用该评价标准，反思其优缺点，并完成调查报告或面向特定群体写一封倡议书．

后　记

本套教科书于2001年初获教育部批准立项，并于当年3月依据《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》正式开始编写．七年级上册于2001年6月通过教育部审查，并于当年秋季在全国七个国家级实验区投入使用．《义务教育数学课程标准（2011年版）》于2011年12月由教育部正式颁布，根据教育部的统一安排，本套教科书进行了修订送审，并在顺利通过教育部审查后继续在相关省市使用至今．在首届全国教材建设奖评选中，本套教科书（七年级上册、七年级下册）荣获“全国优秀教材二等奖”．

2022年4月，《义务教育数学课程标准（2022年版）》正式颁布，根据教育部的统一部署，义务教育教科书新一轮修订工作正式启动．为了确保本套教科书修订工作的顺利进行，我们提前于2018年初至2020年底，在本套教科书使用地区进行了大规模的抽样问卷调查和测试，获得了改进教科书质量的第一手材料．广大师生反馈的许多共性问题，为我们进行新一轮教科书修订提供了明确的思路和启示．

按照教育部的要求，本套教科书修订稿于2023年11月25日至12月15日在全国九个省市开展了试教试用和一线教师审读工作．在此期间，几十位一线教师为我们进一步完善修订教科书提出了数百条意见和建议．

在此，我们对20多年来给予本套教科书关心的广大教科书使用地区师生表示衷心的感谢．

除已经列出的编写人员外，程靖、黄健参加了本册教科书的有关编写工作．

尽管我们对修订工作倾注了大量心血，但是现在呈现在广大师生面前的修订教科书肯定还存在有待进一步完善的地方．我们真诚希望广大师生继续关心我们的教科书，对我们的教科书不断提出新的宝贵意见．

联系电话：（021）60821761，60821770．

电子邮箱：pingping@ ecnupress. com. cn．

数学

八年级　上册

ISBN 978-7-5760-6040-9

定价：15.00元