教育部审定 2013

义务教育教科书

数学

SHUXUE

九年级 下册

华东师范大学出版社

义务教育教科书

数学

SHUXUE

九年级　下册

主　编　王建磐

副主编　王继延

唐复苏

华东师范大学出版社

致亲爱的同学

亲爱的小伙伴，欢迎你.

你现在拿在手中的是依据《国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010—2020 年）》与国家《义务教育数学课程标准（2011 年版）》，为你们提供的初中阶段六册数学教科书中的第六本.

这是你初中阶段学习的最后一本数学教科书. 它与你学过的前五本数学教科书一样，从你所熟悉的情境入手，呈现一些最基本的、丰富多彩的数学内容，并穿插一些阅读材料，设置一些让你思考、实践与自主探索的栏目. 不同层次的习题，应用性、探索性和开放性的各种形式的问题及综合与实践等，都为你提供了充分展示聪明才智与数学能力的机会.

现在，请你翻开这本书，与我们一起继续漫游这奇妙的数学世界，去探索发现更多、更具魅力的数学奥秘.

给你一定的材料，怎样设计一个矩形花圃，使它的面积最大？一个物体从空中下落时，它的速度会越来越快，你知道它下落的距离是如何随着时间的变化而变化的吗？这些问题都可以在**“二次函数”**中得到解决. 在这里，你将尝试解决许多这样的问题，你会发现你的能力又变强了，你将成为解决问题的能手.

“圆”是一切平面图形中最完美、最谐调匀称的图形. 你瞧！从各个方向看，它都是对称的，无论处于哪个位置，它都具有相同的形状. 古今中外的许多建筑、装饰品等都有圆形的痕迹. 进入圆的世界，去感受它的魅力吧！

我们已经学习了许多统计与概率的知识，那么如何既有效又简洁地对某些问题做出有意义的判断与决策呢？**“样本与总体”**将告诉你如何使用科学的抽样调查方法，利用收集到的数据，进行数据分析，对总体的特征作出较为可靠的估计. 这是你今后可能会经常用到的一种通过样本估计总体的方法，它会为你有效地作出某些决策提供帮助. 怎么样？亲自试试看！

我们相信，初中这三年，通过在丰富多彩的数学世界里漫游与探索，你一定结识了许多好朋友，你的聪明才智与数学能力也一定有了充分的长进.

无论你走到哪里，数学世界将一如既往地欢迎你，为你打开更多神秘的大门，带你探索更多的数学奥秘.

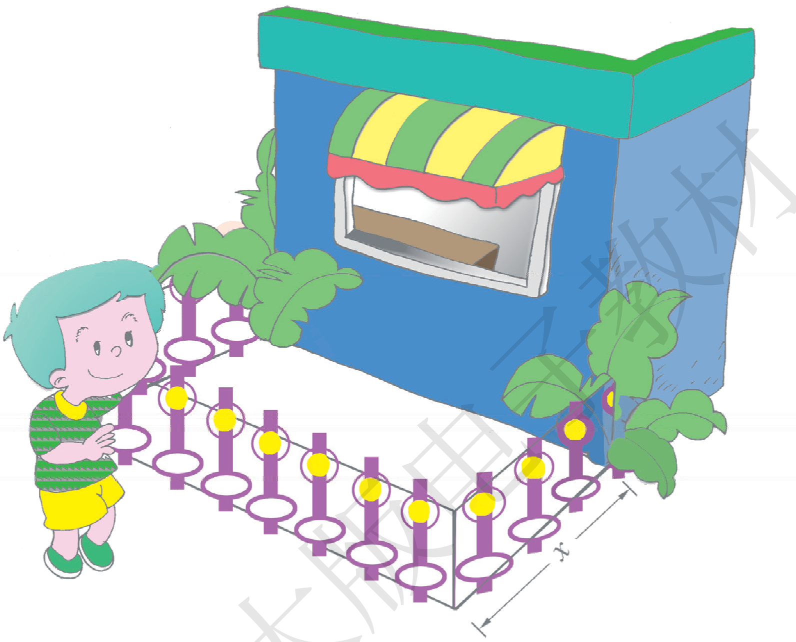
编者

目　录

第 28 章　样本与总体

数学实验附图

第26章　二次函数



用总长为20 m的围栏材料，一面靠墙，围成一个矩形花圃．怎样围才能使花圃的面积最大？

如果花圃垂直于墙的一边长为x m，花圃的面积为y m^2，那么$y=x(20-2x)$．问题归结为：x为何值时，才能使y的值最大？

本章将探索二次函数的图象与性质，

并解决一些简单的实际问题．

26.1 二次函数

问题 1

用总长为 20 m 的围栏材料，一面靠墙，围成一个矩形花圃. 怎样围才能使花圃的面积最大？

试一试

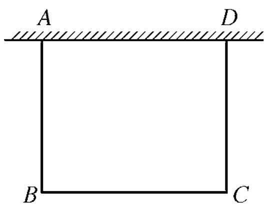


图 26. 1. 1

我们先列举一些不同的围法，观察矩形花圃的面积是怎样变化的. 如图 26. 1. 1，设围成的矩形花圃为 $ABCD$，靠墙的一边为 AD，垂直于墙面的两边分别为 AB 和 DC. 给出矩形一边 AB 的长的一些值 $(0<AB<10)$，可以求出 BC 的长，从而可得矩形的面积. 试将计算结果填入下表的空白处：

AB 的长(m)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
BC 的长(m)				12					
面积(m^2)				48					

从所填的表格中，你能发现什么？能作出怎样的猜想？

分析　我们看到，对于一边 AB 的长的每一个确定值 $(0<AB<10)$，矩形的面积有唯一确定的值与它对应. 也就是说，面积是一边 AB 的长的函数. 问题就归结为：当 AB 的长取何值时，矩形面积的值最大？为此，我们先求出这个函数关系式.

设 AB 的长为 x m，矩形的面积为 y m^2，y 是 x 的函数. 试写出这个函数关系式.

问题 2

某商店将每件进价为 8 元的某种商品按每件 10 元出售，一天可售出 100 件. 该店想通过降低售价、增加销售量的办法来提高利润. 经过市场调查，发现这种商品每件每降价 0.1 元，每天的销售量可增加 10 件. 将这种商品的售价降低多少时，其每天的销售利润最大?

销售利润 = (售价 − 进价) × 销售量.

分析 在这个问题中，销售商品的利润与其降价的数量有关. 设每件商品降价 x 元 $(0 \leqslant x \leqslant 2)$，销售该商品每天的利润为 y 元，则 y 是 x 的函数. 问题就归结为：当 x 为何值时，函数取得最大值? 为此，我们先求出这个函数关系式.

为什么要限定 $0 \leqslant x \leqslant 2$?

试写出这个函数关系式.

由上面两个问题的分析，我们可以得到：

问题 1 中的函数关系式为

$$y = x(20 - 2x) \quad (0 < x < 10),$$

即

$$y = -2x^2 + 20x \quad (0 < x < 10).$$

问题 2 中的函数关系式为

$$y = (10 - x - 8)(100 + 100x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 2),$$

即

$$y = -100x^2 + 100x + 200 \quad (0 \leqslant x \leqslant 2).$$

探索

观察所得的两个函数关系式，它们有什么共同特点?

概括

形如 $y=ax^2+bx+c$（a、b、c 是常数，$a\neq 0$）的函数叫做**二次函数**(quadratic function).

练　习

1. 已知直角三角形两条直角边的长的和为 10 cm.

（1）当它的一条直角边的长为 4.5 cm 时，求这个直角三角形的面积；

（2）设这个直角三角形的一条直角边的长为 x cm，面积为 S cm^2，求 S 与 x 之间的函数关系式.

2. 已知正方体的棱长为 x cm，表面积为 S cm^2，体积为 V cm^3.

（1）分别写出 S 与 x、V 与 x 之间的函数关系式.

（2）这两个函数中，哪个是 x 的二次函数？

习题 26.1

1. 设圆柱的高为 6 cm，底面半径为 r cm，底面周长为 C cm，体积为 V cm^3.

（1）分别写出 C 与 r、V 与 r、V 与 C 之间的函数关系式.

（2）这三个函数中，哪些是二次函数？

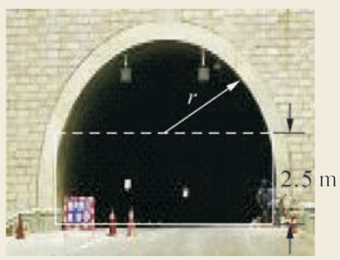
2. 正方形的边长为 4，当边长增加 x 时，面积增加 y，求 y 与 x 之间的函数关系式. 这个函数是二次函数吗？

3. 已知二次函数 $y=ax^2+c$，当 $x=2$ 时，$y=4$；当 $x=-1$ 时，$y=-3$. 求 a、c 的值.

4. 一条隧道的截面如图所示，它的上部是一个半圆，下部是一个矩形，矩形的一边长为 2.5 m. 求：

（1）隧道截面的面积 S(m^2) 与上部半圆的半径 r(m) 之间的函数关系式；

（2）当上部半圆的半径为 2 m 时的截面面积（精确到 0.1 m^2）.



（第 4 题）

26.2 二次函数的图象与性质

回顾

上一节所提出的两个问题,都归结为有关二次函数的问题. 为了解决这类问题,需要研究二次函数的性质.

在研究一次函数时,曾借助图象了解了一次函数的性质. 对二次函数的研究,我们也从图象入手.

1. 二次函数 $y=ax^2$ 的图象与性质

我们知道,一次函数的图象是一条直线. 那么,二次函数的图象是什么? 它有什么特点? 反映了二次函数的哪些性质?

让我们先来研究最简单的二次函数 $y = ax^2$ 的图象与性质.

例 1 画出二次函数 $y = x^2$ 的图象.

解 列表:

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	9	4	1	0	1	4	9	…

在平面直角坐标系中描点,然后用光滑的曲线顺次连结各点,得到函数 $y = x^2$ 的图象,如图 26.2.1 所示.

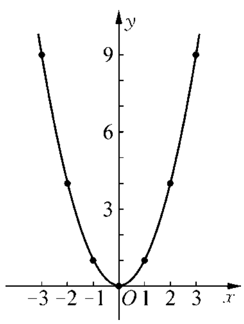


图 26.2.1

这个函数的图象有什么特点?

这样的曲线通常叫做**抛物线**(parabola). 它是轴对称图形,y 轴是它的对称轴,抛物线与它的对称轴的交点叫做抛物线的**顶点**(vertex).

做一做

（1）在同一个平面直角坐标系中，画出函数 $y = x^2$ 与 $y = -x^2$ 的图象，观察并比较这两个函数的图象，它们有什么共同点？又有什么区别？

（2）在同一个平面直角坐标系中，画出函数 $y = 2x^2$ 与 $y = -2x^2$ 的图象，观察并比较这两个函数的图象，你能发现什么？

（3）将所画的四个函数的图象作比较，你又能发现什么？

概括

函数 $y = ax^2(a \neq 0)$ 的图象是一条抛物线，它关于 y 轴对称，顶点坐标是 $(0, 0)$.

观察 $y = x^2$ 与 $y = 2x^2$ 的图象，可以看出：

若 $a > 0$，抛物线 $y = ax^2$ 开口向上. 在对称轴的左边，曲线自左向右下降；在对称轴的右边，曲线自左向右上升. 顶点是抛物线上位置最低的点.

图象的这些特点反映了函数的什么性质？

图象的这些特点表明，函数 $y = ax^2(a > 0)$ 具有这样的性质：当 $x < 0$ 时，函数值 y 随 x 的增大而减小；当 $x > 0$ 时，函数值 y 随 x 的增大而增大；当 $x = 0$ 时，函数 $y = ax^2$ 取得最小值，最小值 $y = 0$.

思考

观察函数 $y = -x^2$ 与 $y = -2x^2$ 的图象，试作出类似的概括，即思考：若 $a < 0$，抛物线 $y = ax^2$ 有什么特点？它反映了函数 $y = ax^2(a < 0)$ 具有哪些性质？

将你思考的结果填在下面方框内，并与同伴交流.

练　习

1. 画出下列函数的图象：

（1）$y=3x^2$；　　　　（2）$y=-\frac{1}{3}x^2$.

2. 根据上题所画的函数图象填空：

（1）抛物线 $y=3x^2$ 的对称轴是________，顶点坐标是________，当 x ________时，抛物线上的点都在 x 轴的上方；

（2）抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 的开口向________，除顶点外，抛物线上的点都在 x 轴的________方，它的顶点是抛物线上的最________点.

3. 不画图象，说出抛物线 $y=-4x^2$ 和 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的开口方向、对称轴和顶点坐标.

4. 设圆的半径为 r，面积为 S.

（1）试写出 S 与 r 之间的函数关系式；

（2）画出这个函数的图象.

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质

我们已经研究了二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象和性质，现在我们来研究一般的问题.

这个二次函数的关系式比 $y=ax^2$ 复杂些，它与 $y=\frac{1}{2}x^2$ 之间有什么联系？

问题 1

试研究二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+3$ 的图象.

分析 将函数关系式配方，得

$$y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1.$$

我们设法寻求它与函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的联系. 为此，先看几个简单的例子.

例 2 在同一个平面直角坐标系中，画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $y=\frac{1}{2}x^2+1$ 的图象.

解 列表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	…
$y=\frac{1}{2}x^2+1$	…	$\frac{11}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{11}{2}$	…

描点、连线，画出这两个函数的图象，如图 26.2.2 所示.

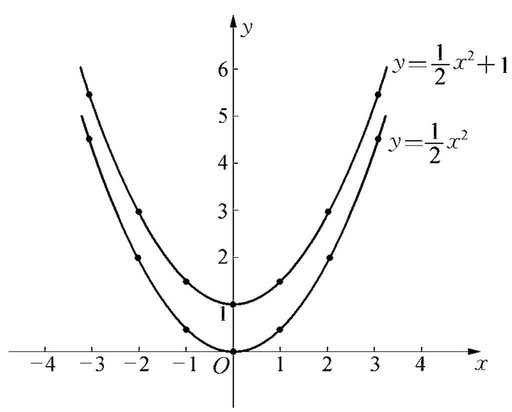


图 26.2.2

探索

当自变量 x 取同一数值时,这两个函数的函数值之间有什么关系?反映在图象上,相应的两个点之间的位置又有什么关系?

观察这两个函数的图象,分别说出它们的开口方向、对称轴和顶点坐标. 它们有哪些是相同的?又有哪些不同?

概括

当自变量 x 取同一数值时,函数 $y=\frac{1}{2}x^2+1$ 的值都比函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的值大 1. 反映在图象上,函数 $y=\frac{1}{2}x^2+1$ 的图象上的每一点都在函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象上相应点的上方 1 个单位.

函数 $y=\frac{1}{2}x^2+1$ 的图象可以看成是将函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象向上平移 1 个单位得到的. 这两个函数图象的开口方向相同,对称轴相同,但顶点坐标不同. 函数 $y=\frac{1}{2}x^2+1$ 的图象的顶点坐标是(0, 1).

据此,可以由函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的性质,得到函数 $y=\frac{1}{2}x^2+1$ 的一些性质:

请思考,并完成填空.

当 x ________时,函数值 y 随 x 的增大而减小;当 x ________时,函数值 y 随 x 的增大而增大;当 x ________时,函数取得最________值,最________值 $y=$________.

做一做

先在同一个平面直角坐标系中画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 与函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象，再作比较，指出它们的联系和区别. 函数 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 的图象可以看成是由函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象经过怎样的平移得到的?试说出它的开口方向、对称轴和顶点坐标，并讨论这个函数的性质.

思考

在同一个平面直角坐标系中，函数 $y=-\frac{1}{3}x^2+2$ 的图象与函数 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 的图象有什么关系？你能说出函数 $y=-\frac{1}{3}x^2+2$ 的图象的开口方向、对称轴和顶点坐标吗？这个函数有哪些性质？

练　习

1. 已知函数 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 和 $y=-\frac{1}{3}x^2-2$.

(1) 在同一个平面直角坐标系中画出它们的图象；

(2) 说出各个图象的开口方向、对称轴和顶点坐标.

2. 试说明：通过怎样的平移，可以由抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 得到抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2-2$？如果要得到抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+4$，应将抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 作怎样的平移？试说出函数 $y=-\frac{1}{3}x^2+4$ 的图象的开口方向、对称轴和顶点坐标.

3. 试说出函数 $y=ax^2+k$（a、k 是常数，$a\neq0$）的图象的开口方向、对称轴和顶点坐标，并填写下表：

	开口方向		对称轴	顶点坐标
$y=ax^2+k$	$a>0$			
	$a<0$			

例3 在如图 26.2.3 所示的平面直角坐标系中，画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的图象.

解 列表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…										…
$y=\frac{1}{2}(x-2)^2$	…										…

描点、连线，画出这两个函数的图象.

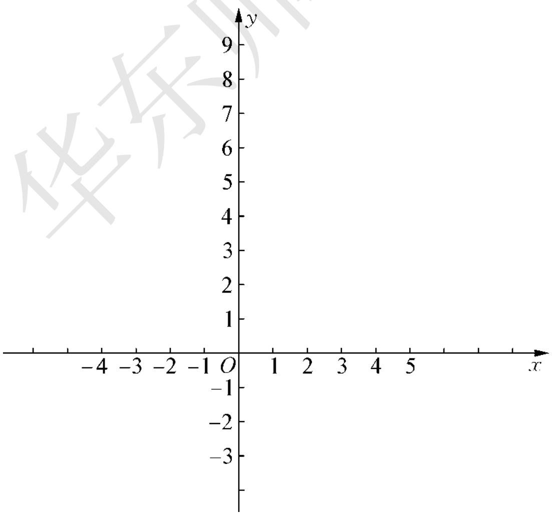


图 26.2.3

请你自己画一画.

探索

根据所画出的图象,说出这两个函数的图象的开口方向、对称轴和顶点坐标,并填写下表:

它们有哪些相同点?有哪些不同点?

	开口方向	对称轴	顶点坐标
$y = \frac{1}{2}x^2$			
$y = \frac{1}{2}(x-2)^2$			

这两个函数的图象之间有什么关系?

概括

函数 $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ 与 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图象的开口方向相同,但对称轴和顶点坐标不同.

函数 $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ 的图象可以看作是将函数 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图象向右平移 2 个单位得到的. 它的对称轴是直线 $x = 2$, 顶点坐标是 $(2, 0)$.

据此, 可以由函数 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的性质,得到函数 $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ 的性质:

请思考,并完成填空.

当 x ________时,函数值 y 随 x 的增大而减小;当 x ________时,函数值 y 随 x 的增大而增大;当 x ________时,函数取得最________值,最________值 $y =$ ________.

做一做

在同一个平面直角坐标系中画出函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 与函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象，比较它们的联系和区别. 说出函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的图象可以看成是由函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象经过怎样的平移得到的.

由此讨论函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的性质.

思考

在同一个平面直角坐标系中，函数 $y=-\frac{1}{3}(x+2)^2$ 的图象与函数 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 的图象有什么关系？试说出函数 $y=-\frac{1}{3}(x+2)^2$ 的图象的开口方向、对称轴和顶点坐标，并讨论这个函数的性质.

练　习

1. 已知函数 $y=\frac{1}{3}x^2$，$y=\frac{1}{3}(x+3)^2$ 和 $y=\frac{1}{3}(x-3)^2$.

(1) 在同一个平面直角坐标系中画出它们的图象；

(2) 说出各个函数图象的开口方向、对称轴和顶点坐标；

(3) 讨论各个函数的性质.

2. 试说明：分别通过怎样的平移，可以由抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 得到抛物线 $y=\frac{1}{3}(x+3)^2$ 和 $y=\frac{1}{3}(x-3)^2$？

3. 试说出函数 $y=a(x-h)^2$（a、h 是常数，$a\neq0$）的图象的开口方向、对称轴和顶点坐标，并填写下表：

	开口方向		对称轴	顶点坐标
$y=a(x-h)^2$	$a>0$			
	$a<0$			

在本节例 2 及例 3 的基础上，我们再来研究第 8 页的问题 1，即研究函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的图象和性质.

分析 我们已经知道函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的图象与函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象之间的关系，也容易知道函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的图象与函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的图象之间的关系.

回顾本节例 2，你能发现它们之间的关系吗？

由此可以得到函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的图象与函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象之间的关系.

试一试

（1）填写下表：

	$y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象	$\xrightarrow[\text{2 个单位}]{\text{向右平移}}$ $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的图象	$\xrightarrow[\text{1 个单位}]{\text{向\_\_\_\_平移}}$ $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的图象
开口方向	向上		
对称轴	y 轴		
顶点坐标	(0，0)		

（2）从上表中，你能找到函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的图象与函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象之间的关系吗？在图 26.2.3 中，画出函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的图象.

（3）进一步，你能发现函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 有哪些性质？

将你的发现填在方框内，并与同伴交流.

做一做

（1）在第 11 页图 26.2.3 中，再画出函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-2$ 的图象，并将它与函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的图象作比较.

（2）试说出函数 $y=-\frac{1}{3}(x-1)^2+2$ 的图象与函数 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 的图象之间的关系，由此进一步说明函数 $y=-\frac{1}{3}(x-1)^2+2$ 的图象的开口方向、对称轴和顶点坐标.

练　习

1. 已知函数 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=\frac{1}{2}(x+2)^2+2$ 和 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-3$.

(1) 在同一个平面直角坐标系中画出这三个函数的图象；

(2) 分别说出这三个函数的图象的开口方向、对称轴和顶点坐标；

(3) 试讨论函数 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-3$ 的性质.

2. 试说明：分别通过怎样的平移，可以由抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 得到抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2+2$ 和抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-3$？如果要得到抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-6$，那么应该将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 作怎样的平移？

3. 试说出函数 $y=a(x-h)^2+k$（a、h、k 是常数，$a\neq0$）的图象的开口方向、对称轴和顶点坐标，并填写下表：

	开口方向		对称轴	顶点坐标
$y=a(x-h)^2+k$	$a>0$			
	$a<0$			

4. 不画出图象，直接说出函数 $y=-3x^2-6x+8$ 的图象的开口方向、对称轴和顶点坐标.（提示：将 $-3x^2-6x+8$ 配方，把函数关系式化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式）

先配方，将函数关系式化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式.

例 4　画出函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{2}$ 的图象，并说明这个函数具有哪些性质.

分析　因为 $-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}(x-1)^2-2$，所以函数即为

$$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2-2,$$

因此这个函数的图象开口向下，对称轴为直线 $x=1$，顶点坐标为 $(1,-2)$.

根据这些特点，我们容易画出它的图象.

解 列表：

x	…	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…	$-6\frac{1}{2}$	-4	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-2\frac{1}{2}$	-4	$-6\frac{1}{2}$	…

画出的图象如图 26. 2. 4 所示.

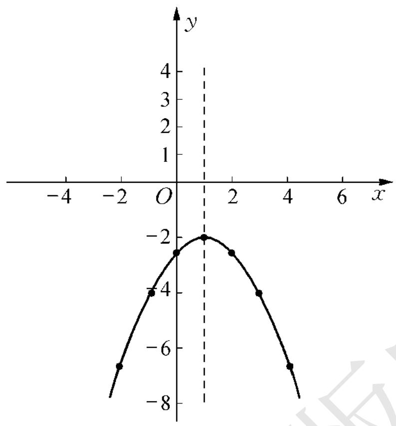


图 26. 2. 4

由图象可知，这个函数具有如下性质：

当$x<1$时，函数值y随x的增大而增大；当$x>1$时，函数值y随x的增大而减小；当$x=1$时，函数取得最大值，最大值$y=-2$.

做一做

（1）试按照上面的方法，画出函数$y=\frac{1}{2}x^2-4x+10$的图象，由图象你能发现这个函数具有哪些性质？

（2）通过配方，说出函数$y=-2x^2+8x-8$的图象的开口方向、对称轴和顶点坐标. 这个函数有最大值还是最小值？这个值是什么？

回顾本节例 4 的研究过程，从中可得到什么启示？

思考

对于任意一个二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，如何确定它的图象的开口方向、对称轴和顶点坐标？你能把结果写出来吗？

练 习

1. 说出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标：

(1) $y=3(x+3)^2+4$；　(2) $y=-2(x-1)^2-2$；

(3) $y=\dfrac{1}{2}(x+3)^2-2$；　(4) $y=-\dfrac{2}{3}(x-1)^2+0.6$.

2. 通过配方，写出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标：

(1) $y=2x^2+4x$；　(2) $y=-2x^2-3x$；

(3) $y=-3x^2+6x-7$；　(4) $y=\dfrac{1}{2}x^2-4x+5$.

3. 先确定下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标，再描点画出图象：

(1) $y=-2(x-1)^2+4$；　(2) $y=\dfrac{1}{2}(x+2)^2-5$；

(3) $y=-\dfrac{1}{3}x^2-2x+1$；　(4) $y=x^2-4x+7$.

应用

现在让我们应用二次函数的有关知识去解决 26.1 节中提出的两个问题.

问题 1 实际上是需要求出自变量 x 为何值时，二次函数

$$y=-2x^2+20x \quad (0<x<10)$$

取得最大值.

将这个函数关系式配方，得

$$y=-2(x-5)^2+50.$$

显然，这个函数的图象开口向下，顶点坐标是 $(5,\ 50)$. 这就是说，当 $x=5$ 时，函数取得最大值，最大值 $y=50$.

这时，$AB=5(\mathrm{m})$，$BC=20-2x=10(\mathrm{m})$.

因此，当围成的花圃与墙垂直的一边长 5 m，与墙平行的一边长 10 m 时，花圃的面积最大，最大面积为 50 m^2.

试从函数表达式来说明：当 $x=5$ 时，函数取得最大值的道理.

问题 2 实际上是需要求出自变量 x 为何值时，二次函数

$$y=-100x^2+100x+200 \quad (0\leqslant x\leqslant 2)$$

取得最大值.

请同学们自己完成这个问题的解答.

例 5 用长为 6 m 的铝合金型材做一个形状如图 26.2.5 所示的矩形窗框. 窗框的高与宽各为多少时，它的透光面积最大？最大透光面积是多少？（铝合金型材宽度不计）

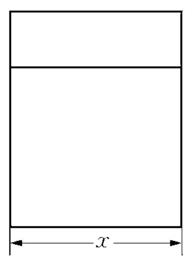


图 26.2.5

解 设矩形窗框的宽为 x m，则高为 $\dfrac{6-3x}{2}$ m. 这里应有 $x>0$，且 $\dfrac{6-3x}{2}>0$，故 $0<x<2$.

矩形窗框的透光面积 y 与 x 之间的函数关系式是

$$y = x \cdot \frac{6-3x}{2},$$

即 $$y = -\frac{3}{2}x^2 + 3x.$$

配方得 $$y = -\frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2},$$

先分析问题中的数量关系，列出函数关系式，再研究所得的函数，解决问题.

所以当 $x = 1$ 时，函数取得最大值，最大值 $y = 1.5$.

$x = 1$ 满足 $0 < x < 2$，这时 $\frac{6-3x}{2} = 1.5$.

因此，所做矩形窗框的宽为 1 m、高为 1.5 m 时，它的透光面积最大，最大面积是 1.5 m^2.

试一试

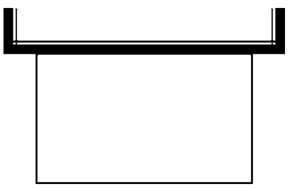


图 26.2.6

（1）如图 26.2.6，要搭建一个矩形的自行车棚，一边靠墙，另外三边围栏材料的总长为 60 m，怎样围才能使车棚的面积最大？

（2）在（1）中，如果可利用的墙壁长为 25 m，怎样围才能使车棚的面积最大？

题（2）与题（1）的解答完全相同吗？试比较并作出正确的解答，和同学交流.

练　习

1. 求下列函数的最大值或最小值：

（1）$y = x^2 - 3x + 4$；　　（2）$y = 1 - 2x - x^2$；

（3）$y = 7x^2 - 2\sqrt{7}x + \frac{3}{2}$；　　（4）$y = 100 - 5x^2$；

（5）$y = -6x^2 + 12x$；　　（6）$y = -\frac{3}{2}x^2 - 4x + 1$.

2. 有一根长为 40 cm 的铁丝，把它弯成一个矩形框. 当矩形框的长、宽各是多少时，矩形的面积最大？最大面积是多少？

3. 已知两个正数的和是 60，它们的积最大是多少？（提示：设其中的一个正数为 x，将它们的积表示为 x 的函数）

3. 求二次函数的表达式

问题 2

如图,某建筑物的屋顶设计成横截面为抛物线形(曲线 AOB)的薄壳屋顶. 它的拱宽 AB 为 4 m,拱高 CO 为 0.8 m. 施工前要先制造建筑模板,怎样画出模板的轮廓线呢?

分析 为了画出符合要求的模板,通常要先建立适当的平面直角坐标系,再写出函数表达式,然后根据这个函数表达式画出图形.

如图 26.2.7,以点 O 为原点,以 AB 的垂直平分线为 y 轴,以 1 m 为单位长度,建立平面直角坐标系. 这时,屋顶的横截面所成抛物线的顶点在原点,对称轴是 y 轴,开口向下,所以可设抛物线对应的二次函数表达式为

$$y = ax^2 (a < 0). \qquad (1)$$

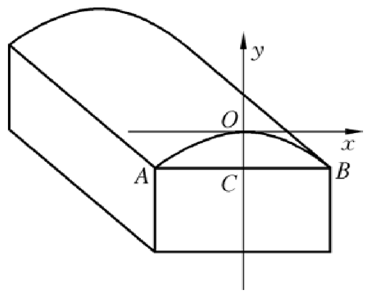


图 26.2.7

因为 AB 与 y 轴相交于点 C,所以 $CB = \frac{AB}{2} = 2$ m,又因为 $CO = 0.8$ m,所以点 B 的坐标为 $(2, -0.8)$.

因为点 B 在抛物线上,将它的坐标代入(1),得

$$-0.8 = a \times 2^2,$$

所以

$$a = -0.2.$$

因此,函数表达式是 $y = -0.2x^2$.

根据这个函数表达式,容易画出模板的轮廓线.

请你自己画一画.

在解决一些实际问题时,往往需要根据某些条件求出函数表达式.

图象顶点坐标为 (h, k) 的二次函数表达式有怎样的形式?

例 6　一个二次函数的图象经过点 $(0, 1)$，它的顶点坐标为 $(8, 9)$，求这个二次函数的表达式.

分析　因为这个二次函数的图象的顶点坐标为 $(8, 9)$，因此，可以设函数表达式为

$$y = a(x - 8)^2 + 9.$$

根据它的图象经过点 $(0, 1)$，容易确定 a 的值.

请完成本例的解答.

例 7　一个二次函数的图象经过 $(0, 1)$、$(2, 4)$、$(3, 10)$ 三点，求这个二次函数的表达式.

解　设所求二次函数的表达式为 $y = ax^2 + bx + c$，由这个函数的图象经过点 $(0, 1)$，可得 $c = 1$. 又由于其图象经过 $(2, 4)$、$(3, 10)$ 两点，可得

$$\begin{cases} 4a + 2b + 1 = 4, \\ 9a + 3b + 1 = 10. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$a = \frac{3}{2},\ b = -\frac{3}{2}.$$

因此，所求二次函数的表达式为 $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$.

读一读

待定系数法

根据一定的条件求某些函数的表达式，常运用待定系数法. 回顾一下本节的问题 2 和例 6、例 7 以及八年级下册第 17 章相关例题的分析和解答，我们是怎样做的呢?

用待定系数法求函数表达式，通常分三步:

第一步，根据已知函数的特征(种类)，写出适当的形式，其中含有待定系数. 例如:

- 如果要求一次函数的表达式,通常设其形式为 $y=kx+b\ (k\neq 0)$,其中 k、b 是待定系数;
- 如果要求反比例函数的表达式,通常设其形式为 $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq 0)$,其中 k 是待定系数;
- 如果要求二次函数的表达式,通常设其形式为 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$,其中 a、b、c 是待定系数;
- 如果要求二次函数的表达式,并且还知道其图象的顶点坐标为 $(h,\ k)$,通常设其形式为 $y=a(x-h)^2+k\ (a\neq 0)$,其中 a 是待定系数.

第二步,根据其他已知条件,求出待定系数的值. 例如已知函数的一对或几对对应值(或函数的图象过某一个或几个已知点),可以将对应值(或图象上点的坐标)代入设定的形式,得到关于待定系数的方程或方程组,解之便可得到待定系数的值.

第三步,将求得的待定系数的值,代入设定的形式,便得所求的函数表达式.

待定系数法是一种重要的数学方法,不仅用于求函数表达式,而且在许多数学领域都有十分重要的应用.

练　习

1. 求图象为下列抛物线的二次函数的表达式:

(1) 抛物线的顶点在原点,且抛物线经过点 $(2,8)$;

(2) 抛物线的顶点坐标为 $(-1,\ -2)$,且抛物线经过点 $(1,10)$;

(3) 抛物线经过三点:$(0,\ -2)$,$(1,0)$,$(2,3)$.

2. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过三点:$(-1,\ -1)$,$(0,\ -2)$,$(1,\ 1)$.

(1) 求这条抛物线所对应的二次函数的表达式.

(2) 写出它的开口方向、对称轴和顶点坐标.

(3) 这个函数有最大值还是最小值? 这个值是多少?

3. 将抛物线 $y=-\dfrac{1}{2}x^2-x+3$ 向下平移 1 个单位,再向右平移 4 个单位,求所得抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标.

习题 26.2

1. 对下列各小题,在同一个平面直角坐标系中画出所列两个二次函数的图象:

(1) $y=\frac{1}{3}x^2+2$ 与 $y=\frac{1}{3}x^2-3$;

(2) $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2$ 与 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$;

(3) $y=-3(x-2)^2$ 与 $y=-3(x-2)^2+1$;

(4) $y=-(x+3)^2-1$ 与 $y=-(x+3)^2+2$.

2. 写出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标:

(1) $y=x^2-3x-4$;　　(2) $y=2-4x-x^2$;

(3) $y=\frac{1}{2}x^2-2x-1$;　　(4) $y=-\frac{3}{4}x^2+6x-7$;

(5) $y=2x^2-3x$;　　(6) $y=-2x^2-5x+7$.

3. 下列抛物线有最高点还是最低点?写出这些点的坐标:

(1) $y=4x^2-4x+1$;　　(2) $y=-4x^2-9$;

(3) $y=-4x^2+3x$;　　(4) $y=3x^2-5x+6$.

4. 求图象为下列抛物线的二次函数的表达式:

(1) 抛物线的顶点在原点,且抛物线经过点$(3,-27)$;

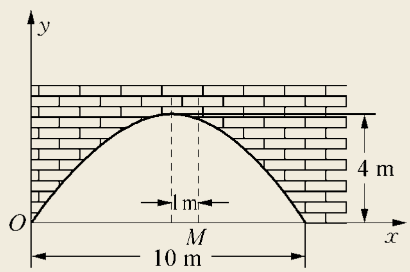
(2) 抛物线的顶点坐标为$(1,-2)$,且抛物线经过点$(2,3)$;

(3) 抛物线经过三点:$(-1,2)$, $(0,1)$, $(2,-7)$.

5. 有一个截面的边缘为抛物线的拱形桥洞,桥洞壁离水面的最大高度为 4 m,跨度为10 m,把截面图形放在如图所示的平面直角坐标系中.

(1) 求这条抛物线所对应的函数表达式.

(2) 如图,在对称轴右边 1 m 的点 M 处,对应的桥洞壁离水面的高是多少?



(第 5 题)

阅读材料

生活中的抛物线

你可能在生活中或在电视里看到过广场中的喷水池(如图1),那随着音乐声此起彼伏的水线,一会儿高高跃起,一会儿盘旋而下,令人心旷神怡!

图1

你注意过吗?那水线的形状与你所知道的二次函数的图象——抛物线是多么地相似!

有一种镜面是由抛物线绕对称轴旋转而形成的(如图2),它可以将某一点(称为抛物线的焦点,如图3中的点F)发出的光变成一束平行光线.你看到的探照灯就运用了这个原理,把光线照得远远的,这样人们就可以清楚地进行观察,给军事和我们的生活带来方便.

图2

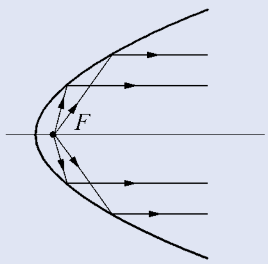
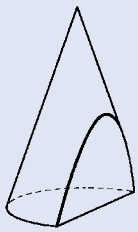


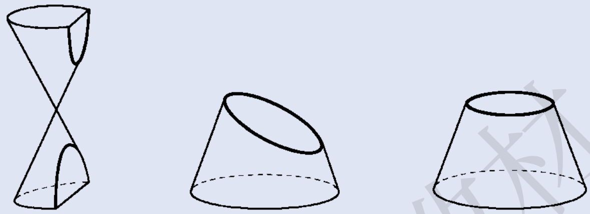
图3

用橡皮泥做一个圆锥，用刀沿着与其倾斜程度相一致的方向切下去，就可以得到抛物线（如图 4）. 若改变切的方向，你就会得到双曲线、椭圆或圆（如图 5）. 在以后的学习中，你将会认识这些“圆锥曲线”，并理解其中的道理.



抛物线

图 4



双曲线　　椭圆　　圆

图 5

26.3 实践与探索

生活中，我们常会遇到与二次函数及其图象有关的问题. 请与同伴共同研究，尝试解决下面的问题.

问题 1

某公园要建造一个圆形的喷水池，在水池中央垂直于水面竖一根柱子，在柱子的顶端 A 处安装一个喷头向外喷水. 柱子在水面以上部分的高度为 1.25 m. 水流在各个方向上沿形状相同的抛物线路径落下，如图 26.3.1(1) 所示.

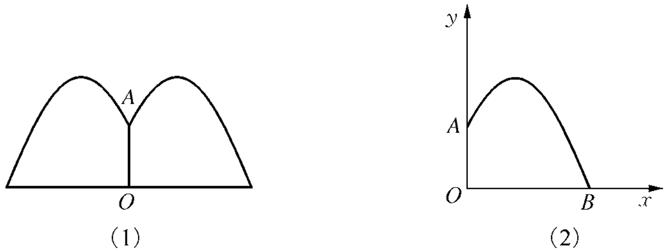


图 26.3.1

根据设计图纸已知：在图 26.3.1(2)所示的平面直角坐标系中，水流喷出的高度 y(m) 与水平距离 x(m) 之间的函数关系式是 $y=-x^2+2x+\frac{5}{4}$.

(1) 喷出的水流距水平面的最大高度是多少？

(2) 如果不计其他因素，为使水不溅落在水池外，那么水池的半径至少为多少时，才能使喷出的水流都落在水池内？

问题 2

一个涵洞的截面边缘是抛物线，如图 26.3.2 所示. 现测得当水面宽 $AB=1.6$ m 时，涵洞顶点与水面的距离为 2.4 m. 这时，离开水面 1.5 m 处，涵洞宽 ED 是多少？是否会超过 1 m？

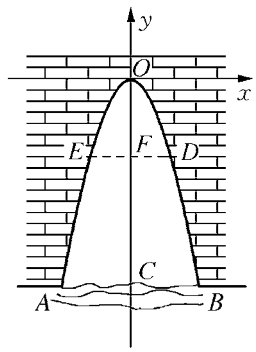


图 26.3.2

分析 根据已知条件，要求涵洞的宽 ED，只要求出 FD 的长度即可，即在图 26.3.2 所示的平面直角坐标系中，求出点 D 的横坐标.

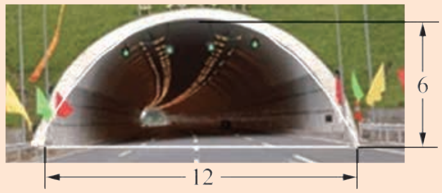
为什么？

因为点 D 在涵洞截面的抛物线上，又由已知条件可得到点 D 的纵坐标，所以利用抛物线所对应的函数表达式可以进一步算出点 D 的横坐标.

你会求吗？

练　习

如图，一个横截面为抛物线形的隧道底部宽 12 m、高 6 m. 车辆双向通行，规定车辆必须在中心线两侧、距离道路边缘 2 m 的范围内行驶，并保持车辆顶部与隧道有不少于$\frac{1}{3}$m 的空隙. 你能否根据这些要求，建立适当的平面直角坐标系，应用已有的函数知识，确定通过隧道车辆的高度限制？



问题 3

画出函数$y=x^2-x-\frac{3}{4}$的图象，根据图象回答下列问题：

（1）图象与 x 轴交点的坐标是什么？

（2）当 x 取何值时，$y=0$？这里 x 的取值与方程$x^2-x-\frac{3}{4}=0$有什么关系？

（3）你能从中得到什么启发？

通过解答以上问题，想一想：二次函数与一元二次方程、一元二次不等式有什么联系？

试一试

根据上述问题 3 画出的图象，继续回答下列问题：

（1）当 x 取何值时，$y<0$？当 x 取何值时，$y>0$？

（2）试用含有 x 的不等式来描述问题(1).

练　习

1. 画出函数 $y=x^2-2x-1$ 的图象，利用图象求方程 $x^2-2x-1=0$ 的根.（精确到 0.1）

2. 试画出适当的函数图象，利用图象解方程 $x^2=\frac{1}{2}x+3$.

问题 4

育才中学九年级(3)班的学生在上节课的练习中出现了争论：解方程 $x^2=\frac{1}{2}x+3$ 时，几乎所有学生都是将方程化为 $x^2-\frac{1}{2}x-3=0$，画出函数 $y=x^2-\frac{1}{2}x-3$ 的图象，观察它与 x 轴的交点，得出方程的根. 唯独小刘没有将方程移项，而是分别画出了函数 $y=x^2$ 和 $y=\frac{1}{2}x+3$ 的图象，如图 26.3.3，认为它们的交点 A、B 的横坐标 $-\frac{3}{2}$ 和 2 就是原方程的根.

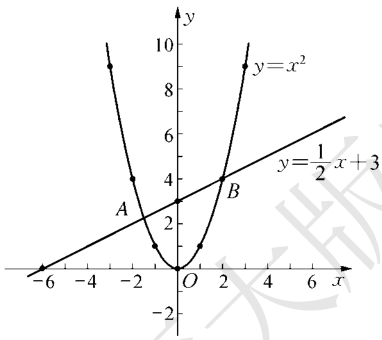


图 26.3.3

对于小刘提出的解法，同学们展开了热烈的讨论.

你对这两种解法有什么看法？请与你的同伴交流.

做一做

利用图 26.3.4，运用小刘的方法求下列方程的根，并检验小刘的方法是否合理：

(1) $x^2+x-1=0$（精确到 0.1）；

(2) $2x^2-3x-2=0$.

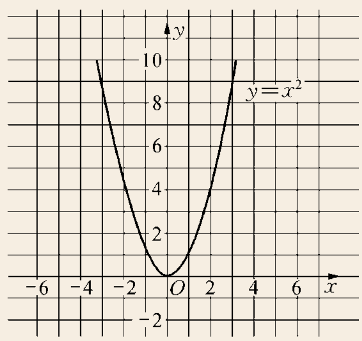
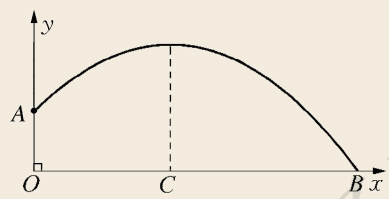


图 26.3.4

习题 26.3

1. 如图，一个运动员推铅球，铅球在点 A 处出手，出手时铅球离地面的高度约为 1.6 m，铅球在点 B 处落地. 铅球在运动员前 4 m 处（即 $OC=4$）达到最高点，最高点离地面的高度为 3.2 m. 已知铅球经过的路线是抛物线，试利用图示的平面直角坐标系算出这个运动员的成绩.（精确到 0.1 m）



（第 1 题）

2. 某商店开始时，将每件进价为 8 元的某种商品按每件 10 元出售，每天可售出 100 件. 店方想采用提高售价的办法来增加利润. 经试验，发现这种商品每件每提价 1 元，每天的销售量就会减少 10 件.

（1）写出出售该商品每天所得的利润 y（元）与售价 x（元/件）之间的函数关系式.

（2）每件售价定为多少元，才能使每天所得的利润最大？

3. 利用函数的图象求下列方程的根：

（1）$x^2+x-12=0$；

（2）$2x^2-x-3=0$.

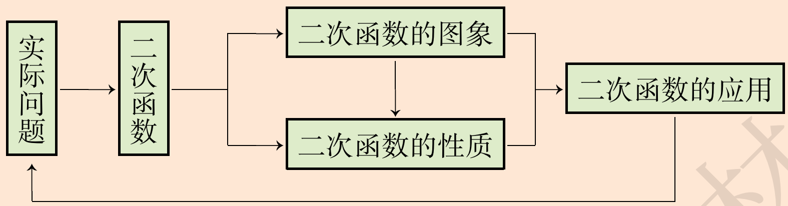
4. 利用函数的图象求下列方程组的解：

（1）$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}, \\ y=x^2; \end{cases}$

（2）$\begin{cases} y=-3x-1, \\ y=x^2-x. \end{cases}$

小结

一、知识结构



二、要点

1. 二次函数是反映现实世界运动变化规律、揭示变量间数量关系的又一种常见的数学模型. 解决实际问题时,要注意分析变量之间的对应关系,列出函数关系式,善于运用二次函数的图象和性质.

2. 研究二次函数的图象与性质,我们经历了从具体到抽象、从简单到复杂、从特殊到一般的过程. 首先研究最简单的二次函数 $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ 的图象与性质. 在此基础上,接着研究形如 $y = ax^2 + k$,$y = a(x-h)^2$ 以及 $y = a(x-h)^2 + k$ 的函数. 研究时,始终抓住它们的图象与函数 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 图象之间的联系.

对于一般形式的二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$,常利用配方法,将它化为 $y = a(x-h)^2 + k$ (h、k 为常数) 的形式. 这种形式的表达式,清楚地刻画了二次函数图象的特征(开口方向、对称轴、顶点坐标),反映了二次函数的性质. 要注意在研究具体实例的过程中,体验和理解这种化归(化未知为已知,变复杂为简单)的思想方法.

3. 二次函数的图象是研究二次函数性质的重要工具,观察并认识二次函数图象的特征(开口方向、对称轴、顶点坐标),由此发现和探索二次函数的一些性质,如:何时函数值随自变量的增大而增大(或减小)? 何时函数取得最大(或最小)值? 学习和研究二次函数,要善于运用图象,领会和运用数形结合的思想方法(包括利用二次函数的图象认识一元二次方程与一元二次不等式).

复习题

A 组

1. 填写下表：

抛物线	开口方向	对称轴	顶点坐标
$y=-\frac{3}{4}x^2$			
$y=2x^2-\frac{1}{4}$			
$y=-1.5(x+4)^2$			
$y=x^2-2x+1$			
$y=-x^2-4x+9$			
$y=\frac{1}{3}x^2-2x+2$			

2. 画出下列函数的图象，并根据图象写出函数的最大值或最小值：

(1) $y=1-3x^2$；　　(2) $y=x^2-4x+5$；

(3) $y=x^2-6x$；　　(4) $y=-3x^2+6x-1$.

3. 通过配方，写出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标：

(1) $y=x^2-2x-4$；　　(2) $y=1+6x-x^2$；

(3) $y=-x^2+4x$；　　(4) $y=\frac{1}{4}x^2-x+4$.

4. 已知函数 $y=2x^2-3x-2$，解答下列问题：

(1) 画出函数的图象；

(2) 观察图象，说出 x 取哪些值时，函数的值为 0.

5. 填空：

(1) 抛物线 $y=x^2-3x+2$ 与 y 轴的交点坐标是________，与 x 轴的交点坐标是________；

(2) 抛物线 $y=-2x^2+5x-3$ 与 y 轴的交点坐标是________，与 x 轴的交点坐标是________.

6. 已知抛物线 $y=ax^2+x+2$ 经过点$(-1,0)$，求 a 的值，并写出这条抛物线的顶点坐标.

7. 求图象为下列抛物线的二次函数的表达式：

(1) 抛物线经过$(2,0)$、$(0,-2)$和$(-2,3)$三点；

(2) 抛物线的顶点坐标是$(6,-4)$，且抛物线经过点$(4,-2)$.

B 组

8. 已知二次函数 $y=(x-2)^2-1$，解答下列问题：

(1) 先确定其图象的开口方向、对称轴和顶点坐标，再画出图象.

(2) 观察图象确定：x 取什么值时，①$y=0$；②$y>0$；③$y<0$.

9. 将抛物线 $y=3x^2$ 经过怎样的平移可以得到下列函数的图象？

(1) $y=3x^2-\sqrt{2}$；　(2) $y=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$；

(3) $y=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4$；　(4) $y=3x^2-6x$.

10. 观察下面的表格：

x	0	1	2
ax^2		1	
ax^2+bx+c	3		3

(1) 求 a、b、c 的值，并在表内的空格中填上正确的数；

(2) 设 $y=ax^2+bx+c$，求这个二次函数的图象的对称轴与顶点坐标.

11. 若抛物线 $y=x^2-x-2$ 经过点 $A(3,a)$ 和点 $B(b,0)$，求点 A、B 的坐标.

12. 行驶中的汽车刹车后，由于惯性还会继续向前滑行一段距离，这段距离称为“刹车距离”. 某车的刹车距离 s(m)与车速 x(km/h)之间有如下的函数关系：$s=0.01x+0.002x^2$. 现该车在限速 120 km/h 的高速公路上出了交通事故，事后测得其刹车距离为 35.1 m. 请推测刹车前，汽车是否超速？

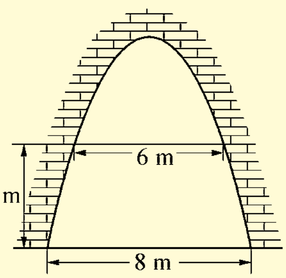
13. 已知二次函数的图象满足下列条件，求它的函数表达式：

(1) 经过原点和点$(-1,3)$，对称轴为直线 $x=4$；

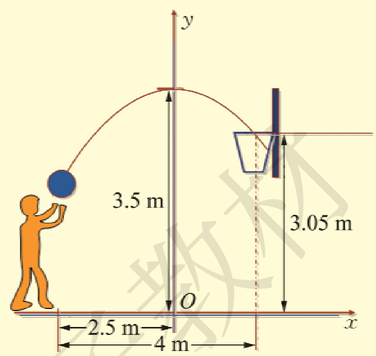
(2) 经过点$(1,1)$、$(-2,1)$和$(2,-3)$.

C 组

14. 如图,有一个横截面边缘为抛物线的水泥门洞. 门洞内的地面宽度为 8 m,两侧距地面 4 m 高处各有一盏灯,两灯间的水平距离为 6 m. 求这个门洞的高度.(精确到 0.1 m)



(第 14 题)



(第 15 题)

15. 如图,一位篮球运动员在距离篮圈中心水平距离 4 m 处跳起投篮,球沿一条抛物线运动,当球运动的水平距离为 2.5 m 时,达到最大高度 3.5 m,然后准确落入篮框内. 已知篮圈中心距离地面高度为 3.05 m,试解答下列问题:

(1) 建立图中所示的平面直角坐标系,求抛物线所对应的函数表达式.

(2) 这次跳投时,球出手处离地面多高?

第27章　圆

古希腊的数学家认为："一切立体图形中最美的是球形，一切平面图形中最美的是圆形．"它们的完美来自于中心对称，无论处于哪个位置，都具有同一形状．它们是最谐调、最匀称的图形．

与圆的对称性有关联的还有哪些性质呢？你想知道吗？请打开本章吧！

本章将带我们走进圆的世界，去了解圆的性质．

27.1 圆的认识

1. 圆的基本元素

我们已经学会将收集到的数据用扇形统计图加以描述. 图 27. 1. 1 就是反映某学校学生上学方式的扇形统计图.

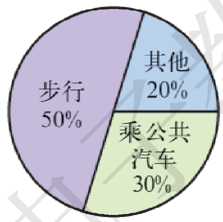


图 27. 1. 1

圆的位置由圆心确定，圆的大小由半径的长度确定. 半径相等的两个圆称为等圆.

我们是先用圆规画出一个圆，再将圆划分成一个个扇形来制作扇形统计图的.

图 27. 1. 2 中，线段 OA、OB、OC 都是圆的半径，通过圆心 O 的线段 AC 为直径. 这个以点 O 为圆心的圆叫做“圆 O”，记作“$\odot O$”.

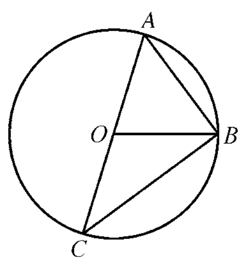


图 27. 1. 2

你知道优弧与劣弧的区别吗?

线段 AB、BC、AC 都是 $\odot O$ 中的**弦**(chord)，曲线 BC、BAC 都是$\odot O$ 中的弧，分别记为$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{BAC}$，其中像弧 BC 这样小于半圆周的圆弧叫做**劣弧**(minor arc)，像弧 BAC 这样大于半圆周的圆弧叫做**优弧**(major arc). 劣弧

用符号“⌒”和弧两端的字母表示，如前面的$\overset{\frown}{BC}$，读作“弧 BC”；优弧用符号“⌒”和三个字母表示，如前面的$\overset{\frown}{BAC}$，读作“弧 BAC”.

$\angle AOB$、$\angle BOC$ 就是我们已知道的**圆心角**(central angle)，圆心 O 是这些圆心角的顶点.

在同圆或等圆中，能够互相重合的弧叫做等弧.

练　习

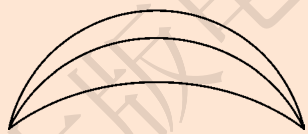
1. 根据下列条件作圆：

(1) 以定点 O 为圆心，作半径等于 2 cm 的圆；

(2) 以定点 O 为圆心作圆，使其过另一个定点 P；

(3) 先任作一条线段 AB，再作半径为 $\frac{1}{2}AB$ 的圆.

2. 比较下图中的三条弧，先估计它们所在圆的半径的大小关系，再用圆规验证你的结论是否正确.



(第 2 题)

2. 圆的对称性

我们已探索发现圆是一个旋转对称图形，无论绕圆心旋转多少度，它都能与自身重合，对称中心即为其圆心.

试一试

将图 27.1.3 中的扇形 AOB(着色部分)绕点 O 逆时针旋转某个角度，画出旋转之后的图形，比较前后两个图形，你能发现什么？

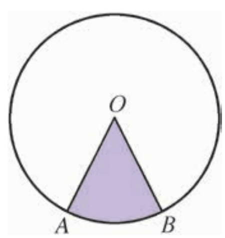


图 27.1.3

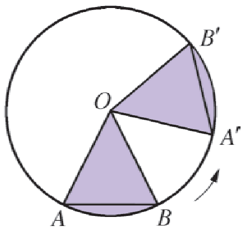


图 27.1.4

如图 27.1.4，扇形 AOB 旋转到扇形 $A'OB'$ 的位置. 我们可以发现，在旋转过程中，$\angle AOB = \angle A'OB'$，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$，$AB = A'B'$.

由于圆心角 $\angle AOB$（或弧 AB，或弦 AB）确定了扇形 AOB 的大小，所以，**在同一个圆中，如果圆心角相等，那么它们所对的弧相等，所对的弦相等.**

同样，也可以得到：

在同一个圆中，如果弧相等，那么它们所对的圆心角相等，所对的弦相等.

在同一个圆中，如果弦相等，那么它们所对的圆心角相等，所对的弧相等.

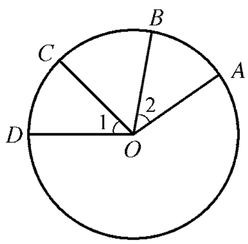


图 27.1.5

例 1　如图 27.1.5，在⊙O 中，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$，$\angle 1 = 45°$. 求 $\angle 2$ 的大小.

解　$\because\ \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$，

$\therefore\ \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{BC}$，

$\therefore\ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

$\therefore\ \angle 2 = \angle 1 = 45°$（在同一个圆中，如果弧相等，那么它们所对的圆心角相等）.

我们已探索发现：

圆是轴对称图形，它的任意一条直径所在的直线都是它的对称轴.

由此我们可以如图 27.1.6 那样，十分简捷地将一个圆 2 等分、4 等分、8 等分.

试试看，你还可以将圆多少等分？

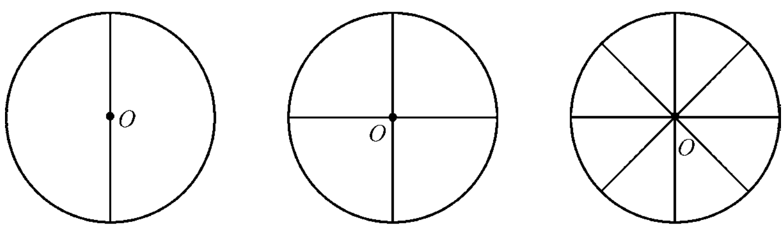
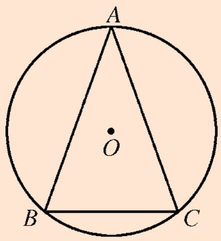


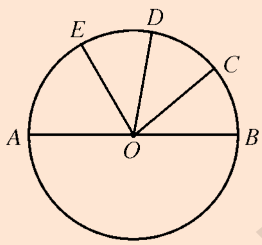
图 27.1.6

练 习

1. 如图,在⊙O 中,$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$, $\angle B=70°$. 求$\angle C$ 的大小.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图,AB 是直径,$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$, $\angle BOC=40°$. 求$\angle AOE$ 的大小.

试一试

如图 27. 1. 7,如果在圆形纸片上任意画一条垂直于直径 CD 的弦 AB,垂足为点 P,再将纸片沿着直径 CD 对折,分别比较 AP 与 BP、$\overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{BC}$,你能发现什么结论?

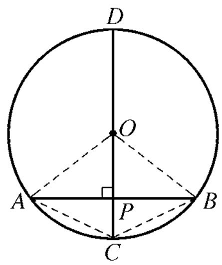


图 27. 1. 7

你一定能发现,对折后,AP 与 BP、$\overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{BC}$分别重合,即它们都是相等的. 我们可以用演绎推理证明这一结论.

已知:在⊙O 中,CD 是直径,AB 是弦, $AB\perp CD$,垂足为点 P.

求证:$AP=BP$, $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

证明 连结 CA、CB、OA、OB, 则 $OA=OB$, 即$\triangle AOB$ 是等腰三角形.

$\because$ $CD\perp AB$,

$\therefore$ $AP=BP$.

又$\because$ $CP=CP$,

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle APC\cong\mathrm{Rt}\triangle BPC$,

$\therefore$ $AC=BC$,

$\therefore$ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$(在同一个圆中,如果弦相等,那么它们所对的弧相等).

由此易得$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

即有：

*垂径定理　**垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧.**

你能说明其中的理由吗？

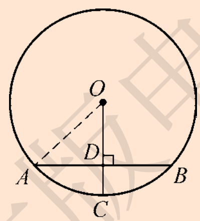
类似于上面的证明，我们还可以得到：

平分弦(不是直径)的直径垂直于这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧；

平分弧的直径垂直平分这条弧所对的弦.

练　习

1. 在⊙O中，弦AB的长为24 cm，圆心O到弦AB的距离(弦心距)为5 cm. 求⊙O的半径.
2. 如图，AB是⊙O的弦，半径$OC\perp AB$于点D，且$AB=8$ cm，$OC=5$ cm. 求DC的长.



(第2题)

3. 圆周角

你能说出圆周角与其他角的区别吗？

如图27.1.8(2)所示的两条射线所成的角叫做**圆周角**(angle of circumference).

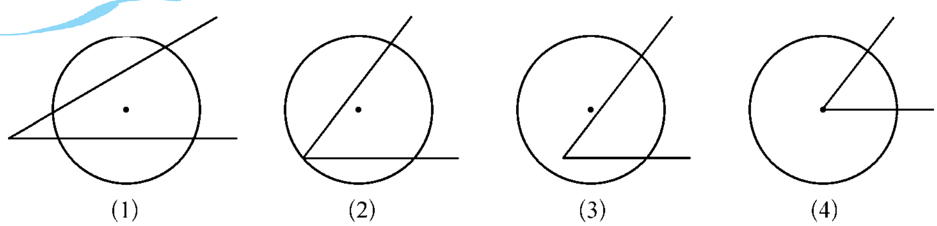


图27.1.8

图 27.1.8(1)、(3)、(4)中的两条射线所成的角都不是圆周角. 圆周角的顶点在圆上,它的两边与圆相交.

思考

如图 27.1.9,线段 AB 是⊙O 的直径,点 C 是⊙O 上的任意一点(除点 A、B 外),那么,$\angle ACB$ 就是直径 AB 所对的圆周角. 想想看,$\angle ACB$ 会是怎样的角?

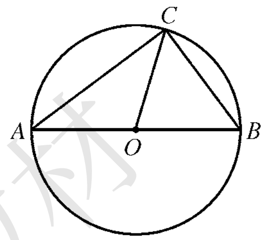


图 27.1.9

我们可以看到, $OA = OB = OC$, 所以 $\triangle AOC$、$\triangle BOC$ 都是等腰三角形,因而

$$\angle OAC = \angle OCA, \ \angle OBC = \angle OCB.$$

又因为 $\quad \angle OAC + \angle OBC + \angle ACB = 180°$,

所以 $\quad \angle ACB = \angle OCA + \angle OCB = \dfrac{180°}{2} = 90°$.

因此,不管点 C 在⊙O 上何处(除点 A、B 外),$\angle ACB$ 总等于 90°,即:

半圆或直径所对的圆周角都相等,都等于 90°(直角).

那么对于一般的弧所对的圆周角,又有什么规律呢?

如图 27.1.10,$\angle ACB$、$\angle ADB$ 都是弧 AB 所对的圆周角. $\angle AOB$ 是弧 AB 所对的圆心角. 这几个角有什么关系?

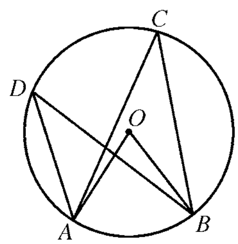


图 27.1.10

试一试

(1) 分别量一量图 27.1.10 中弧 AB 所对的两个圆周角的度数,比较一下. 再变动点 C 在圆周上的位置,看看圆周角的度数有没有变化. 你发现其中有什么规律吗?

(2) 分别量出图 27.1.10 中弧 AB 所对的圆周角和圆心角的度数,比较一下,你发现什么?

和同学交流一下,是不是都有相同的结果?

我们可以发现,圆周角的度数没有变化,并且圆周角的度数恰好为同弧所对的圆心角的度数的一半.

由上述操作可以猜想:在同一个圆中,一条弧所对的任意一个圆周角的大小都等于该弧所对的圆心角的一半.

为了证明这个猜想,如图 27.1.11 所示,可将圆对折,使折痕经过圆心 O 和圆周角的顶点 C,这时可能出现三种情况:(1)折痕是圆周角的一条边;(2)折痕在圆周角的内部;(3)折痕在圆周角的外部.

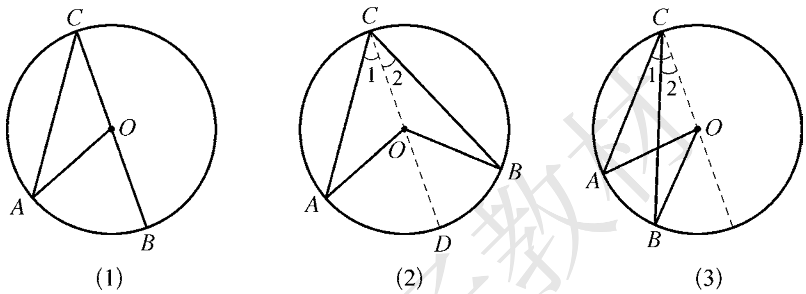


图 27.1.11

接下来,我们分别就这三种情况证明这一猜想.

已知:在 $\odot O$ 中,$\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角是 $\angle ACB$,所对的圆心角是 $\angle AOB$.

求证:$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$.

证明 (1) 圆心在 $\angle ACB$ 的边 CB 上.

$\because OA = OC$,

$\therefore \angle OAC = \angle ACB$.

$\because \angle AOB$ 是 $\triangle OAC$ 的外角,

$\therefore \angle AOB = \angle ACB + \angle OAC = 2\angle ACB$,

$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$.

(2) 圆心在 $\angle ACB$ 的内部.

作直径 CD. 利用(1)的结论,有

$$\angle 1 = \frac{1}{2}\angle AOD,\ \angle 2 = \frac{1}{2}\angle BOD,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\angle AOD + \angle BOD)$$

$$= \frac{1}{2}\angle AOB.$$

（3）圆心在∠ACB的外部.（略）

试试看，写出情况（3）的证明过程.

由此我们可以得到：

圆周角定理　在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于该弧所对的圆心角的一半；相等的圆周角所对的弧相等.

由圆周角定理，可以得到以下推论：

推论 1　90°的圆周角所对的弦是直径.（如图 27.1.12）

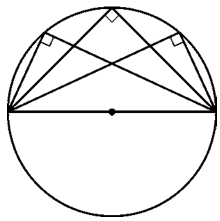


图 27.1.12

如果一个圆经过一个多边形的各个顶点，这个圆就叫做这个多边形的**外接圆**(circumcircle)，这个多边形叫做这个圆的**内接多边形**(inscribed polygon). 对于圆内接四边形，有另一个推论：

推论 2　圆内接四边形的对角互补.（如图 27.1.13）

你能说出这两个推论的证明过程吗?

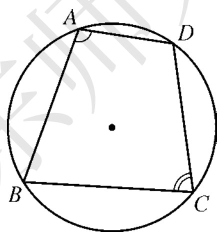


图 27.1.13

思考

图 27.1.14 是一个圆形零件，你能找到它的圆心位置吗？你有什么简捷的办法?

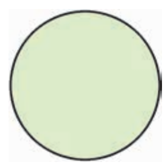


图 27.1.14

例 2 如图 27. 1. 15，AB 是 $\odot O$ 的直径，$\angle A=80°$. 求 $\angle ABC$ 的大小.

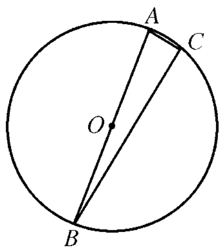


图 27. 1. 15

解 $\because$ AB 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore$ $\angle ACB=90°$（直径所对的圆周角等于 90°），

$\therefore$ $\angle ABC=180°-\angle A-\angle ACB$

$=180°-80°-90°=10°$.

例 3 试分别求出图 27. 1. 16 中 $\angle x$ 的大小.

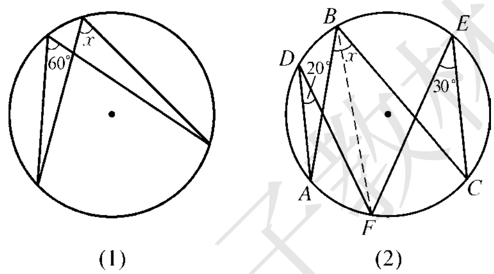


图 27. 1. 16

解 （1）$\because$ 同弧所对的圆周角相等，

$\therefore$ $\angle x=60°$.

（2）连结 BF.

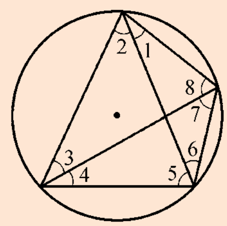
$\because$ 同弧所对的圆周角相等，

$\therefore$ $\angle ABF=\angle D=20°$，$\angle FBC=\angle E=30°$，

$\therefore$ $\angle x=\angle ABF+\angle FBC=50°$.

练 习

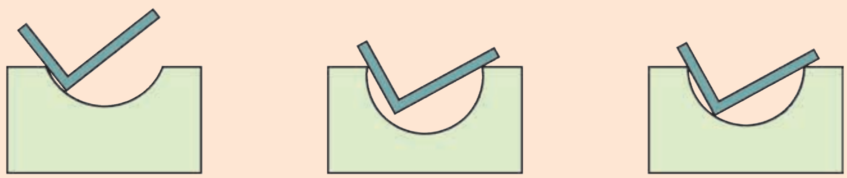
1. 试找出图中所有相等的圆周角.



（第 1 题）

2. 在圆中，一条弧所对的圆心角和圆周角分别为 $(2x+100)°$ 和 $(5x-30)°$，求这条弧所对的圆心角和圆周角的大小.

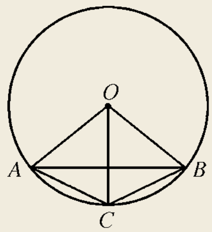
3. 使用曲尺检验工件的凹面，成半圆时为合格. 如图所示的三种情况中，哪种是合格的？哪种是不合格的？为什么？



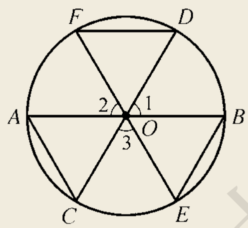
（第 3 题）

习题 27.1

1. 如图，AB、AC、BC 都是⊙O 的弦，且 $\angle CAB = \angle CBA$. 求证：$\angle COA = \angle COB$.



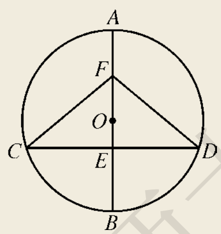
（第 1 题）



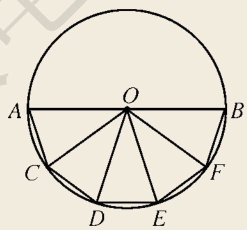
（第 2 题）

2. 如图，AB、CD、EF 都是⊙O 的直径，且 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$，弦 AC、EB、DF 是否相等？如果相等，请给出证明.

3. 如图，⊙O 的直径 AB 垂直于弦 CD，垂足为点 E，F 为 AB 上一点，$\angle CFD = 100°$. 求 $\angle CFE$ 与 $\angle DFE$ 的大小.



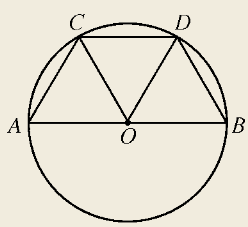
（第 3 题）



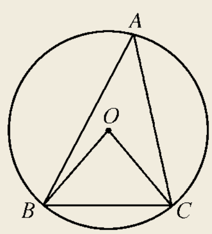
（第 4 题）

4. 如图，AB 是⊙O 的直径，AC、CD、DE、EF、FB 都是⊙O 的弦，且 $AC = CD = DE = EF = FB$. 求 $\angle AOC$ 与 $\angle COF$ 的大小.

5. 如图，AB 是⊙O 的直径，如果 $\angle COA = \angle DOB = 60°$，那么与线段 OA 相等的线段是________；与 $\overset{\frown}{AC}$ 相等的弧是________.



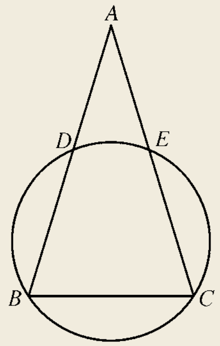
（第 5 题）



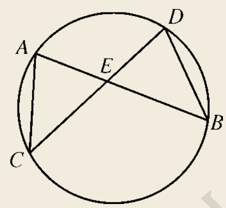
（第 6 题）

6. 如图，$\angle A$ 是⊙O 的圆周角，$\angle A = 40°$. 求 $\angle OBC$ 的大小.

7. 如图，$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CE}$. 求证：$AB=AC$.



（第 7 题）



（第 9 题）

8. 试证明：平分弦（不是直径）的直径垂直于这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧.

9. 如图，圆中两条弦 AB、CD 相交于点 E，且 $AB=CD$. 求证：$EB=EC$.

10. 圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的度数的比是 $2:3:6$. 求该四边形各内角的大小.

27.2 与圆有关的位置关系

1. 点与圆的位置关系

你玩过飞镖吗？它的靶子是由一些圆组成的，你知道击中靶子上不同位置的成绩是如何计算的吗？

这其中体现了平面内点与圆的位置关系.

我们已经知道圆是由所有与定点(圆心)的距离等于定长(半径)的点组成的平面图形. 如图 27.2.1,可知

点 P 在⊙O 上 $\Leftrightarrow OP = r$;

点 P 在⊙O 内 $\Leftrightarrow OP < r$;

点 P 在⊙O 外 $\Leftrightarrow OP > r$.

> ⇔是"等价于"的记号,表示左、右两端可以互相推出.

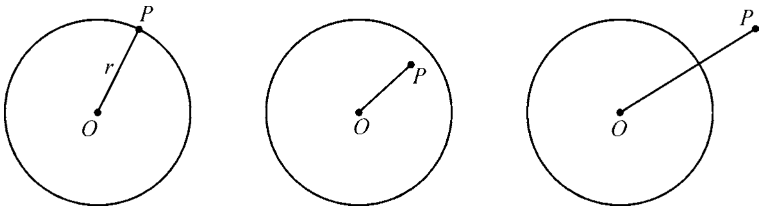


图 27.2.1

圆上的点有无数多个,那么多少个点就可以确定一个圆呢?

试一试

如图 27.2.2,画出过点 A 的圆.

> 过一点,可以画多少个圆?

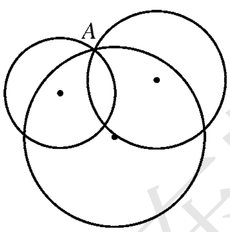


图 27.2.2

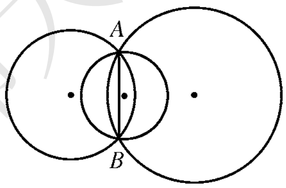


图 27.2.3

如图 27.2.3,画出过两点 A、B 的圆.

> 过两点,可以画多少个圆? 圆心在哪里?

思考

经过三点一定能画出一个圆吗? 如果能,那么如何找出这个圆的圆心呢?

如图 27.2.4,如果 A、B、C 三点不在同一条直线上,那么过 A、B 两点的圆的圆心必在线段 AB 的垂直

平分线上，而过 B、C 两点的圆的圆心必在线段 BC 的垂直平分线上. 此时，这两条垂直平分线一定相交，且只有一个交点，设交点为 O，则 $OA = OB = OC$. 于是，以点 O 为圆心、OA 为半径画圆，便可画出经过 A、B、C 三点的圆. 即有：

如果 A、B、C 三点在同一条直线上，能画出经过这三点的圆吗？

不在同一条直线上的三个点确定一个圆.

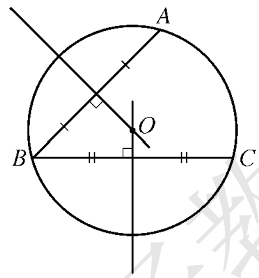


图 27.2.4

一个三角形的外接圆是唯一的.

也就是说，经过三角形的三个顶点可以画一个圆，并且只能画一个圆. 经过三角形三个顶点的圆就是这个三角形的外接圆. 三角形外接圆的圆心叫做这个三角形的**外心**（circumcenter）. 这个三角形叫做这个圆的**内接三角形**（inscribed triangle）. 三角形的外心就是三角形三条边的垂直平分线的交点.

练　习

1. 任意画一个三角形，然后作出这个三角形的外接圆.
2. 随意画出四个点，其中任何三点都不在同一条直线上，是否一定可以画出一个圆经过这四点？请举例说明.

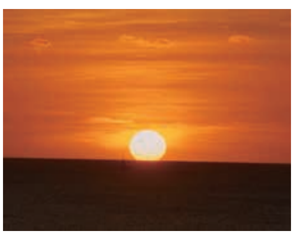


图 27.2.5

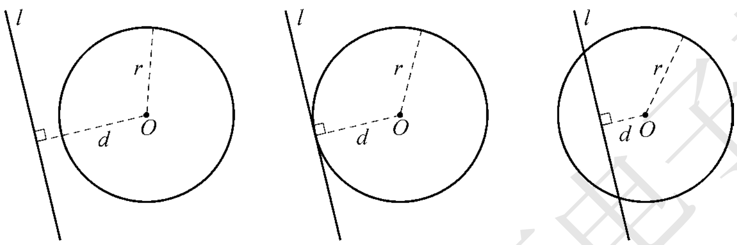
2. 直线与圆的位置关系

大家也许看过日出，如图 27.2.5 所示的照片中，如果我们把太阳看作一个圆，那么太阳在升起的过程中，和地平线会有怎样的位置关系？

试一试

在纸上画一条直线，把硬币的边缘看作圆，在纸上移动硬币，你能发现直线与圆的公共点个数的变化情况吗？如果直线与圆有公共点，那么公共点的个数最少有几个？最多有几个？

我们可以看到，直线与圆的位置关系有如图 27.2.6 所示的三种.



(1)　　(2)　　(3)

图 27.2.6

如果一条直线与一个圆没有公共点，那么就说这条直线与这个圆**相离**，如图 27.2.6(1) 所示.

如果一条直线与一个圆只有一个公共点，那么就说这条直线与这个圆**相切**，如图 27.2.6(2) 所示. 此时这条直线叫做圆的**切线**(tangent line)，这个公共点叫做**切点**.

如果一条直线与一个圆有两个公共点，那么就说这条直线与这个圆**相交**，如图 27.2.6(3) 所示. 此时这条直线叫做圆的**割线**.

直线与圆的位置关系只有相离、相切和相交三种.

如果⊙O 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d，利用 d 与 r 之间的关系即可判断直线与圆的位置关系.

依据直线与圆相离、相切和相交的定义，由图 27.2.6 容易看出：

直线 l 与⊙O 相离 $\Leftrightarrow d > r$；

直线 l 与⊙O 相切 $\Leftrightarrow d = r$；

直线 l 与⊙O 相交 $\Leftrightarrow d < r$.

由此可知：直线 l 与⊙O 有公共点 $\Leftrightarrow d \leqslant r$.

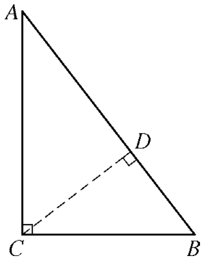


图 27.2.7

例 1 如图 27.2.7，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB = 90°$，$AC = 8$，$BC = 6$. 以点 C 为圆心，分别以下面给出的 r 为半径作圆，试问所作的圆与斜边 AB 所在的直线分别有怎样的位置关系？请说明理由.

(1) $r = 4$； (2) $r = 4.8$； (3) $r = 5$.

解 作斜边 AB 上的高 CD.

在 Rt△ABC 中，

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{AC^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{8^2 + 6^2} \\ &= 10. \end{aligned}$$

由三角形的面积公式，可得

$$CD \cdot AB = AC \cdot BC.$$

$$\therefore \quad CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{8 \times 6}{10} = 4.8.$$

即点 C 到直线 AB 的距离 $d = 4.8$.

(1) 当 $r = 4$ 时，$d > r$，因此 $\odot C$ 与 AB 相离；

(2) 当 $r = 4.8$ 时，$d = r$，因此 $\odot C$ 与 AB 相切；

(3) 当 $r = 5$ 时，$d < r$，因此 $\odot C$ 与 AB 相交.

当 $r = 8$、9 时，$\odot C$ 和线段 AB 有几个公共点？

练 习

1. 圆的半径为 5 cm，当圆心到直线 l 的距离为下列数值时，直线 l 和圆分别有几个公共点？它们与圆有怎样的位置关系？

   (1) 4 cm； (2) 5 cm； (3) 6 cm.

2. 已知圆的直径为 10 cm，直线 l 和圆只有一个公共点. 求圆心到直线 l 的距离.

3. 如果 $\odot O$ 的直径为 10 cm，圆心 O 到直线 AB 的距离为 10 cm，那么 $\odot O$ 与直线 AB 有怎样的位置关系？

3. 切线

下雨天，当你转动雨伞，你会发现雨伞上的水珠顺着伞面的边缘飞出. 仔细观察一下，水珠是顺着什么样的方向飞出的？

这就是我们所要研究的直线与圆相切的情况.

做一做

如图 27.2.8，画一个圆 O 及半径 OA，经过 $\odot O$ 的半径 OA 的外端点 A 画一条直线 l 垂直于这条半径，这条直线与圆有几个公共点？

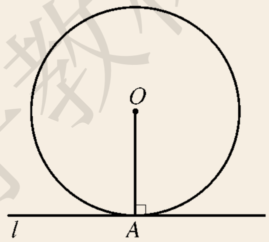


图 27.2.8

从图 27.2.8 可以看出，对直线 l 上除点 A 外的任一点 P，必有 $OP > OA$，即点 P 位于圆外，从而可知直线与圆只有一个公共点，所以直线 l 是圆的切线. 由此可得下面判定切线的方法：

雨伞上的水珠就是沿着切线方向向外飞出的.

切线的判定定理　经过圆的半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

你能说出过圆上任意一点画圆的切线的方法吗？

如图 27.2.9，如果直线 l 是 $\odot O$ 的切线，点 A 为切点，那么半径 OA 与 l 垂直吗？

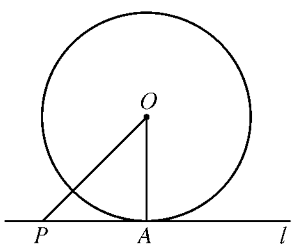


图 27.2.9

由于 l 是 $\odot O$ 的切线，圆心 O 到直线 l 的距离等于半径，所以半径 OA 就是圆心 O 到直线 l 的垂线段，即 $l \perp OA$，因此得到：

切线的性质定理　圆的切线垂直于经过切点的半径.

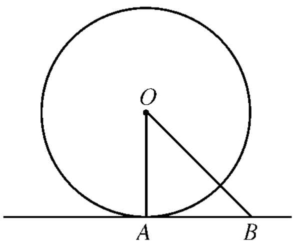


图 27.2.10

例 2　如图 27.2.10，直线 AB 经过 $\odot O$ 上的点 A，且 $AB = OA$，$\angle OBA = 45°$. 求证：直线 AB 是 $\odot O$ 的切线.

证明　$\because$ $AB = OA$，$\angle OBA = 45°$，

$\therefore$ $\angle AOB = \angle OBA = 45°$，

$\therefore$ $\angle OAB = 90°$.

又 $\because$ 点 A 在圆上，

$\therefore$ 直线 AB 是 $\odot O$ 的切线（切线的判定定理）.

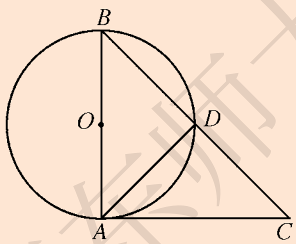
练　习

1. 试判断下列命题是否正确，若正确，请给出证明；若不正确，请举例说明.

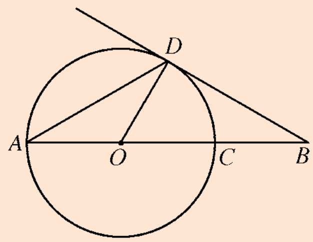
   （1）垂直于圆的半径的直线一定是这个圆的切线；

   （2）过圆的半径外端的直线一定是这个圆的切线.

2. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，$\angle B = \angle CAD$. 求证：AC 是 $\odot O$ 的切线.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，线段 AB 经过圆心 O，交 $\odot O$ 于点 A、C，AD 为 $\odot O$ 的弦，连结 BD，$\angle BAD = \angle B = 30°$，直线 BD 是 $\odot O$ 的切线吗？如果是，请给出证明.

4. 在 $\odot O$ 上任取一点 A，过点 A 用三角尺画出 $\odot O$ 的一条切线.

如图 27.2.11，PA、PB 为 $\odot O$ 的两条切线，点 A、B 为切点.

我们把圆的切线上某一点与切点之间的线段的长叫做这点到圆的切线长. 如图 27.2.11，线段 PA、PB 的长就是点 P 到 $\odot O$ 的切线长.

探索

在纸上画出如图 27.2.11 的图形，沿着直线 PO 将纸对折，由于直线 PO 经过圆心 O，所以 PO 是圆的一条对称轴，两半圆重合. PA 与 PB、$\angle APO$ 与 $\angle BPO$ 有什么关系？

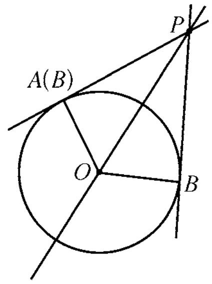


图 27.2.11

我们可以发现：

$PA = PB$, $\angle APO = \angle BPO$.

即有：

* **切线长定理　过圆外一点所画的圆的两条切线，它们的切线长相等. 这一点和圆心的连线平分这两条切线的夹角.**

我们可以用演绎推理证明这一结论.

已知：如图 27.2.12，PA、PB 是 $\odot O$ 的两条切线，切点分别为 A、B.

求证：$PA = PB$, $\angle APO = \angle BPO$.

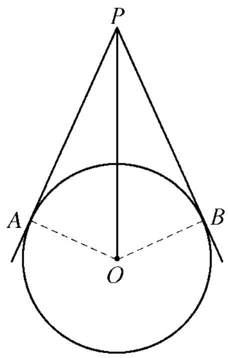


图 27.2.12

证明　连结 OA 和 OB.

$\because$ PA 切 $\odot O$ 于点 A,

$\therefore$ $OA \perp PA$.

同理可得 $OB \perp PB$.

$\because$ $OA = OB$,

$OP = OP$,

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle OAP \cong \mathrm{Rt}\triangle OBP$,

$\therefore$ $PA = PB$, $\angle APO = \angle BPO$.

读一读

对于“切线长定理”的认识，我们经历了两个阶段：首先是根据实例，由特殊到一般，运用动态的变换方法，通过合情推理，发现图形的性质；然后通过演绎推理证明这一性质. 这两种推理相辅相成，都是研究图形性质的有效工具.

试一试

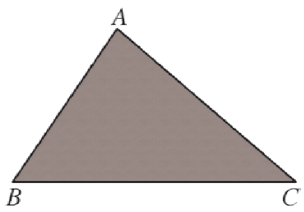


图 27.2.13

如图 27.2.13 是一张三角形铁皮,如何在它上面截取一个面积最大的圆形铁皮?

可能大家都会想到这样一个圆,它与三角形的三条边都相切,那么这样的圆存在吗? 如果存在,我们又如何把它画出来呢?

如图 27.2.14,在 $\triangle ABC$ 中,如果有一个圆与 AB、AC、BC 都相切,那么该圆的圆心到这三边的距离都等于半径. 如何找到这个圆心呢?

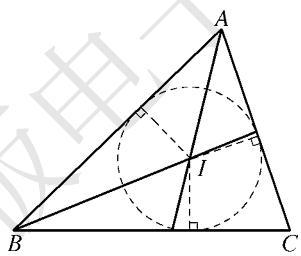


图 27.2.14

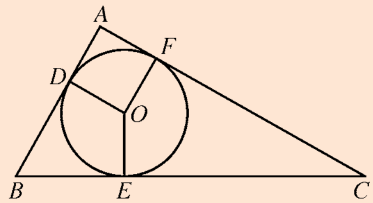
因为与 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 都相切的圆的圆心到边 AB、AC 的距离相等,所以圆心一定在 $\angle BAC$ 的平分线上. 同理,和边 AB、BC 都相切的圆的圆心一定在 $\angle ABC$ 的平分线上. 设这两条角平分线的交点为 I,则该点到三边的距离都相等. 因此以点 I 为圆心、该点到 AB 的距离为半径作圆,$\odot I$ 必与 $\triangle ABC$ 的三条边都相切. 因为点 I 是唯一的,所以 $\odot I$ 也是唯一的.

一个三角形的内切圆是唯一的.

与三角形各边都相切的圆叫做这个三角形的**内切圆**(inscribed circle). 三角形的内切圆的圆心叫做这个三角形的**内心**(incenter). 这个三角形叫做这个圆的**外切三角形**(externally tangent triangle). 三角形的内心就是三角形三条角平分线的交点.

练　习

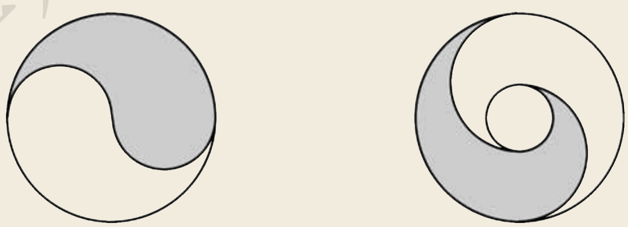
1. 如图，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，与 AB、BC、CA 分别相切于点 D、E、F，$\angle DOE=120°$，$\angle EOF=150°$. 求 $\triangle ABC$ 的三个内角的大小.
2. $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 与 AB、BC、CA 分别相切于点 D、E、F，且 $AB=5$ cm，$BC=9$ cm，$CA=6$ cm. 求 AD、BE 和 CF 的长.
3. 任意画一个三角形，然后作出它的内切圆.



（第 1 题）

习题 27.2

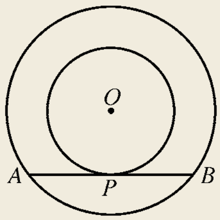
1. 已知$\odot O$ 的半径为 10 cm，根据下列点 P 到圆心的距离，判断点 P 与圆的位置关系，并说明理由：
   （1）8 cm；　（2）10 cm；　（3）12 cm.
2. 已知线段 $AB=6$ cm.
   （1）画半径为 4 cm 的圆，使它经过 A、B 两点，这样的圆能画几个？
   （2）画半径为 3 cm 的圆，使它经过 A、B 两点，这样的圆能画几个？
   （3）画半径为 2 cm 的圆，使它经过 A、B 两点，这样的圆能画几个？
3. 分别画一个锐角三角形、直角三角形和钝角三角形，再画出它们的外接圆，观察并叙述各个外心与它们所对应的三角形的位置关系.
4. 如图所示的图形主要是用圆规画出的，请你试着用圆规画出它们.


（第 4 题）

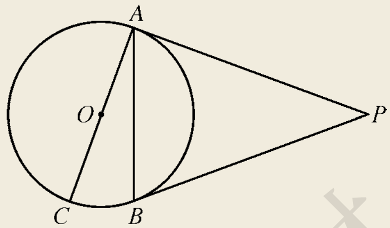
5. 已知圆的直径为 20 cm，根据下列圆心到直线 l 的距离，分别判断直线 l 与圆有几个公共点，并说明理由：
   （1）8 cm；　（2）10 cm；　（3）12 cm.

6. $\triangle ABC$ 的周长为 l,内切圆的半径为 r. 求该三角形的面积 S.

7. 如图,以点 O 为圆心的两个同心圆中,大圆的弦 AB 是小圆的切线,点 P 为切点. 求证:$AP = BP$.



(第 7 题)



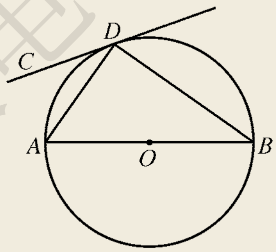
(第 9 题)

8. $\triangle ABC$ 的面积为 4 cm^2,周长为 10 cm. 求该三角形的内切圆的半径.

9. 如图,PA、PB 是 $\odot O$ 的切线,A、B 为切点,AC 是 $\odot O$ 的直径,$\angle BAC = 20°$. 求 $\angle P$ 的大小.

10. 试用多种方法找出如图所示的破残轮片的圆心位置.

(第 10 题)



(第 11 题)

11. 如图,AB 为 $\odot O$ 的直径,如果圆上点 D 恰使 $\angle ADC = \angle B$,直线 CD 与 $\odot O$ 相切吗?若相切,请给出证明.

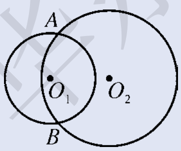
阅读材料

圆与圆的位置关系

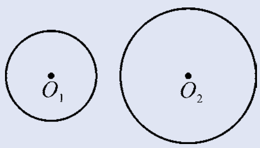
小时候，你玩过吹泡泡吗？那一定十分好玩吧！五颜六色，大大小小，随风飘荡，就如下面的照片一样，真是令人难忘！

看！照片上的泡泡图形都可看成我们所熟悉的圆.

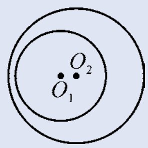
有的像一对好朋友互相交在一起的，叫做“相交”；有的分离两处遥遥相望的，叫做“外离”；有的像大哥哥为保护小弟弟将它含在里面的，叫做“内含”；有的恰好哥俩同一个圆心的，叫做“同心圆”；还有的两圆若即若离，只有一点粘连的，则称为“相切”，相切又有“外切”和“内切”两种情况.



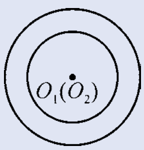
相交



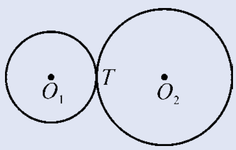
外离



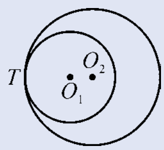
内含



同心圆



外切



内切

生活中,我们还可以看到不少与两圆位置关系有关的情景,如下列图形所示.

看到这里,你不免会想,那该如何区分这几种不同的情况呢?

从图形来看,你应该发现它们之间公共点的个数不一样吧:有的没有,有的只有一个,最多的有两个.我们再用经过两圆圆心的一条直线将它们串起来,你是否能发现两圆圆心的距离(简称为圆心距)d 与两圆半径 r_1、r_2($r_1 > r_2$)之间的关系?离得最远的“外离”,明显有 $d > r_1 + r_2$,那么其他情况呢?画一画,你就清楚了.

请你再回过头去观察那幅吹泡泡照片,相信你一定会有新的感觉和新的发现.

你看,变化无穷的万千世界充满着数学美,数与形组成的数学世界给我们带来了快乐!

27.3 圆中的计算问题

问题

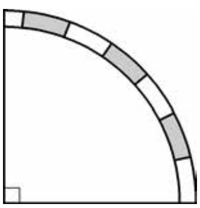


图 27.3.1

如图 27.3.1 是圆弧形状的铁轨示意图,其中铁轨的半径为 100 m,圆心角为 90°. 你能求出这段铁轨的长度吗?(精确到 0.01 m)

我们容易看出这段铁轨是圆周长的 $\frac{1}{4}$,所以,铁轨的长度 $l = \dfrac{2 \times \pi \times 100}{4} = 50\pi \approx 157.08$(m).

如果圆心角是任意的角度,如何计算它所对的弧长呢?

思考

图 27.3.2 中各圆心角所对的弧长分别是圆周长的几分之几?

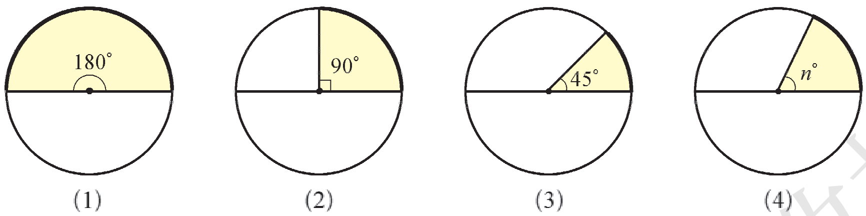


图 27.3.2

探索

(1) 圆心角是 180°,占整个周角的$\frac{180}{360}$,因此它所对的弧长是圆周长的________;

(2) 圆心角是 90°,占整个周角的$\frac{90}{360}$,因此它所对的弧长是圆周长的________;

(3) 圆心角是 45°,占整个周角的________,因此它所对的弧长是圆周长的________;

(4) 圆心角是 1°,占整个周角的________,因此它所对的弧长是圆周长的________;

(5) 圆心角是 n°,占整个周角的________,因此它所对的弧长是圆周长的________.

如果弧长为 l,圆心角的度数为 n,圆的半径为 r,那么,弧长为

$$l = \frac{n}{360} \cdot 2\pi r = \frac{n\pi r}{180}.$$

因此弧长的计算公式为

$$l = \frac{n\pi r}{180}.$$

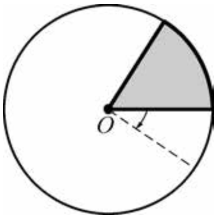


图 27.3.3

我们知道,扇形是由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧围成的图形.

如图 27.3.3,将组成扇形的一条半径绕着圆心旋转,可以发现,扇形的面积与组成扇形的弧所对的圆心角的大小有关. 圆心角越大,扇形的面积也越大. 怎样计算圆心角为 $n°$的扇形面积呢?

我们知道,如果设圆的面积为 S,半径为 r,那么圆面积的计算公式为 $S=\pi r^2$,半径为 r 的扇形的面积与相同半径的圆的面积有没有关系呢?

思考

如图 27.3.4 所示的各扇形面积分别是圆面积的几分之几?

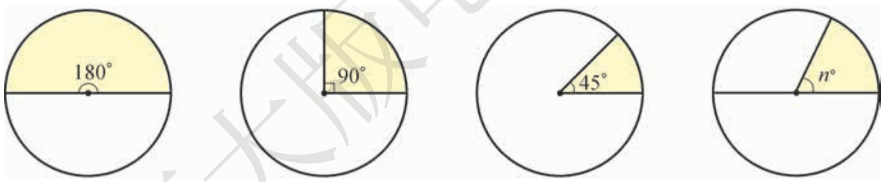


图 27.3.4

探索

(1) 圆心角是 180°,占整个周角的$\frac{180}{360}$,因此圆心角是 180°的扇形面积是圆面积的________;

(2) 圆心角是 90°,占整个周角的________,因此圆心角是 90°的扇形面积是圆面积的________;

(3) 圆心角是 45°,占整个周角的________,因此圆心角是 45°的扇形面积是圆面积的________;

(4) 圆心角是 1°,占整个周角的________,因此圆心角是 1°的扇形面积是圆面积的________;

（5）圆心角是 $n°$，占整个周角的________，因此圆心角是 $n°$的扇形面积是圆面积的________.

如果设圆心角是 $n°$的扇形面积为 S，圆的半径为 r，那么扇形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{n}{360} \cdot \pi r^2 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{n\pi r}{180} \times r \\ &= \frac{1}{2} lr. \end{aligned}$$

因此，扇形面积的计算公式为

$$S = \frac{n\pi r^2}{360} \text{ 或 } S = \frac{1}{2} lr.$$

例 1 如图 27.3.5，圆心角为 60°的扇形的半径为 10 cm. 求这个扇形的面积和周长.（精确到 0.01 cm^2 和 0.01 cm）

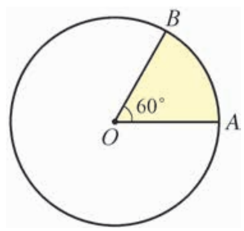


图 27.3.5

解 因为 $n = 60$，$r = 10$ cm，所以扇形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{n\pi r^2}{360} \\ &= \frac{60 \times \pi \times 10^2}{360} \\ &= \frac{50\pi}{3} \\ &\approx 52.36(\text{cm}^2). \end{aligned}$$

扇形的周长为

$$\begin{aligned} l &= 2r + \frac{n\pi r}{180} \\ &= 20 + \frac{60 \times \pi \times 10}{180} \\ &= 20 + \frac{10\pi}{3} \\ &\approx 30.47(\text{cm}). \end{aligned}$$

练　习

1. 已知圆弧所在圆的半径为 50 cm，所对的圆心角为 60°. 求该圆弧的长度.（精确到 0.01 cm）

2. 填空：

（1）如果扇形的圆心角是 230°，那么这个扇形的面积与它所在圆的面积之比值是________；

（2）扇形的面积是它所在圆的面积的$\frac{2}{3}$，这个扇形的圆心角的大小是________°；

（3）扇形的面积是 S，它的半径是 r，这个扇形的弧长是________.

我们知道圆锥是由一个底面和一个侧面围成的，如图 27. 3. 6. 我们把圆锥底面圆周上任意一点与圆锥顶点的连线叫做圆锥的母线，连结顶点与底面圆心的线段叫做圆锥的高.

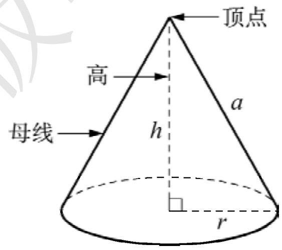


图 27. 3. 6

圆锥的侧面展开图是一个扇形.

如图 27. 3. 7，沿着圆锥的母线，把圆锥的侧面展开，得到一个扇形，这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长，而扇形的半径等于圆锥的母线的长.

想一想

底面半径为 r、高为 h 的圆柱的侧面展开图是什么形状？

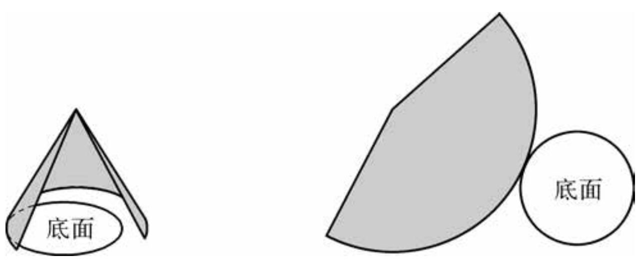


图 27. 3. 7

例 2 一个圆锥的侧面展开图是一个圆心角为 $120°$、弧长为 20π 的扇形. 试求该圆锥底面的半径及它的母线的长.

解 设该圆锥底面的半径为 r,母线的长为 a.

则

$$2\pi r = 20\pi,$$

可得

$$r = 10.$$

又

$$20\pi = \frac{120 \times \pi \times a}{180},$$

可得

$$a = 30.$$

练 习

1. 一个圆柱形水池的底面半径为 4 m,池深为 1.2 m. 在池的内壁与底面抹上水泥,抹水泥部分的面积是多少平方米?(精确到 0.01 m^2)
2. 已知一个圆锥的底面半径为 2 cm,母线长为 5 cm,那么它的侧面展开图是一个圆心角为多少的扇形? 试画出它的示意图.

习题 27.3

1. 钟面上分针的长为 5 cm,经过 20 min,分针在钟面上扫过的面积是多少平方厘米?(精确到 0.01 cm^2)
2. 火车机车上主动轮的直径为 1.2 m,如果主动轮每分钟转 400 圈,那么火车每小时行多少千米?(精确到 0.1 km)
3. 将一个边长为 a 的正方形纸片卷起来,恰好可以围住一个圆柱的侧面;又在这个正方形纸片上剪下最大的一个扇形,卷起来,恰好可以围住一个圆锥的侧面. 那么该圆柱与圆锥两者的底面半径之比为多少?(结果保留 π)
4. 如果两个扇形的圆心角相等,大扇形的半径是小扇形半径的 2 倍,那么大扇形的面积是小扇形面积的多少倍?

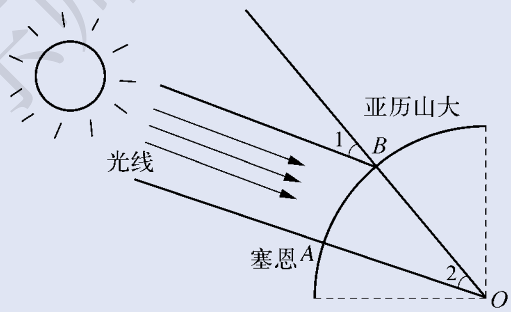
阅读材料

古希腊人对大地的测量

公元前 240 年前后，在希腊的亚历山大城图书馆当馆长的埃拉托色尼(Eratosthenes)注意到在夏至的中午，阳光可以直射到位于亚历山大附近的小镇塞恩(Syene)的一口枯井的井底，直立的物体没有影子，也就是说太阳正好悬挂在塞恩城的正上方. 作为一名科学家，他想知道亚历山大城是否也是相同的情况，结果他发现在同一天、同一时间亚历山大城地面上的物体都有一段很短的影子，阳光是斜射进亚历山大城的. 为什么会出现这种现象？埃拉托色尼判定，这是因为地面是弯曲的. 他测得有关数据，证实了他的推测，而且求得了地球圆周的长度.

他是如何测量的呢？如图所示，由于太阳距离地球很远，从太阳射来的光线可以看作平行线. 假设光线与亚历山大城和地心的连线所成的角为$\angle 1$，塞恩与亚历山大两地和地心的连线的夹角为$\angle 2$($\angle 2$是一个圆心角)，$\angle 1$和$\angle 2$有什么关系呢？如果$\angle 1$的度数和两地间的距离$\overset{\frown}{AB}$的长度都是可以测量的，这样再利用圆的有关知识，地球圆周的长度就可以大致算出来了.

你能说说具体的计算方法吗？试试看.



27.4 正多边形和圆

我们已经知道,各条边相等、各个角也相等的多边形是正多边形. 等边三角形是正三角形,正方形是正四边形. 正多边形都是轴对称图形,在日常生活和美术设计中都很常见.

做一做

分别画出图 27. 4. 1 中各正多边形的对称轴. 看看能发现什么结果?

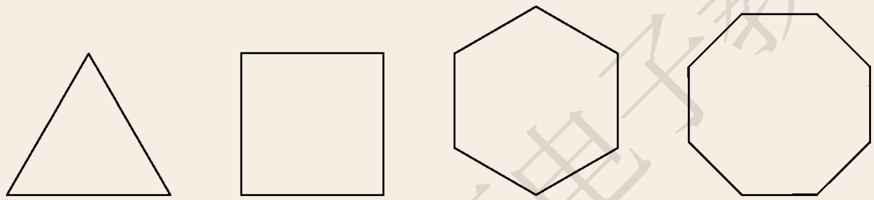


图 27. 4. 1

以正五边形为例,如图 27. 4. 2,我们发现正五边形有五条对称轴,而且这些对称轴都交于一点 O. 根据轴对称的性质,我们知道这些对称轴是正五边形各边的垂直平分线,因而点 O 到正五边形各个顶点的距离相等,记为 R. 那么以点 O 为圆心、R 为半径的圆就过正五边形的各个顶点,它是该正五边形的外接圆(如图 27. 4. 3).

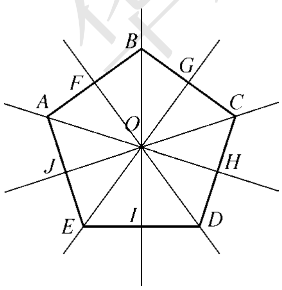


图 27. 4. 2

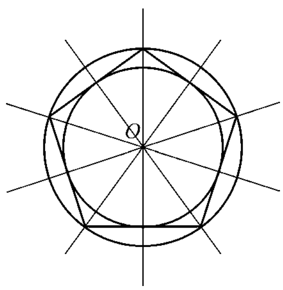


图 27. 4. 3

另外,这些对称轴也是正五边形各内角的平分线,根据角平分线的性质,点 O 到各边的距离都相等,记为 r,

那么以点 O 为圆心、r 为半径的圆就与正五边形的各条边都相切，它是正五边形的内切圆(如图 27.4.3).

如图 27.4.4 和图 27.4.5，其他正多边形也有类似的结论.

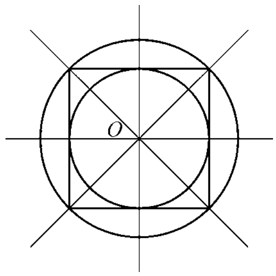


图 27.4.4

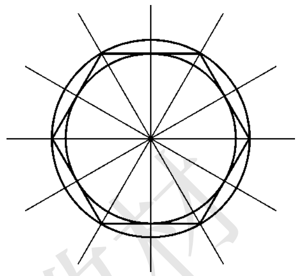


图 27.4.5

由此我们得到：

任何正多边形都有一个外接圆和一个内切圆.

这两个圆有公共的圆心，称其为正多边形的中心. 外接圆的半径叫做正多边形的半径，内切圆的半径叫做正多边形的边心距. 正多边形每一条边所对的外接圆的圆心角都相等，叫做正多边形的中心角.

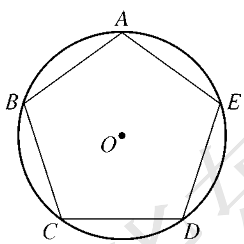


图 27.4.6

如图 27.4.6，在 $\odot O$ 中，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EA}$，那么弦 AB、BC、CD、DE、EA 之间有什么关系？$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$、$\angle E$ 之间又有什么关系？

在同一个圆中，等弧对等弦，因此 $AB = BC = CD = DE = EA$，而根据圆周角定理，有 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E$，因此五边形 $ABCDE$ 是正五边形.

这样我们就得到下面正多边形和圆的关系：

把圆分成 $n(n>2)$ 等份，依次连结各分点所得的多边形是这个圆的一个内接正 n 边形.

例 利用尺规作图，作出已知圆的内接正方形和内接正六边形.

解 内接正方形的作法：

(1) 用直尺任作圆的一条直径 AC；

(2) 作与直径 AC 垂直的直径 BD；

（3）顺次连结所得的圆上四点，则四边形 $ABCD$ 即为所求作的正方形，如图 27.4.7.

内接正六边形的作法：

（1）用直尺任作圆的一条直径 AD；

（2）以点 A 为圆心、OA 为半径作圆，与⊙O 交于点 B、F；

（3）以点 D 为圆心、OD 为半径作圆，与⊙O 交于点 C、E；

（4）顺次连结所得的圆上六点，则六边形 $ABCDEF$ 即为所求作的正六边形，如图 27.4.8.

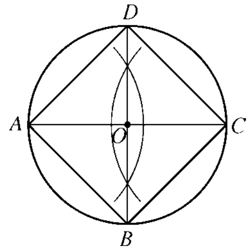


图 27.4.7

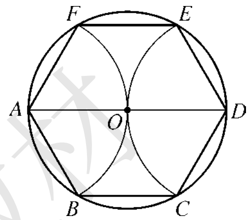


图 27.4.8

试一试

如图 27.4.9，从圆上某一点开始，依次以圆的半径长为半径作圆，也可作出圆的内接正六边形.

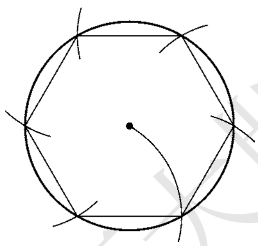


图 27.4.9

想一想，为什么这两种方法作出来的图形都是正六边形？

练 习

1. 举例说明各边相等的多边形不一定是正多边形.
2. 举例说明各角相等的多边形不一定是正多边形.
3. 正 n 边形共有多少条对称轴？

习题 27.4

1. 使用量角器画出圆的内接正九边形.
2. 试用尺规作图，作出圆的内接正十二边形.
3. 如果正 n 边形的中心角等于 24°，求这个正多边形的边数.

阅读材料

圆周率 π

你还记得圆周率 π 吗?

小时候,你可能滚过圆铁环.当你将圆铁环在地上滚动一周后,圆铁环在地上滚动的痕迹有多长呢?现在你知道,这就是圆铁环的周长 $C=2\pi R$. 你还知道圆的面积 $S=\pi R^2$.

这里的 π 是圆的周长与直径的比值,是我们已认识的圆周率,它是一个常数,也就是说,无论什么样的圆,周长与直径的比值都是一样的,都等于圆周率 π.

对于圆周率 π,我国古代数学家作出了巨大贡献.东汉初年的数学著作《周髀算经》里,已经载有“周三径一”,称之为“古率”.也就是说,直径为 1 的圆,它的周长约等于 3. 西汉末年,刘歆将圆周率 π 定为 3.154 7. 东汉时的张衡求得 π 的两个值,一个是$\frac{92}{29}=3.172\,41\cdots$,另一个是 $\sqrt{10}\approx 3.162\,2$. 直到三国时代,刘徽创立了割圆术,得到 $3.141\,024<\pi<3.142\,704$. 在刘徽之后重新推算圆周率 π 而作出卓越贡献的是南朝的祖冲之,他推算出 $3.141\,592\,6<\pi<3.141\,592\,7$,是世界上第一个将圆周率 π 精确到 7 位小数的人.祖冲之还用了两个近似于 π 的分数值,一个是$\frac{22}{7}=3.\dot{1}4285\dot{7}$,这个数比 π 大 0.001 2…,称为约率;另一个是$\frac{355}{113}=3.141\,592\,9\cdots$,这个数就相当接近于 π 了,比 π 只大 0.000 000 2…,称为密率.

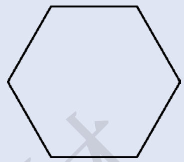
古希腊伟大的数学家阿基米德用圆的内接正多边形和外切正多边形逼近圆周,得到了

$$3.140\,845\cdots=\frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}=3.142\,857\cdots.$$

随着时代的发展和信息技术的进步,计算圆周率 π 的精确值的工作突飞猛进,20 世纪 50 年代达到千位以上,60 年代则达到 50 万位,70 年代的最高纪录是达到 100 万位,80 年代达到 1 亿位,1999 年达到 2 061 亿位.而到了 2002 年,人们运用超级计算机,竟达到了 12 411 亿位.

随着科学技术的发展与进步,人们所知道的圆周率 π 的精确值数字位数会越算越多.实际上,它的小数部分永远不会结束,也永远不会循环,它的确是一个无限不循环小数,也就是无理数.

Can You Draw These Patterns

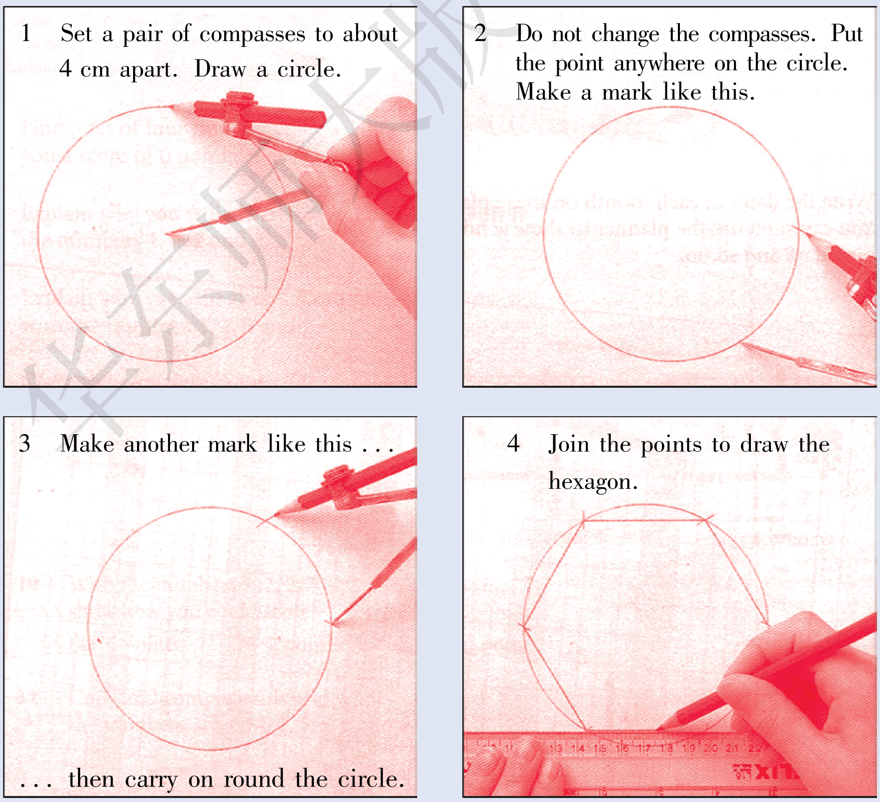


Since ancient times, domes have been used to cover structures. The dome surface is often divided into shapes composed of convex polygons with equal sides and equal angles. These polygons are regular polygons, which exhibit the most reflection and rotation symmetry for their number of sides.

A regular polygon with six sides is called a regular hexagon. Regular hexagons are easy to be drawn by using the compasses method and, because their nice geometric properties, are widely used in pattern design and other aspects of arts.

In the following we will show certain patterns designed based on a regular hexagon. Drawing these patterns will help you improve your drawing skill.

Let us begin with a regular hexagon.



1 Set a pair of compasses to about 4 cm apart. Draw a circle.

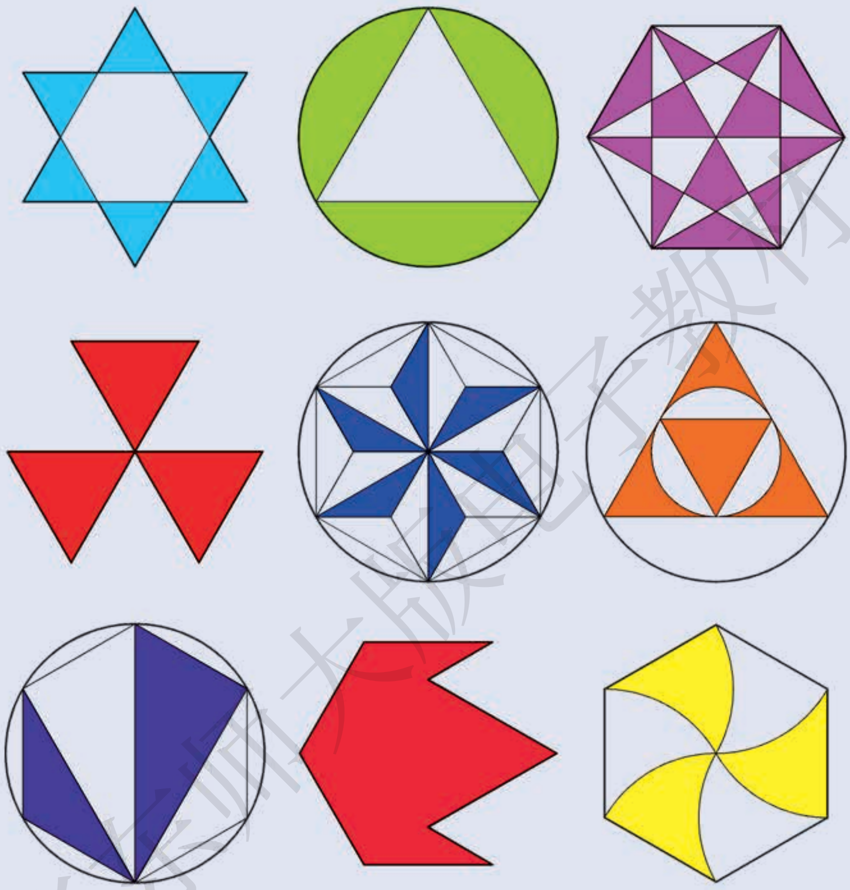
2 Do not change the compasses. Put the point anywhere on the circle. Make a mark like this.

3 Make another mark like this . . .

. . . then carry on round the circle.

4 Join the points to draw the hexagon.

The following designs are based on a regular hexagon. Use the compasses method to help you draw some of them. Then color your drawings, and, if you like, you can choose your own colors.

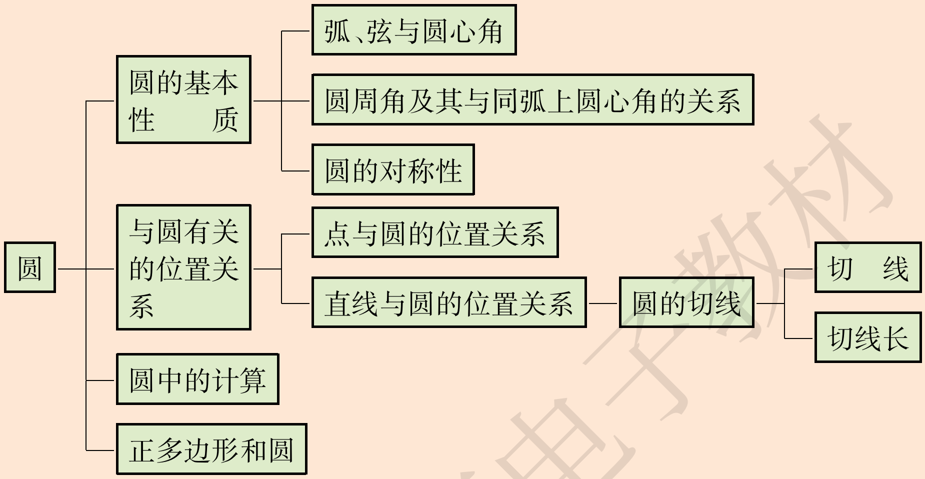


Use compasses to make up designs of your own.

（素材取自 *UCSMP Geometry*, McGraw Hill 和 *SMP Interact Book 1*, Cambridge University Press）

小结

一、知识结构



二、要点

1. 本章利用圆的对称性，探索得出了圆的一些基本性质：在同圆或等圆的弧、弦与圆心角中，只要有一组量相等，那么另外两组量也分别相等；同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于该弧所对的圆心角的一半；垂直于弦的直径一定平分弦以及弦所对的两条弧.

2. 通过图形的运动，研究了点与圆、直线与圆的位置关系，并得出这些位置关系与圆的半径以及点与圆心、直线与圆心的距离有关.

3. 在了解了直线与圆的位置关系的基础上，进一步认识了：圆的切线垂直于经过切点的半径；经过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线；从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等.

4. 本章还利用圆的知识解决了和圆有关的一些计算问题，研究了正多边形和圆之间有趣的关系.

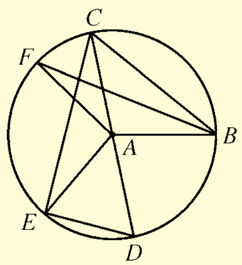
5. 本章对于圆与相关图形的探索与研究，依然采用了合情推理与演绎推理相结合的方式，运用动态的变换方法，探索发现一些有意义的猜想，然后经过演绎推理，加以验证. 这是整个初中阶段自始至终采用的重要方法.

复习题

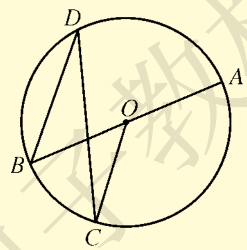
A 组

1. 生活中有许多由圆组成的图案,请你用圆规等作图工具设计一个美丽的图案.

2. 如图,试列举出⊙A 中的一条直径、两条半径、三条弦、三段弧、三个圆周角和三个圆心角.



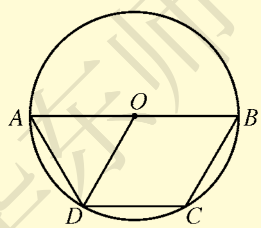
(第 2 题)



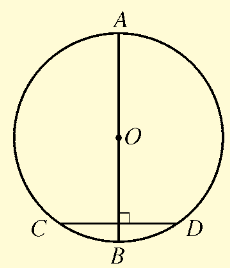
(第 3 题)

3. 如图,在 ⊙O 中,AB 是 ⊙O 的直径,$\angle AOC = 130°$,则 $\angle D =$ ________°.

4. 如图, AB 是 ⊙O 的直径,BC、CD、DA 是 ⊙O 的弦, 且 $BC = CD = DA$, 则 $\angle BOD =$ ________°.



(第 4 题)



(第 5 题)

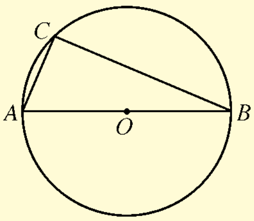
5. 如图, AB 是 ⊙O 的直径, 弦 $CD \perp AB$, $\overset{\frown}{BC} = 1$ cm, $\overset{\frown}{AD} = 4$ cm, 那么 $\overset{\frown}{BD} =$ ________cm, $\overset{\frown}{AC} =$ ________cm, ⊙O 的周长为________cm.

6. ⊙O 的半径为 r,某直线与该圆有公共点,且与圆心的距离为 d,则(　　).

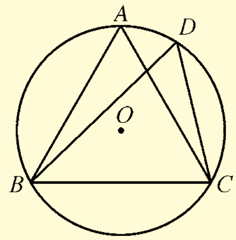
A. $d = r$　　B. $d < r$　　C. $d > r$　　D. $d \leqslant r$

7. 小张要给一个圆锥模型贴上保护膜. 他用半径为 20 cm、圆心角为 108°的扇形薄膜片恰好贴满了这个圆锥的侧面,那么他还要用半径为多少厘米的圆形薄膜片才能刚好贴满圆锥的底面?

8. 如图,AB 是$\odot O$ 的直径,$\odot O$ 的半径为 6.5 cm,弦 AC 的长为 5 cm. 求弦 BC 的长.



(第 8 题)



(第 9 题)

9. 如图, $\angle ACB = \angle CDB = 60°$, $AC = 2$ cm. 求 $\triangle ABC$ 的周长.

10. 直线 PA、PB 是 $\odot O$ 的两条切线,A、B 分别为切点,且 $\angle APB = 120°$, $\odot O$ 的半径为 4 cm. 求切线长 PA.(结果保留根号)

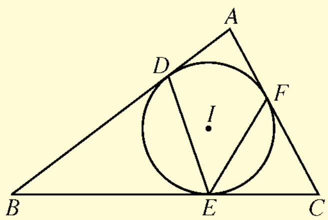
11. 有一个边长为 6 cm 的正六边形,若要剪一张圆形纸片完全盖住这个图形,求这个圆形纸片的最小半径.

B 组

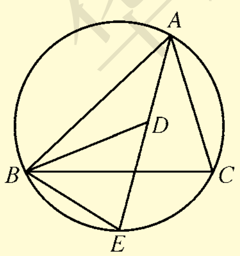
12. 如图, $\odot I$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆,与 AB、BC、CA 分别相切于点 D、E、F, $\angle DEF = 50°$. 求 $\angle A$ 的大小.

13. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,AD、BD 分别平分 $\angle BAC$ 和 $\angle ABC$,延长 AD 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 E,连结 BE. 求证:$BE = DE$.

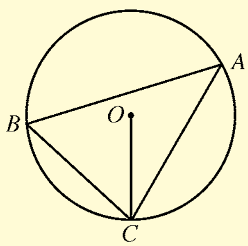
14. 如图,$\odot O$ 是$\triangle ABC$ 的外接圆,$\angle ACO = 30°$. 求$\angle B$ 的大小.



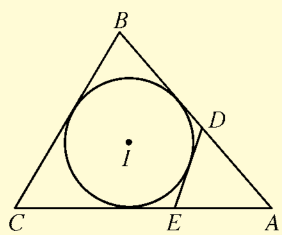
(第 12 题)



(第 13 题)



(第 14 题)



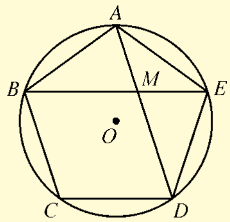
(第 15 题)

15. 如图, $\odot I$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆,$AB = 9$, $BC = 8$, $CA = 10$,点 D、E 分别为 AB、AC 上的点,且 DE 为 $\odot I$ 的切线. 求 $\triangle ADE$ 的周长.

16. 如图，$\odot O$ 的内接正五边形 $ABCDE$ 的对角线 AD 与 BE 相交于点 M.

（1）写出图中所有的等腰三角形（不添加其他线段）；

（2）求证：$BM^2 = BE \cdot ME$.



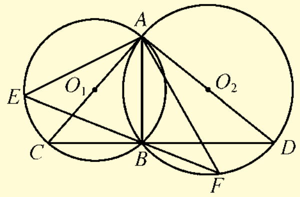
（第 16 题）

C 组

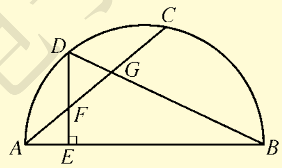
17. 如图，已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于点 A、B，过点 B 作 $CD \perp AB$，分别交 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 于点 C、D，过点 B 任作一条直线分别交 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 于点 E、F. 求证：

（1）AC、AD 分别是 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的直径；

（2）AE 与 AF 的比值是一个常数.



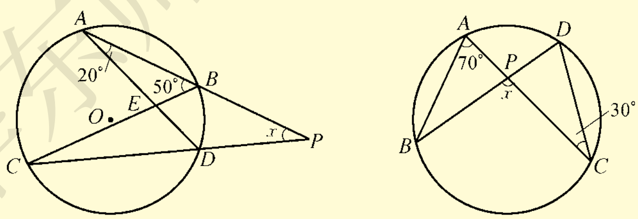
（第 17 题）



（第 18 题）

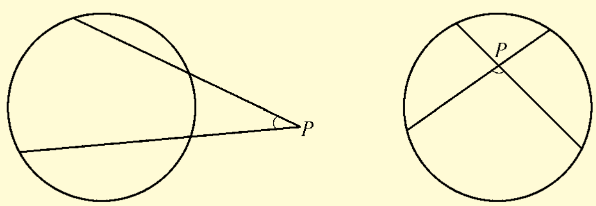
18. 如图，AB 是半圆的直径，AC 是一条弦，D 是 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，$DE \perp AB$ 于点 E，交 AC 于点 F，DB 交 AC 于点 G. 求证：$AF = FG$.

19. （1）根据图中数据，分别求出图中 $\angle x$ 的大小.



（第 19 题(1)）

（2）根据题(1)的计算过程与结果，猜想下图中所标的两角大小的计算方法，并说明理由.



（第 19 题(2)）

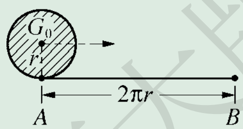
综合与实践

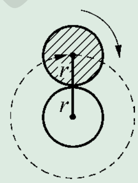
硬币滚动中的数学

你一定知道，将一枚硬币沿着直线滚动一圈，那么它所滚过的距离正好是它的外沿的圆周长. 也就是说，一个半径为 r 的硬币在一段长度为其圆周长 $2\pi r$ 的直线轨道上滚动，那么恰好可以滚动一圈.

如果将两枚同样大小的硬币放在桌上，固定其中一个，而另一个沿着其边缘滚动一周，这时滚动的硬币滚动了多少圈呢？似乎也是一圈？你不妨动手实验一下. 你可能会发现此时实际上滚动了两圈. 嗨！怎么不一样了？

这是什么原因呢？仔细想想，就清楚了. 原来那个滚动的硬币的圆心移动的路径长是 $4\pi r$，而沿着直线滚动时圆心移动的路径长还是 $2\pi r$.





现在请你与你的同伴一起，重复以上实验，并尝试做一些新的实验，看看这里隐含着什么样的数学规律.

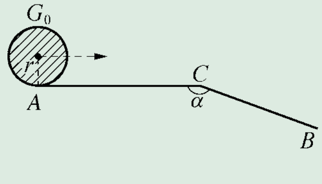
1. 将一个半径为 r 的硬币分别在一段总长度为 $2\pi r$ 的下列轨道上滚动：

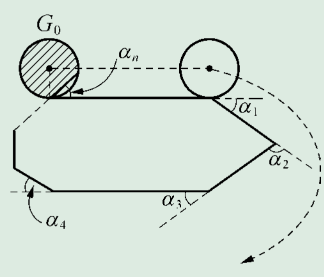
(1) 一条直线段；

(2) 由两条直线段组成，其夹角为 α；

(3) 一个多边形；

(4) 一个圆形.



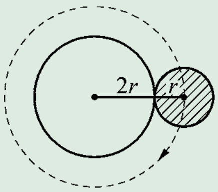


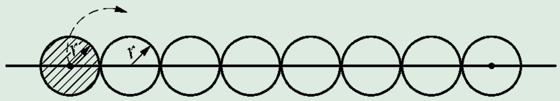
2. 将轨道改为下列情形：

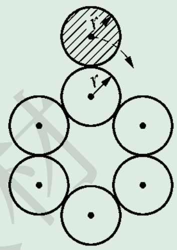
（1）一个半径为 $2r$ 的圆形；

（2）由 7 个半径均为 r 的圆形连贯而成的图形；

（3）由 6 个半径均为 r 的圆形相拼而成的图形.







试一试，你一定会找出其中的数学奥秘.

第28章　样本与总体

一家食品屋出售的切块蛋糕很好吃，尤其是蛋糕上的葡萄干很受小朋友们的喜爱．一天，三个小朋友各买了一块这样的蛋糕，蛋糕上葡萄干的数目分别是3、4和6．如果第二天点心师还用同样多的原料做蛋糕，他们再来买，女孩的蛋糕上一定还有6粒葡萄干吗？他们买了好几次以后，能不能估计出这家食品屋的这种蛋糕平均每块有几粒葡萄干？

本章我们将学习如何用科学的抽样调查方法，对总体的某些特征作出比较可靠的估计.

28.1 抽样调查的意义

1. 普查和抽样调查

你能回答下面的问题吗?

(1) 你们班级每个学生的家庭各有多少人? 平均每个家庭有多少人?

(2) 2010 年,全国平均每个家庭有多少人?

(3) 今年,全国平均每个家庭有多少人?

第 1 个问题容易回答,我们只要调查全班每一个学生,将结果填入表 28.1.1,就可计算得到所要的结果.

表 28.1.1 班级学生家庭人口数统计表(一)

姓　名					…			人口总数	平均数
家　庭人口数					…				

或者完成表 28.1.2,也可计算得到问题的答案.

表 28.1.2 班级学生家庭人口数统计表(二)

家　庭人口数	1	2	3	4	5	6	…	人口总数	平均数
家庭数目									

为特定目的而对所有考察对象作的全面调查叫做普查.

像这样的全面调查叫做普查.

第 2 个问题稍难一些,因为要调查的家庭数太多了.不过,利用 2010 年第六次全国人口普查数据,我们还是能够回答的.在中华人民共和国国家统计局网(http://www.stats.gov.cn)上,能够查到全国人口普查数据公报:“大陆 31 个省、自治区、直辖市共有家庭户 401 517 330

户,家庭户人口为 1 244 608 395 人,平均每个家庭户的人口为 3.10 人.”

第 3 个问题最难回答,因为全国人口普查的工作量极大,我国一般每十年进行一次全国人口普查,每五年进行一次全国 1% 人口的抽样调查. 所谓全国 1% 人口的抽样调查是指从全国总人口中抽取 1% ,然后对这部分人进行的调查. 我们没有今年的现成数据,只能在 2010 年数据的基础上,再结合近几年来我国平均每个家庭户的人口数在下降这一事实,估计一个答案了.

为特定目的而对部分考察对象作的调查叫做抽样调查.

我们把所要考察的对象的全体叫做**总体**(population),把组成总体的每一个考察对象叫做**个体**(individual). 从总体中取出的一部分个体叫做这个总体的一个**样本**(sample). 一个样本包含的个体的数量叫做这个样本的**容量**(sample size).

了解家庭成员人数对哪些部门或单位的决策有用?

例如人口普查中,当考察我国人口年龄构成时,总体就是所有具有中华人民共和国国籍并在中华人民共和国境内常住人口的年龄,个体就是符合这一条件的每一个公民的年龄,符合这一条件的所有北京市公民的年龄就是一个样本.

普查是通过调查总体的方式来收集数据的,抽样调查是通过调查样本的方式来收集数据的.

练　习

下列调查中哪些是用普查方式,哪些是用抽样调查方式来收集数据的?

(1) 为了解你所在班级的每个同学所穿鞋子的尺码情况,对全班同学作调查;

(2) 为了解你们学校九年级同学所穿鞋子的尺码情况,对你所在班级的全体同学作调查;

(3) 为了解你所在班级的同学每天的睡眠时间,在班上每个小组中各选取 2 名同学作调查;

(4) 为了解你所在班级的同学每天的睡眠时间,选取班级中学号为偶数的所有同学作调查.

2. 这样选择样本合适吗

思考

《中国中学生报》曾在网站(http://www. ccppg. com. cn)上就“你对老师讲课时‘拖堂’现象的态度”进行了调查,2001 年 11 月 19 日网上显示的调查结果如图 28. 1. 1 所示.


网上调查结果 - Microsoft Internet Explorer

您好！网上调查结果不具普遍代表性，仅供参考。

当前话题：你对老师讲课时“拖堂”现象的态度是

选项	比例	人数
内容重要，所以完全赞成。	11.16%	192
适当“拖堂”2、3分钟可理解。	46.68%	803
完全反对。只要敲铃，就应无条件下课。	42.15%	725

关闭窗口

图 28. 1. 1

请问:对此结果,为什么要声明“网上调查结果不具普遍代表性,仅供参考”?

例 1 老师布置给每个小组一个任务:用抽样调查的方法估计全班学生的平均身高. 坐在教室最后面的小胖为了争速度,立即就近对他周围的 3 位同学作调查,计算出他们 4 个人的平均身高后,就举手向老师示意已经完成任务了. 他这样选择样本合适吗?

分析 因为小胖他们4人坐在教室最后面，所以他们身高的平均数就会大于整个班级学生身高的平均数，这样，样本就不具有代表性了.

你要调查的对象在总体中必须有代表性.

例2 在投掷正方体骰子时，同学甲说：“6，6，6，…啊！真的是6！你只要一直想某个数，就会掷出那个数.”

同学乙说：“不对，我发现我越是想要某个数就越得不到这个数，倒是不想它反而会掷出那个数.”

这两位同学的说法正确吗？

分析 这两位同学的说法都不正确. 因为几次经验说明不了什么问题.

你的样本容量要足够大.

例3 小强的自行车失窃了，他想知道所在地区每个家庭平均发生过几次自行车失窃事件. 为此，他和同学一起，调查了全校每个学生所在家庭发生过自行车失窃事件的次数.

分析 这样抽样调查是不合适的. 虽然他们调查的人数很多，但是因为排除了所在地区那些没有中学生的家庭，所以他们的调查结果不能推广到所在地区的所有家庭.

仅仅增加调查人数不一定能够提高调查质量.

这个例子提醒我们，开展调查之前，要仔细检查总体中的每个个体是否都有可能成为调查对象.

练　习

判断下面这几个抽样调查选取样本的方法是否合适，并说明理由：

（1）某手表厂想要了解6～11岁少年儿童戴手表的比例，周末来到一家业余艺术学校，对在那里学习的200名学生进行调查；

（2）为调查一个省的环境污染情况，调查该省省会城市的环境污染情况.

读一读

据中华人民共和国环境保护部网(http://www.zhb.gov.cn)报道,2011 年 4 月我国 47 个城市的平均空气污染指数(API)排序如下:

2011 年 4 月我国 47 个城市的平均空气污染指数(API)

城市	平均空气污染指数	平均空气质量状况	城市	平均空气污染指数	平均空气质量状况	城市	平均空气污染指数	平均空气质量状况
兰州	132	轻微污染	杭州	82	良	广州	71	良
西安	97	良	济南	81	良	南通	69	良
乌鲁木齐	97	良	南昌	79	良	大连	67	良
北京	96	良	福州	79	良	汕头	67	良
银川	94	良	哈尔滨	77	良	长沙	66	良
合肥	94	良	长春	77	良	南宁	65	良
西宁	93	良	苏州	77	良	烟台	64	良
温州	92	良	厦门	77	良	深圳	60	良
天津	91	良	沈阳	76	良	秦皇岛	59	良
呼和浩特	91	良	上海	76	良	昆明	58	良
郑州	89	良	成都	76	良	北海	54	良
南京	88	良	桂林	75	良	珠海	50	优
武汉	86	良	青岛	74	良	湛江	44	优
宁波	85	良	重庆	73	良	海口	43	优
连云港	84	良	石家庄	72	良	拉萨	41	优
太原	83	良	贵阳	72	良			

做一做

请查询上述网站，完成以下研究任务：

1. 你认为我国城市空气污染最严重的情况是“轻微污染”吗？兰州、西安和乌鲁木齐是我国空气污染最严重的城市吗？为什么？

2. 选择几个你们班同学共同关心的城市，了解它们近来的空气质量变化情况，并从降水量、周边污染等方面寻找空气质量变化的原因.（在环境保护部网站可以直接链接至各省环保厅（局）网站）

3. 我国大陆4个直辖市和27个省会城市都已经包括在这47个城市中了，另外还加入了16个城市，请在中国地图上标出这些城市，你认为表中这47个城市空气质量级别的比例情况能够反映当月全国各地空气质量级别的比例情况吗？为什么？

阅读材料

API与AQI

打开电视，你可能会看到如图那样的画面：空气宝宝在微笑. 你也一定会感到高兴和愉快，可以外出活动了！

那是某地2014年2月26日的实时空气质量状况，显示当时的空气质量指数（AQI）为53，级别为二级——良.

你知道什么是AQI吗？它和第82页所显示的API有什么不同？这些数据对人们来说有怎样的提示作用呢？

API，即空气污染指数（Air Pollution Index），是根据近地面几种主要的空气污染物浓度以及它们的持续时间来确定的，每天发布一次. 计入空气污染指数的污染物项目主要有二氧化硫（SO_2）、氮氧化物（以NO_2计）和可吸入颗粒物（PM_{10}）. 根据API的数值可将空气质量划分为五个级别，API的数值越大，级别越高，代表空气污染的状况越严重.

AQI,即空气质量指数(Air Quality Index),是2012年我国新修订的《环境空气质量标准》所采用的技术指标,反映的空气质量状况比API更为全面,每小时发布一次. 它将臭氧(O_3)、一氧化碳(CO)和细颗粒物($PM_{2.5}$)这些项目也纳入计算范围,其中$PM_{2.5}$就是灰霾的主因. 根据AQI的数值,空气质量划分成六个级别与相应的类别,分别用不同的颜色加以表示:优(绿色)、良(黄色)、轻度污染(橙色)、中度污染(红色)、重度污染(紫色)、严重污染(褐红色).

AQI数值	AQI级别	AQI类别及表示颜色		对健康影响情况	建议采取的措施
0～50	一级	优	绿色	空气质量令人满意,基本无空气污染	各类人群可正常活动
51～100	二级	良	黄色	空气质量可接受,但某些污染物可能对极少数异常敏感人群健康有较弱影响	极少数异常敏感人群应减少户外活动
101～150	三级	轻度污染	橙色	易感人群症状有轻度加剧,健康人群出现刺激症状	儿童、老年人及心脏病、呼吸系统疾病患者应减少长时间、高强度的户外锻炼
151～200	四级	中度污染	红色	进一步加剧易感人群症状,可能对健康人群心脏、呼吸系统有影响	儿童、老年人及心脏病、呼吸系统疾病患者避免长时间、高强度的户外锻炼,一般人群适量减少户外运动
201～300	五级	重度污染	紫色	心脏病和肺病患者症状显著加剧,运动耐受力降低,健康人群普遍出现症状	儿童、老年人和心脏病、肺病患者应停留在室内,停止户外运动,一般人群减少户外运动
>300	六级	严重污染	褐红色	健康人群运动耐受力降低,有明显强烈症状,提前出现某些疾病	儿童、老年人和病人应当停留在室内,避免体力消耗,一般人群应避免户外活动

根据安排,新的空气质量标准将分期实施. 2012年起,京津冀、长三角、珠三角等重点区域以及直辖市和省会城市已率先实施,并按新标准要求开展监测和

发布工作；2013 年，113 个环境保护重点城市和环保模范城市开始实施；2015 年，所有地级以上城市将开始实施；2016 年 1 月 1 日起，将在全国实施新标准.

AQI 采用的标准更严、污染物指标更多、发布频次更高，其评价结果也更加接近公众的真实感受.

习题 28.1

1. 下列调查中哪些是用普查的方式，哪些是用抽样调查的方式来收集数据的？

（1）为了解你所在班级的每个同学周末（星期五、星期六）晚上的睡眠时间，对全班同学作调查；

（2）为了对世界上一些国家的教育成就进行横向比较，国际教育成就评价协会（IEA）于 1999 年对 38 个国家或地区的部分八年级学生的数学和科学两个科目作了测试调查（TIMSS）；

（3）为了解某商品促销广告中所称中奖率的真实性，某人买了 100 件该商品，调查其中奖率.

2. 请指出下列抽样调查的总体和样本：

（1）为了解某种家用空调工作 1 h 的用电量，调查 10 台该种空调每台工作 1 h 的用电量；

（2）为了解一本 300 页的书稿大约共有多少字，从中随机地选定一页作调查，数一数该页的字数.

3. 请指出下列哪些调查不适合作普查而适合作抽样调查：

（1）了解夏季冷饮市场上冰淇淋的质量情况；

（2）审查书稿有哪些科学性错误；

（3）研究父母与孩子交流的时间量与孩子性格之间是否有联系；

（4）了解一个打字训练班学员的训练成绩是否都达到了预定训练目标.

4. 请指出下列哪些调查的样本缺乏代表性：

（1）在大学生中调查我国青年业余时间娱乐的主要方式；

（2）在公园里调查老年人的健康状况；

（3）调查一个班级里学号为 3 的倍数的学生，以了解学生对班主任老师某项新举措的意见和建议；

（4）某环保网站对“支持商店使用环保购物袋的程度”进行在线调查.

5. 一天,家里来了一位陌生客人,平时活泼好动的小丽在客人面前却表现得特别安静. 小丽这一天的表现有代表性吗? 如果这位客人以小丽这天的表现来评价小丽的性格的话,是否合理?

6. 2014 年 2 月 15 日某市的空气质量指数(AQI)为 429,达到了严重污染的级别. 能否据此判断:2014 年该市的空气污染严重? 要了解一个城市的空气质量情况,你认为怎样选取样本比较合适?

28.2 用样本估计总体

妈妈为了知道饼熟了没有,从刚出锅的饼上切下一小块尝尝,如果这一小块饼熟了,那么可以估计整张饼也熟了.

环境监测中心为了解一个城市的空气质量情况,会在这个城市中分散地选定几个点,从这些地点采集数据,对这些数据进行分析,就可以估计整个城市的空气质量.

农科站为了解农田中某种病虫害的灾情,会随机地选定几块地,仔细检查这几块地的虫卵数,然后估计一公顷农田大约平均有多少虫卵,会不会发生大规模的病虫害.

以上几个例子说明,为了解某些情况或得到某些结论,有时不适宜作普查,而需要作抽样调查. 我们知道,样本要有代表性,没有偏向,这样的抽样调查才能较好地反映总体的情况. 那么,如何进行抽样才比较科学呢?

请再举出一些需要抽样调查的例子.

1. 简单随机抽样

要使样本具有代表性,不偏向总体中的某些个体,有一个对每个个体都公平的办法,那就是用抽签的办法决定哪些个体进入样本. 统计学家称这种理想的抽样方法为**简单随机抽样**(simple random sampling).

具体来说,先将每个个体编号,然后将写有这些编号的纸条全部放入一个盒子,搅拌均匀. 再用抽签的办法,抽出一个编号,那个编号的个体就被选入样本.

现在我们就用简单随机抽样方法来选取一些样本. 假设总体是某年级 300 名学生的考试成绩,已经把它们按照学号顺序排列如下:(每行有 20 个数据)

97, 92, 89, 86, 93, 73, 74, 72, 60, 98, 70, 90, 89, 90, 71, 80, 69, 92, 70, 64,
92, 83, 89, 93, 72, 77, 79, 75, 80, 93, 93, 72, 87, 76, 86, 82, 85, 82, 87, 86,
81, 88, 74, 87, 92, 88, 75, 92, 89, 82, 88, 86, 85, 76, 79, 92, 89, 84, 93, 75,
93, 84, 87, 90, 88, 90, 80, 89, 82, 78, 73, 79, 85, 78, 77, 91, 92, 82, 77, 86,
90, 78, 86, 90, 83, 73, 75, 67, 76, 55, 70, 76, 77, 91, 70, 84, 87, 62, 91, 67,
88, 78, 82, 77, 87, 75, 84, 70, 80, 66, 80, 87, 60, 78, 76, 89, 81, 88, 73, 75,
95, 68, 80, 70, 78, 71, 80, 65, 82, 83, 62, 72, 80, 70, 83, 68, 74, 67, 67, 80,
90, 70, 82, 85, 96, 70, 73, 86, 87, 81, 70, 69, 76, 68, 70, 68, 71, 79, 71, 87,
60, 64, 62, 81, 69, 63, 66, 63, 64, 53, 61, 41, 58, 60, 84, 62, 63, 76, 82, 76,
61, 72, 66, 80, 90, 93, 87, 60, 82, 85, 77, 84, 78, 65, 62, 75, 64, 70, 68, 66,
99, 81, 65, 98, 87, 100, 64, 68, 82, 73, 66, 72, 96, 78, 74, 52, 92, 83, 85, 60,
67, 94, 88, 86, 89, 93, 99, 100, 79, 85, 68, 60, 74, 70, 78, 65, 68, 68, 79, 77,
90, 55, 80, 77, 67, 65, 87, 81, 67, 75, 57, 75, 90, 86, 66, 83, 68, 84, 68, 85,
74, 98, 89, 67, 79, 77, 69, 89, 68, 55, 58, 63, 77, 78, 69, 67, 80, 82, 83, 98,
94, 96, 80, 79, 68, 70, 57, 74, 96, 70, 78, 80, 87, 85, 93, 80, 88, 67, 70, 93.

活动 1

用简单随机抽样方法选取三个样本,每个样本含有 5 个个体,这里已经完成了第一个样本的选取,请继续完成第二个和第三个样本的选取.

第一个样本:

抽到的编号(学号)	111	254	167	94	276
成绩	80	86	66	91	67

第二个样本:

抽到的编号(学号)					
成绩					

第三个样本：

抽到的编号(学号)					
成绩					

你明白刚才的抽样方法为什么是一种随机抽样了吗？

从以上的抽样过程可以看到，抽样之前，我们不能预测到哪些个体会被抽中，因此抽样结果具有随机性.

2. 简单随机抽样调查可靠吗

让我们仍以这300名学生的考试成绩为例，考察一下抽样调查的结果是否与总体的情况相一致.

首先对总体情况进行分析，根据已知数据，按照10分的距离将成绩分段，统计每个分数段学生出现的频数，填入表28.2.1.

这就是频数分布表.

表28.2.1　300名学生考试成绩频数分布表

成绩段	39.5～49.5	49.5～59.5	59.5～69.5	69.5～79.5	79.5～89.5	89.5～100
频数	1	9	62	85	96	47

根据上表绘制直方图，如图28.2.1.

这就是频数分布直方图.

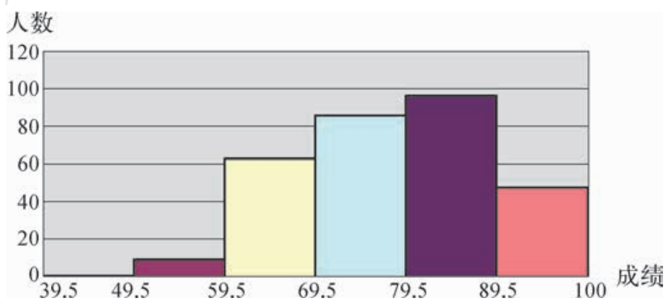


图28.2.1　300名学生考试成绩频数分布直方图

从图表中可以清楚地看出79.5分到89.5分这个分数段的学生数最多，90分以上的学生数较少，不及格的学生数最少.

利用原始数据可以算出总体的平均数和方差分别约为 78. 1 和 116. 3.

活动 1 中,我们用简单随机抽样方法,已经得到了第一个样本,这 5 个随机数(学号)是 111、254、167、94、276,对应的成绩依次是 80、86、66、91、67,图 28. 2. 2 是这个样本的频数分布直方图、平均数和方差. 图 28. 2. 3 是根据小明取到的第二个和第三个样本数据得到的频数分布直方图、平均数和方差.

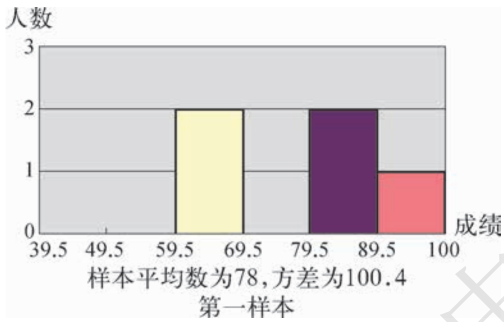
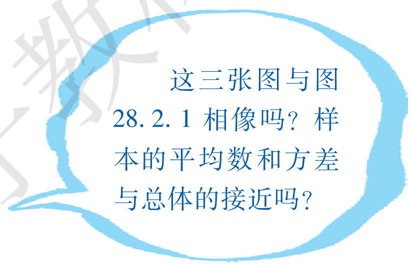


图 28. 2. 2　5 名学生考试成绩频数分布直方图



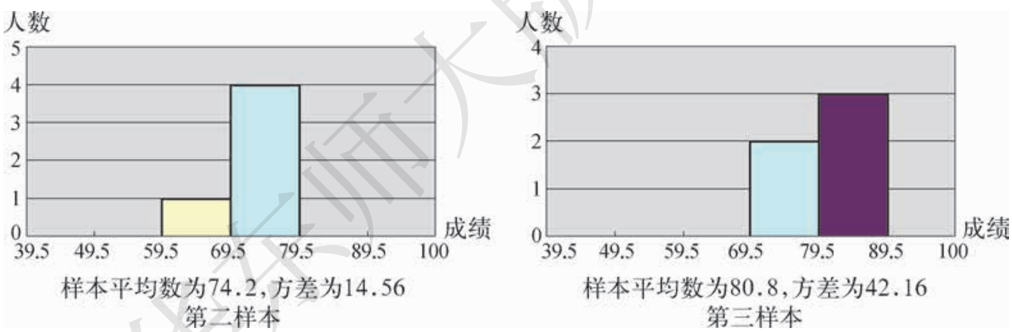


图 28. 2. 3　5 名学生考试成绩频数分布直方图

再选取一些含有 5 名学生的样本,继续作同样的分析,我们发现,不同样本的平均数和方差往往差异较大. 可能是因为样本太小了吧,让我们再用大一些的样本试一试,比如每个样本含有 10 个个体.

我们继续用简单随机抽样方法,得到第一个样本. 重复上述步骤,再取第二个样本. 图 28. 2. 4 是根据小明取到的两个样本数据得到的频数分布直方图、平均数和方差.

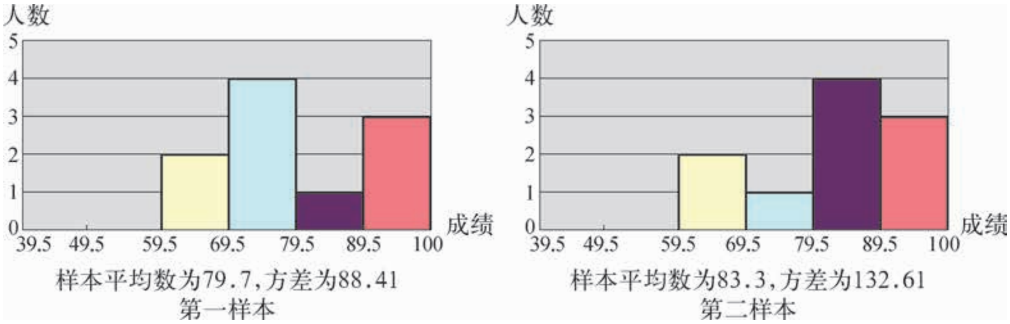


图 28.2.4　10 名学生考试成绩频数分布直方图

再选取一些含有 10 名学生的样本,继续作同样的分析,我们发现此时不同样本的平均数和方差似乎比较接近总体的平均数和方差. 看来用大一些的样本来估计总体会比较可靠一点. 让我们再用更大一些的样本试一试,比如每个样本含有 40 个个体. 图 28.2.5 是根据小明取到的两个样本数据得到的频数分布直方图、平均数和方差.

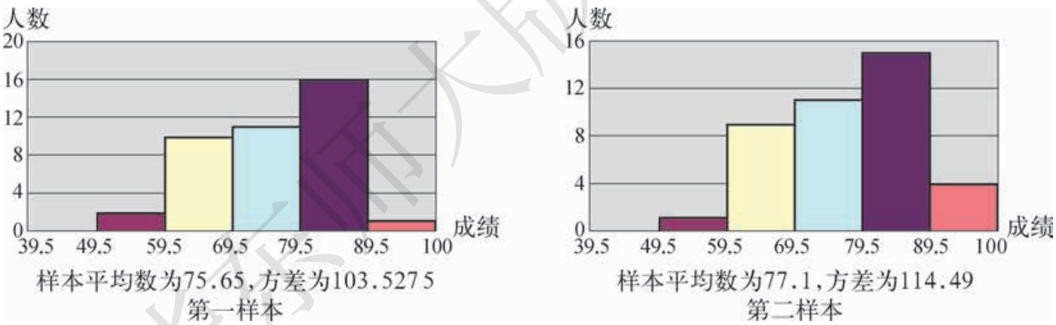


图 28.2.5　40 名学生考试成绩频数分布直方图

大样本使我们更容易认识总体的真面目.

再选取一些含有 40 名学生的样本,继续作同样的分析,我们发现随着样本容量的增加,样本的平均数和方差有接近于总体的平均数和方差的趋势. 你从自己选取的样本中是否也得出了同样的结论?

上述活动告诉我们:由简单随机抽样获得样本容量较大的样本,可以用样本平均数、样本方差估计总体平均数和总体方差.

读一读

从部分看全体

一个鱼缸里有多少条鱼，容易数出来. 可是，怎样知道一个池塘里有多少条鱼呢？

一个办法是将池塘里的鱼统统捞出来，逐条清点，但这样做不太现实，那么能否找到其他办法呢？

有一个可行的办法就是利用抽样调查. 先从池塘的各个地方捞出一部分鱼，例如捞出 300 条，在每条鱼身上做个标记，再全部放回池塘. 过几天后第二次从池塘中捞出一部分鱼，例如捞出 100 条，检查这 100 条鱼中有几条是曾经被捞出做过标记的. 假如检查发现当中有 20 条是做过标记的，那么根据下列的近似关系：

$$\frac{\text{池塘中有标记的鱼的数目}}{\text{池塘中鱼的数目}} \approx \frac{\text{第二次捞出的鱼中有标记的鱼的数目}}{\text{第二次捞出的鱼的数目}},$$

就可以估计出池塘里鱼的数目 $\approx \dfrac{100 \times 300}{20} = 1\ 500$ 条.

因为抽样调查方法只考察总体中的一部分个体，所以它具有调查范围小及节省时间、人力和物力的优点. 但它可能不如普查得到的调查结果精确，得到的只是估计值，而且这个估计值是否接近实际情况还取决于样本的大小以及它是否具有代表性.

习题 28.2

1. 判断下面这几个抽样调查选取样本的方法是否合适,并说明理由:

(1) 一家食品厂为了解其产品的质量情况,在其生产流水线上每隔 100 包选取一包检查其质量;

(2) 为调查全校学生对购买正版书籍、唱片和软件的态度,用简单随机抽样方法在全校所有班级中抽取 8 个班级,调查这 8 个班级所有学生对购买正版书籍、唱片和软件的支持率.

2. 2013 年中国科学院新增院士 62 位(包括 9 位外籍院士),他们当年的岁数统计如下:

50, 74, 53, 69, 56, 72, 57, 48, 56, 47,
57, 49, 64, 67, 59, 49, 55, 45, 50, 67,
46, 57, 51, 53, 50, 50, 52, 61, 49, 46,
57, 58, 55, 48, 49, 55, 52, 66, 46, 53,
53, 55, 48, 49, 49, 55, 49, 50, 50, 48,
57, 56, 55, 62, 61, 66, 73, 79, 57, 50,
71, 50.

请根据以上数据绘制相应的频数分布表和频数分布直方图.

3. 某班 45 名学生的体重记录如下:(单位:kg)

48, 48, 42, 50, 61, 44, 43, 51, 46, 46, 51, 46, 50, 45, 52, 54, 51, 57, 55, 48,
49, 48, 53, 48, 56, 55, 57, 42, 54, 49, 47, 60, 51, 51, 44, 41, 49, 53, 52, 49,
61, 58, 52, 54, 50.

请用简单随机抽样方法,分别选取含有 6 名学生体重的两个样本、含有 15 名学生体重的两个样本以及含有 30 名学生体重的两个样本,分别计算这六个样本中学生体重的平均数和方差,最后把它们与全班学生体重的平均数和方差作比较,你认为随机抽样方法可靠吗?样本容量较大时,由样本得到的估计值是否往往与总体的实际值更接近?

4. 假如你想通过抽样调查了解有多少初中阶段的学生能够说出父母亲的生日,你认为如何抽样好?为什么?

阅读材料

漫谈收视率

在看电视越来越成为人们业余生活重头戏的今天，收视率这个词对于我们已不算陌生. 商家都希望能在高收视率的电视节目中插播自己产品的广告，电视台也想通过收视率的调查获取改进节目的有效信息.

收视率能够给调查者带来哪些信息呢？电视台可以通过调查估计播出的节目有多少观众在看，哪些观众在看，看了多长时间等等，这可以为编排节目提供有价值的参考；而商家可能更关心哪些电视节目的观众是自己产品的主要销售对象. 例如，某个电视节目的观众中少年儿童占 85%，成人只占 15%，那么，生产儿童食品的商家肯定比生产洗发水的厂家更希望在这个时段插播自己商品的广告.

虽然收视率有许多利用价值，但调查起来并不是一件简单的工作. 如果某地区有 6 720 000 户家庭，要调查该地区的收视率，应如何进行？在我们和统计打了不少交道之后，你一定会说，收视率很难通过普查获得，当然抽样调查是更实际的方法. 怎样选取有很好代表性的调查样本？怎样开展调查？怎样对收视信息进行记录？现行的抽样方法有简单随机抽样、分层抽样、等距抽样（见右图）等等，调查方法则有问卷留置、仪器记录、访问员面访、电话访问等多种，收视信息记录的方法可以用回忆法、日记法和人员测量仪法等.

等距抽样流程图

调查地区内总户数为 6 720 000 户，从 1 到 6 720 000 给每户编号

⇩

间距 = 总户数 ÷ 预计调查样本容量
6 720 000 ÷ 1 200 = 5 600

⇩

通过抽签或利用计算器，随机产生一个不大于 5 600 的正整数，作为起始值

⇩

从起始值开始累加间距 5 600，就得到中选的样本户编号

随着科学技术的发展和统计方法的完善，各种各样的调查数据越来越多地受到决策者的青睐，这里介绍的收视率调查只是其中一种. 相信你在学了更多的统计知识之后，也会将数据作为分析决策的重要工具之一.

28.3 借助调查做决策

1. 借助调查做决策

例 1 人们常说“吸烟有害”,这一般是指吸烟有害于人类的健康,那么,香烟对其他动植物的生长是否也不利呢?上海市闵行中学的师生做过一个“香烟浸出液浓度对于种子萌芽的影响”的实验,他们选用绿豆和赤豆各 50 粒作为种子的代表,观察在清水以及三种不同浓度的香烟浸出液中它们每天出芽的数目. 实验数据如表 28. 3. 1 所示.

表 28. 3. 1　绿豆和赤豆种子出芽情况记录表

种子	出芽数目 浓度 时间	清水	香烟浸出液一	香烟浸出液二	香烟浸出液三
绿豆	第一天	47 粒	37 粒	27 粒	12 粒
	第二天	50 粒	47 粒	48 粒	46 粒
赤豆	第一天	1 粒	0 粒	1 粒	0 粒
	第二天	23 粒	16 粒	10 粒	11 粒
	第三天	44 粒	27 粒	20 粒	18 粒
	第四天	46 粒	36 粒	37 粒	33 粒

(香烟浸出液一:2 支香烟浸于 200 ml 水;香烟浸出液二:3 支香烟浸于 200 ml 水;香烟浸出液三:4 支香烟浸于 200 ml 水)

据此,你估计香烟浸出液浓度对绿豆和赤豆种子的出芽率有怎样的影响?如果再重复这个实验,实验数据是否可能与表 28. 3. 1 所示的不一致?为了一般地研究“香烟浸出液浓度对于种子萌芽的影响”,是否需要选取一些其他种子做类似的实验?如果有兴趣,请动手做一做,再与同学一起讨论你们各自获得的数据和结论.

例 2 一家冷饮厂在电视里做广告，说他们厂生产的雪糕在小木棍上印有四种图案，集齐四根印有不同图案的小木棍就能够拼成一幅图，凭此可以在指定的商店领取一份奖品. 假设该厂准备的印有四种图案的小木棍一样多，而且每支雪糕中夹入印有哪种图案的小木棍也完全是随机的，那么，平均要买多少支雪糕才能得奖呢？

分析 如果幸运，也许买 4 支就能够得奖，但也有可能要买 20 多支才得奖. 那么平均要买多少支才能得奖呢？

在四张同样的小纸条上分别写上 1、2、3、4，代表印有这四种图案的小木棍，随机抽出 1 张，记录下每次抽到的数字，直到四个数字都出现，就算完成了一次游戏，即集齐了四根印有不同图案的小木棍. 记录下本次游戏中抽签的总次数，它代表本次中奖共买了多少支雪糕. 表 28.3.2 是小明 10 次游戏的数据记录.

表 28.3.2　每次游戏抽出数字的记录表

第一次		第二次		第三次		第四次		第五次		第六次		第七次		第八次		第九次		第十次	
3		1		3	2	3		3	4	1		2	2	4		4	1	3	3
4		4		1	4	1		1		3		1	2	1		4		4	1
3		1		3		4		2		4		2	1	1		3		3	
3		4		1		4		2		1		3	4	2		3		2	
2		2		1		2		1		4		1		1		2		4	
1		3		3				1		2		1		3		4		4	
6 支		6 支		8 支		5 支		7 支		6 支		10 支		6 支		7 支		8 支	

因为

$$\frac{5\times1+6\times4+7\times2+8\times2+10\times1}{10}=6.9(\text{支}),$$

所以小明认为大约平均买 7 支雪糕才能得奖.

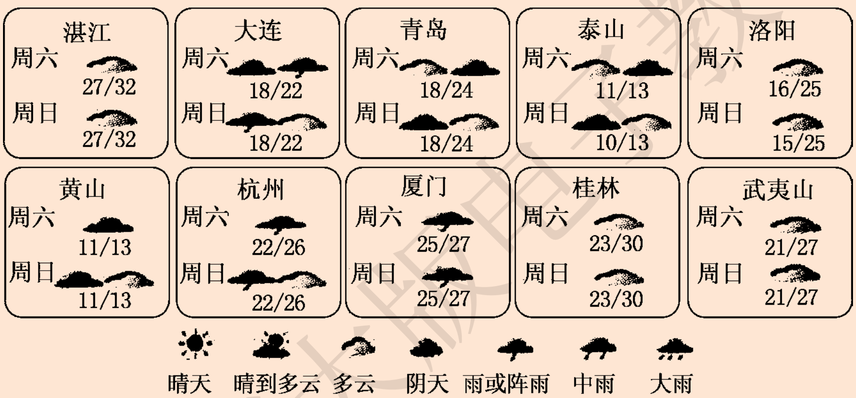
为什么说是大约？

思考

重复试验的结果具有随机性. 如果你的结果与小明的不同,你有何建议?

练　习

爸爸妈妈计划在周末带小明去旅游,但有两个条件:首先,希望天气适宜;其次,游览的地方最好离居住地近一些. 下图是小明在报纸上查询到的周末部分旅游区天气预报.



此外,小明还通过上网查询列车时刻表,获得了各旅游区与自己居住地之间的里程如下:(单位:km)

大连 2 255,青岛 1 359,泰山 890,洛阳 1 122,黄山 674,杭州 201,武夷山 631,厦门 1 395,桂林 1 645,湛江 2 280.

(1) 请你帮小明分析一下,哪个旅游景点是最佳选择?

(2) 如果你要在本周末旅游,那么基于路程和天气两方面的原因,你将怎样查询数据做出决策呢? 和同学交流一下你的决策过程.

例 3 表 28. 3. 3 中的数据来自 2010 年《中国统计年鉴》,请根据表中提供的数据回答下面的问题:

(1) 我国人口中,男性的预期寿命和女性相比谁更长?

(2) 2000 年中国人口预期寿命和 1990 年相比有什么变化?

表 28.3.3　中国大陆各地区人口平均预期寿命　　单位：岁

地区	1990 年预期寿命		2000 年预期寿命	
	男	女	男	女
北　京	71.07	74.93	74.33	78.01
天　津	71.03	73.73	73.31	76.63
河　北	68.47	72.53	70.68	74.57
山　西	67.33	70.93	69.96	73.57
内蒙古	64.47	67.22	68.29	71.79
辽　宁	68.72	71.94	71.51	75.36
吉　林	66.65	69.49	71.38	75.04
黑龙江	65.5	68.73	70.39	74.66
上　海	72.77	77.02	76.22	80.04
江　苏	69.26	73.57	71.69	76.23
浙　江	69.66	74.24	72.5	77.21
安　徽	67.75	71.36	70.18	73.59
福　建	66.49	70.93	70.3	75.07
江　西	64.87	67.49	68.37	69.32
山　东	68.64	72.67	71.7	76.26
河　南	67.96	72.55	69.67	73.41
湖　北	65.51	69.23	69.31	73.02
湖　南	65.41	68.7	69.05	72.47
广　东	69.71	75.43	70.79	75.93
广　西	67.17	70.34	69.07	73.75
海　南	66.93	73.28	70.66	75.26
四　川	65.06	67.7	69.25	73.39
贵　州	63.04	65.63	64.54	67.57
云　南	62.08	64.98	64.24	66.89
西　藏	57.64	61.57	62.52	66.15
陕　西	66.23	68.79	68.92	71.3
甘　肃	66.35	68.25	66.77	68.26

续 表

地区	1990 年预期寿命		2000 年预期寿命	
	男	女	男	女
青　海	59. 29	61. 96	64. 55	67. 7
宁　夏	65. 95	68. 05	68. 71	71. 84
新　疆	61. 95	63. 26	65. 98	69. 14
重　庆			69. 84	73. 89

分析　如果用平均数作为一组数据的代表,计算可得:1990 年中国男性人口的平均预期寿命约为 66 岁,而女性人口的平均预期寿命约为 70 岁;2000 年中国男性人口的平均预期寿命约为 70 岁,而女性人口的平均预期寿命约为 73 岁. 因此,女性的预期寿命比男性长一些. 同时,2000 年中国人口的预期寿命比 1990 年长一些.

除此之外,我们也可以利用统计图使数据变得更加直观. 图 28. 3. 1 是根据 1990 年中国各地区人口平均预期寿命绘制的. 横轴刻度表示男性预期寿命,纵轴刻度则表示女性预期寿命,不同的点代表不同的地区.

通过这种由离散的点所组成的统计图,即散点图,往往可以直观地看出两组数据之间是否存在关联关系.

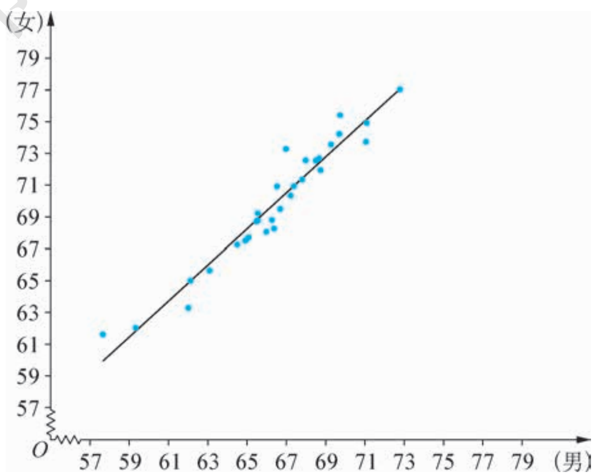


图 28. 3. 1　1990 年中国各地区男女人口平均预期寿命

思考

1. 根据表 28.3.3,找一找,图 28.3.1 中哪个点代表 1990 年北京的男性、女性平均预期寿命?

2. 图中的点大多数都落在一条直线附近的狭长带形区域内,这条直线的意义是什么?

3. 如果某地区 1990 年男性平均预期寿命为 64 岁,请你根据图 28.3.1 推断该地区的女性平均预期寿命大约为多少岁?

4. 如果在图 28.3.1 中用不同颜色增加 2000 年的数据点,想一想,新增数据点和原有数据点之间会有怎样的位置关系?在图上标出 2000 年的数据点,检验一下你的猜想.

做一做

请每位同学分别测量自己的身高和两臂左右平伸时两手中指指尖之间的距离,并解决以下问题:

(1) 仿照表 28.3.3 设计一张统计表,记录来自全班同学的数据.

(2) 根据数据表绘制散点图.

(3) 观察图表,你有哪些发现?

(4) 如果已知一个人两臂左右平伸时两手中指指尖之间的距离,你能估计出他的身高吗?

2. 容易误导读者的统计图

简洁的统计表和形象的统计图可以在决策过程中帮助我们得到很多有用的信息,比如,最小值和最大值是什么,发展变化的趋势和快慢程度如何,等等.

不过,形象的统计图如果画得不规范也会给人留下不真实的印象. 这里,我们提醒大家注意几种容易误导读者的统计图.

问题 1

一则广告说:据调查,使用本厂牙膏可以使蛀牙率减少20%,并以图28.3.2示意其调查得到的数据.

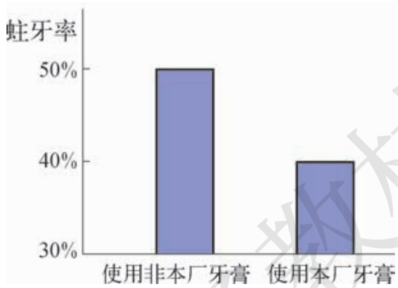
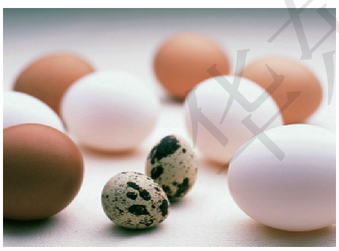


图28.3.2

你觉得这样的统计图会给人留下怎样的印象?

分析 我们注意到如图28.3.2所示的条形图的纵轴是从30%开始的,这样使左边条形的高度等于右边条形的高度的两倍,从而容易给人错误的印象:使用该厂牙膏会使蛀牙率减少一半.

问题 2



有许多人认为鹌鹑蛋比鸡蛋更有营养,是不是这样呢?

检测发现,每100 g鹌鹑蛋和鸡蛋的可食部分中各种维生素B的含量分别为:维生素B_1约0.18 mg和0.15 mg;维生素B_2约0.79 mg和0.31 mg;维生素B_6约0.02 mg和0.12 mg.

厂商甲用两幅直方图比较两种蛋的各种维生素B的含量,如图28.3.3.

厂商乙用一幅直方图比较两种蛋的各种维生素B的含量,如图28.3.4.

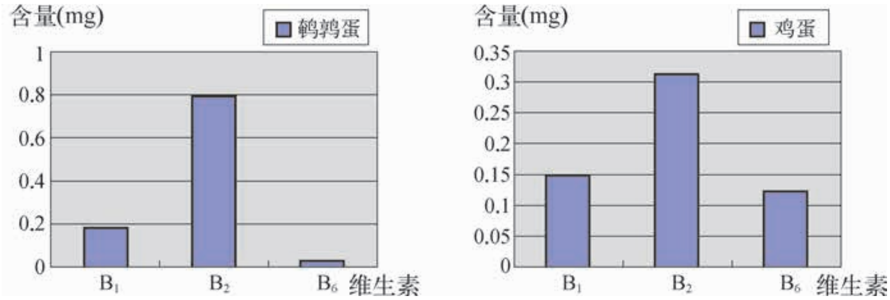


图 28.3.3

鸡蛋的各种维生素B的含量比鹌鹑蛋高吗?

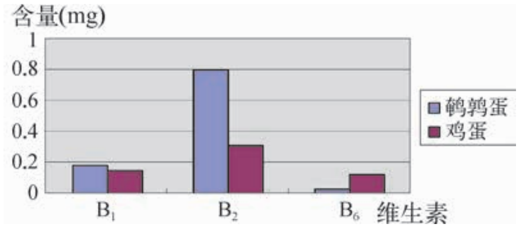


图 28.3.4

哪个图的效果好?它好在哪里?

分析 厂商甲的两幅图纵轴上的单位长度不同,容易引起误解;厂商乙的统计图是恰当的.

读一读

通过检测发现,每 100 g 鹌鹑蛋和鸡蛋的可食部分中各种营养成分的大致含量如下表所示:

营养成分	鹌鹑蛋	鸡蛋	营养成分	鹌鹑蛋	鸡蛋
蛋白质	13.1 g	14.8 g	维生素 A	300 国际单位	1440 国际单位
脂肪	11 g	11.6 g	维生素 B_1	0.18 mg	0.15 mg
糖类	0.4 g	0.5 g	维生素 B_2	0.79 mg	0.31 mg
钙	64 mg	55 mg	烟酸	0.15 mg	0.1 mg
磷	226 mg	210 mg	维生素 B_6	0.02 mg	0.12 mg
铁	3.65 mg	2.7 mg			

另外,在人体所需的氨基酸的含量上,鹌鹑蛋所含的赖氨酸比鸡蛋高,而鸡蛋所含的异亮氨酸、亮氨酸、蛋氨酸、苯丙氨酸、苏氨酸等则比鹌鹑蛋高.

由此可见,鹌鹑蛋和鸡蛋的营养价值在总体上是相当的.

问题 3

丁丁是集邮爱好者,2010 年时,她收藏的邮票有 100 张;2011 年时,她收藏的邮票已经有 200 张了. 她用图 28. 3. 5 来表示自己的收藏成果,这样的描述合适吗?

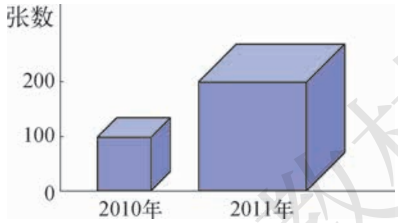


图 28. 3. 5　丁丁的邮票数量

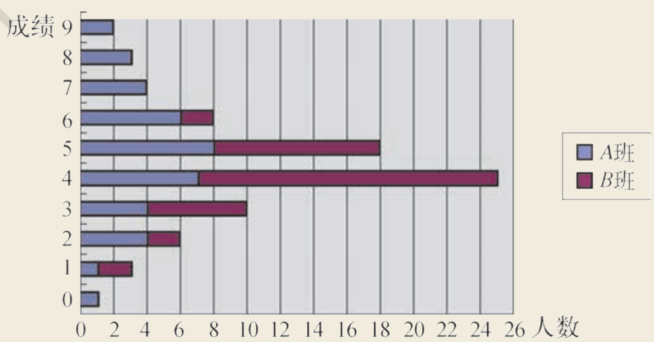
你能帮丁丁画一幅恰当的统计图吗?

从高度看,图 28. 3. 5 中第二个正方体确实是第一个正方体的 2 倍;但从体积上看,却是 2^3 倍. 这样就会使读者产生错误的印象,以为 2011 年丁丁收藏的邮票比 2010 年多了很多. 所以这样的统计图不合适.

习题 28. 3

1. 请在报纸、杂志上找一些统计图,判别它们是否规范.

2. 期末考试前,老师想了解一下同学们的学习情况,组织了一次测试,满分 10 分. A、B 两班的成绩如图所示(例如:A 班中成绩为 6 分的同学有 6 名,B 班中成绩为 6 分的同学有 2 名). 你觉得从测验成绩中老师可以得出哪些结论?



(第 2 题)

3. 下表列出的是某地三种长途电话业务的收费办法,如果某人某日 21∶45 之前必须要拨打一个 5 分钟左右的内地长途电话,请为他推荐一个最经济的服务. 如果他要拨打的是一个 30 分钟左右的内地长途电话,你还推荐这种服务吗? 为什么?

业务种类	内地长途话费	时段
A	0.03 元/6 秒 + 市话费	全天
B	0.30 元/分 + 市话费	全天
C	0.06 元/6 秒	工作日 7:00～20:00
	0.04 元/6 秒	每日 20:00～22:00
	0.03 元/6 秒	每日 22:00～次日 7:00
	0.04 元/6 秒	双休日及国定假日 7:00～20:00

(市话收费标准为:首次 3 分钟 0.20 元,以后每增加 1 分钟话费增加 0.10 元)

4. 近年来,由于乱砍滥伐,我国长江、黄河流域植被遭到破坏,土地沙化严重,洪涝灾害时有发生. 某地区为积极响应和支持"保护母亲河"的倡议,建造了长 100 km、宽 0.5 km 的防护林. 有关部门为统计这一防护林共有多少棵树,从中选出 10 块防护林(每块长 1 km、宽 0.5 km)进行统计,每块防护林的树木数量如下:(单位:棵)

65 100, 63 200, 64 600, 64 700, 67 300,
63 300, 65 100, 66 600, 62 800, 65 500.

请你根据以上数据估算这一防护林总共约有多少棵树.(结果保留到万棵)

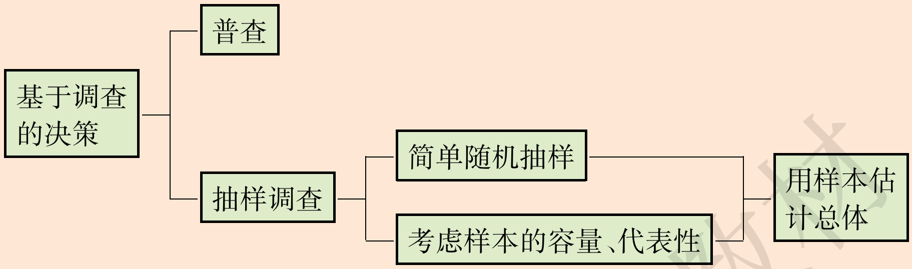
(第 4 题)

5. 下表数据来自 2010 年《中国统计年鉴》,给出了我国不同年份的人均水果产量(单位:kg). 请用恰当的统计图表示这组数据,并据此估计 2010 年我国人均水果产量.

年份	2004	2005	2006	2007	2008	2009
产量	118	124	130	138	145	153

小结

一、知识结构



二、要点

1. 当我们所要考察的对象多得数不胜数的时候，当我们的考察会给考察对象带来损伤破坏的时候，当我们的考察经费和时间都非常有限的时候，抽样调查方法就发挥出其独特的作用了. 简单随机抽样方法是一种很重要的数学方法，它使每个个体都有相等的机会被选入样本.

2. 通过本章的学习，我们体会到抽样调查是一种可以信赖的方法，并看到当样本足够大且有较好的代表性时，样本的平均数、方差与总体的平均数、方差可以很接近. 所以，我们可以用样本估计总体.

3. 我们感受到数据分析对于决策的重要性. 我们应该在进行决策的过程中积极开动脑筋，让学过的知识发挥它们应有的作用. 同时，我们还了解到有些不规范的统计图容易误导读者.

复习题

A 组

1. 下面哪些考察适合用普查,哪些适合用抽样调查?

(1) 要考察一片试验田里某种大麦的穗长情况;

(2) 要考察一个班级中的学生对建立班级生物角的看法;

(3) 要考察人们保护海洋的意识.

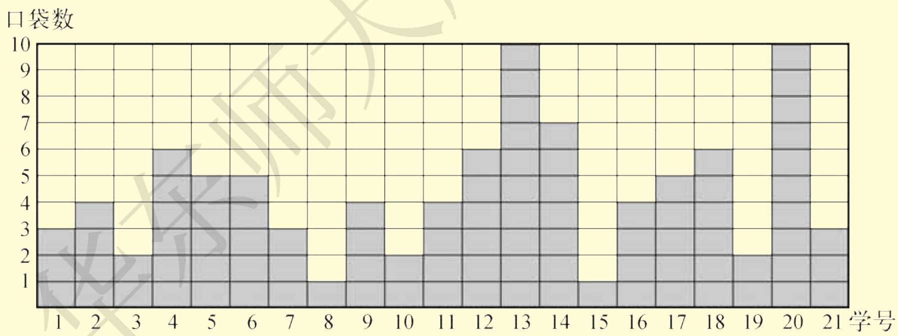
2. 下面抽样调查中的取样合适吗?

(1) 为了考察"6"是否是最难掷出的一个数,小华投掷了 6 次正方体骰子;

(2) 某班的学号是按照先女同学后男同学的顺序排列的,老师想了解学生对举办骑自行车郊游的意见,她请学号最靠前的 20 位学生发表意见.

3. 一厂家在某城市几家经销本厂产品的大商场进行调查,得知本厂产品的销售量占这几个大商场同类产品销售量的 50%. 据此,该厂家在广告中宣传说:他们的产品在国内同类产品的销售量中占 50%. 请你根据所学的统计知识,判断该宣传中的数据是否可靠,为什么?

4. 如图表示的是某班同学衣服上口袋的数目.



(第 4 题)

(1) 从图中是否能够得出以下信息?

(a) 有 4 个人的衣服上恰有 4 个口袋;

(b) 有 1 个人的衣服上恰有 8 个口袋;

(c) 有 3 个人的衣服上恰有 5 个口袋.

(2) 根据上图填写下面的频数分布表,并绘制频数分布直方图.

口袋数目 x	$1 \leqslant x < 3$	$3 \leqslant x < 5$	$5 \leqslant x < 7$	$7 \leqslant x < 9$	$x \geqslant 9$
频数记录					
频　　数					

5. 全校有 3 个年级，每个年级有 4 个班，全校共有 567 名学生. 在下述情况中如何用简单随机抽样方法分别选取样本？

（1）在全校所有年级中随机地抽取 1 个年级；

（2）在全校所有班级中随机地抽取 3 个班级；

（3）在全校 567 名学生中随机地抽取 64 名学生.

B 组

6. 你认为用简单随机抽样方法选取的样本，其平均数是否可能等于总体的平均数？你相信用简单随机抽样方法调查得到的结果吗？为什么？

7. 利用你收集到的男女同学的身高和体重的数据，在男同学的身高和体重以及女同学的身高和体重这四组数据中挑选一组，用简单随机抽样方法选取含有 25 名、40 名、65 名同学的三个样本，计算这三个样本的平均数和方差，再与总体的平均数和方差作对比，看看大一些的样本的平均数和方差是否往往与总体的比较接近.

8. 总厂要评估各个分厂的生产效率，并据此来评定职工奖金. 下表给出了甲、乙两个分厂的产量情况：

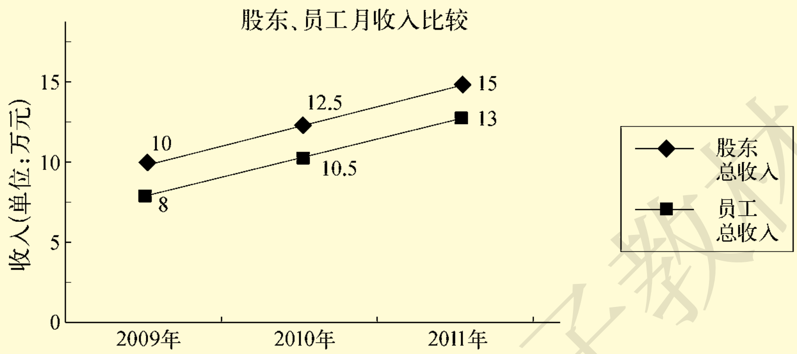
	甲分厂		乙分厂	
	产量(只)	工人数(人)	产量(只)	工人数(人)
新车间	700 000	140	600 000	100
老车间	120 000	60	210 000	100

（1）你认为哪个分厂的生产效率更高？为什么？

（2）甲分厂的负责人说："我分厂工人数与乙分厂相同，总产量比乙分厂高，应该率先提高我分厂工人的奖金."你同意他的说法吗？为什么？

C 组

9. 某公司为了说明其劳资双方的利益呈现同步增长的趋势，画出了如图所示的统计图. 说说你看了这幅图后有什么想法. 如果已知该公司共有 5 位股东和 100 名员工，你会如何分析劳资双方的收入？

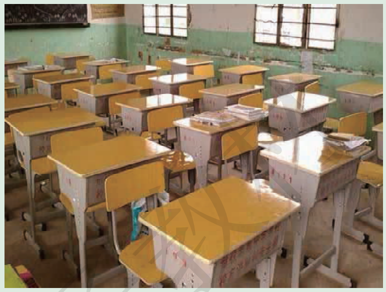


（第 9 题）

10. 专家提醒，目前我国儿童与青少年的健康存在着五个必须重视的问题：营养不良和肥胖、近视、龋齿、贫血以及心理卫生. 你认为这是用普查还是抽样调查得到的结果？设计一份调查问卷和一种抽样调查方案，了解你们学校的学生是否普遍存在这五个健康问题，并指出其严重程度.

综合与实践

改进我们的课桌椅



走进学校,看到每个教室里课桌椅的规格都一样,十分美观. 然而有些同学却感觉课桌椅需要改进,他们说:从小学到现在,我们都长大了,长高了,书包里的书也越来越多了,可是课桌椅却没有改变. 小小的课桌哪里容得下厚厚的书包? 要是嫌地上脏,就只能把书包放在椅子上,这样坐着多不舒服!

你们班的课桌椅也有这样的问题吗? 课桌椅不合适的主要原因是什么呢? 有必要改进现有的课桌椅设计吗? 目前市场上有符合你们需求的课桌椅吗?

让我们一起运用已经掌握的各种知识,尝试解决身边的问题吧!

1. 调查同学们对正在使用的课桌椅的感觉:上课坐着的时候,感觉是否舒服? 当需要和后排同学讨论时,是否方便? 这些感觉是否与同学们的身高、体重等因素有关?

2. 上网或到有关部门查询有关课桌椅的市场情况和一些设计标准.

3. 调查同学们喜欢怎样的课桌椅,有什么好的设计想法,尤其是在照顾学生身高、增大储藏空间、不影响课间活动空间、方便看书写字等方面有什么好点子.

2000 年 8 月在全国青少年技术创新大赛中,一位来自湖南的同学发明制作的“学生保健多用课桌椅”在众多参赛作品中脱颖而出,获得大赛一等奖,他还被授予“高士其青少年发明奖”、“长江小小发明家奖”,并被推荐参加全国青少年“发明创新之星”电视大奖赛和国际科学及工程大奖赛,该项发明已被国家知识产权局授予专利权.

怎么样? 让我们也来试一试! 通过调查,大家一定也会有不少很好的想法.

建议大家在分析数据的基础上,以“改进我们的课桌椅”为主题写一篇有说服力的短文,向有关单位就如何改进课桌椅的设计提出自己的看法.

附表1

男同学身高、体重数据表

学号	身高（cm）	体重（kg）	学号	身高（cm）	体重（kg）	学号	身高（cm）	体重（kg）

男同学身高、体重数据表

学号	身高（cm）	体重（kg）	学号	身高（cm）	体重（kg）	学号	身高（cm）	体重（kg）

男同学身高、体重数据表

学号	身高（cm）	体重（kg）	学号	身高（cm）	体重（kg）	学号	身高（cm）	体重（kg）

附表 2

女同学身高、体重数据表

学号	身高（cm）	体重（kg）	学号	身高（cm）	体重（kg）	学号	身高（cm）	体重（kg）

女同学身高、体重数据表

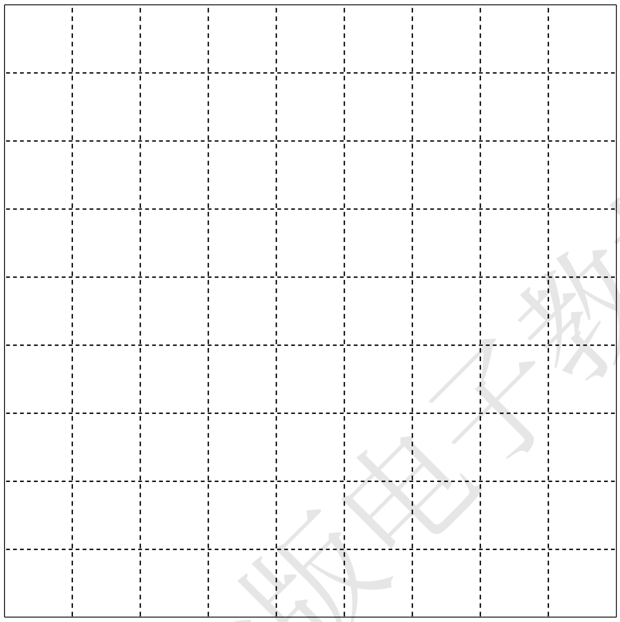
学号	身高（cm）	体重（kg）	学号	身高（cm）	体重（kg）	学号	身高（cm）	体重（kg）

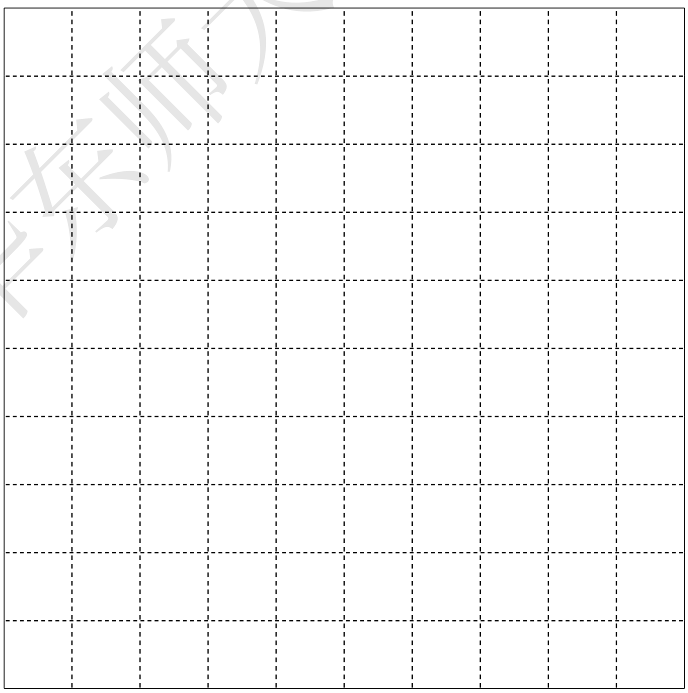
女同学身高、体重数据表

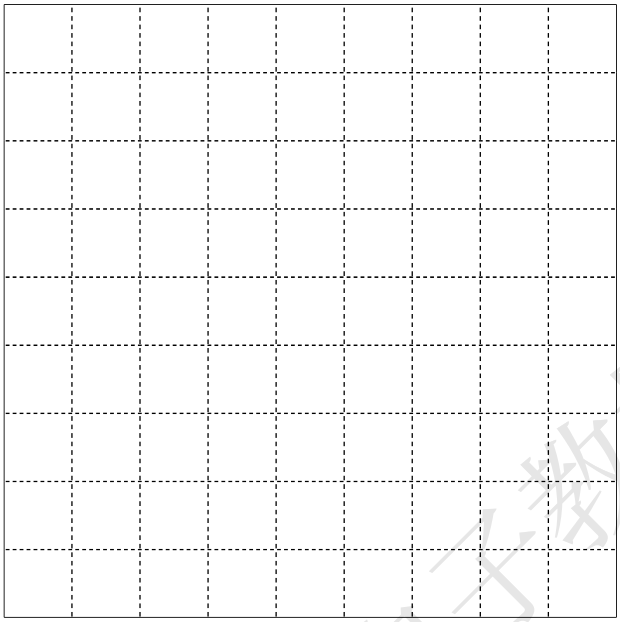
学号	身高（cm）	体重（kg）	学号	身高（cm）	体重（kg）	学号	身高（cm）	体重（kg）

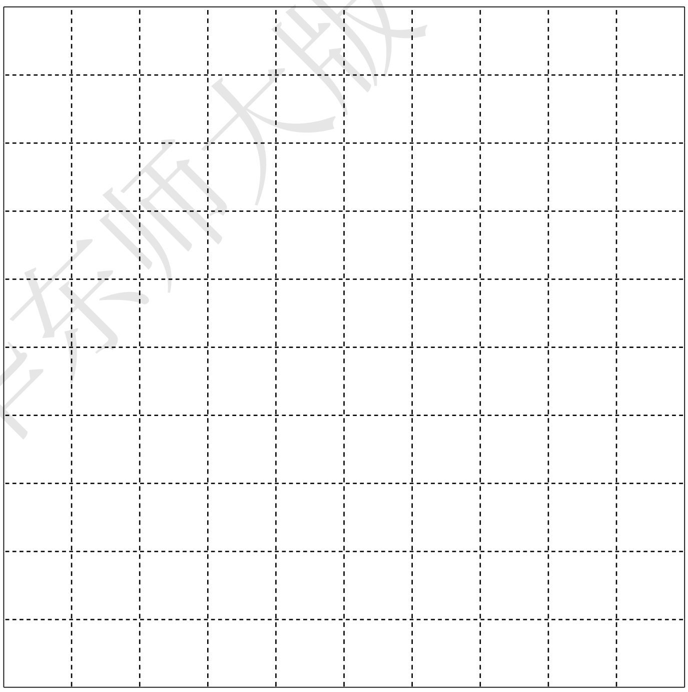
数学实验附图

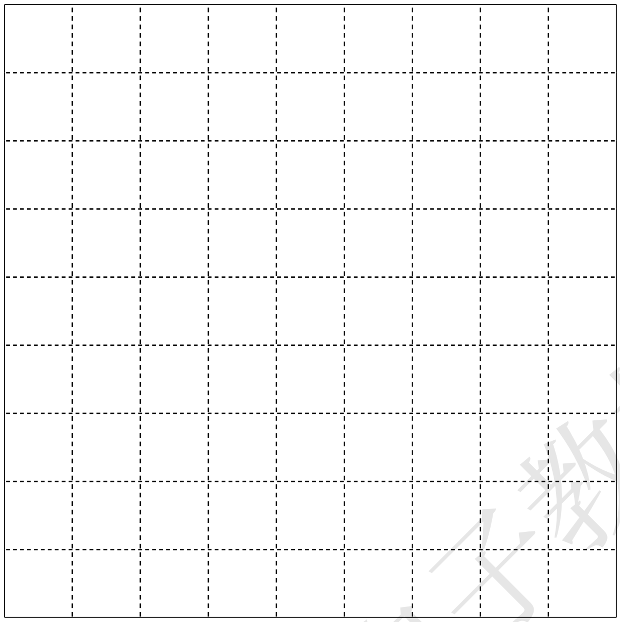
方格图

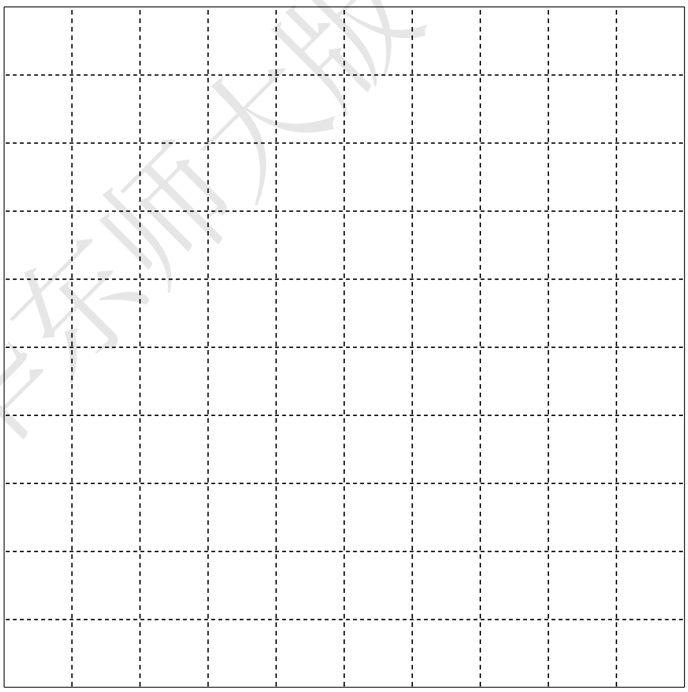




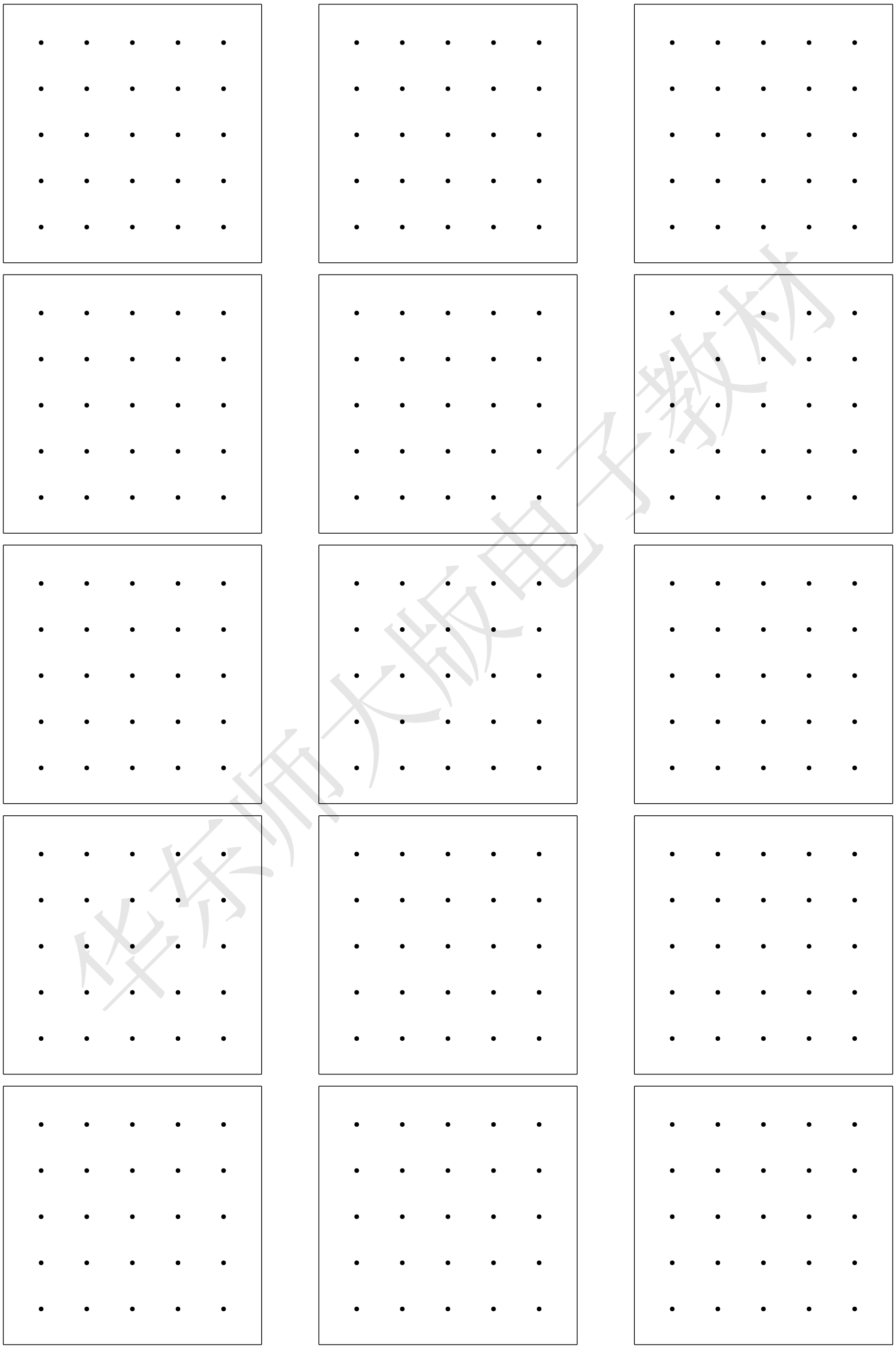


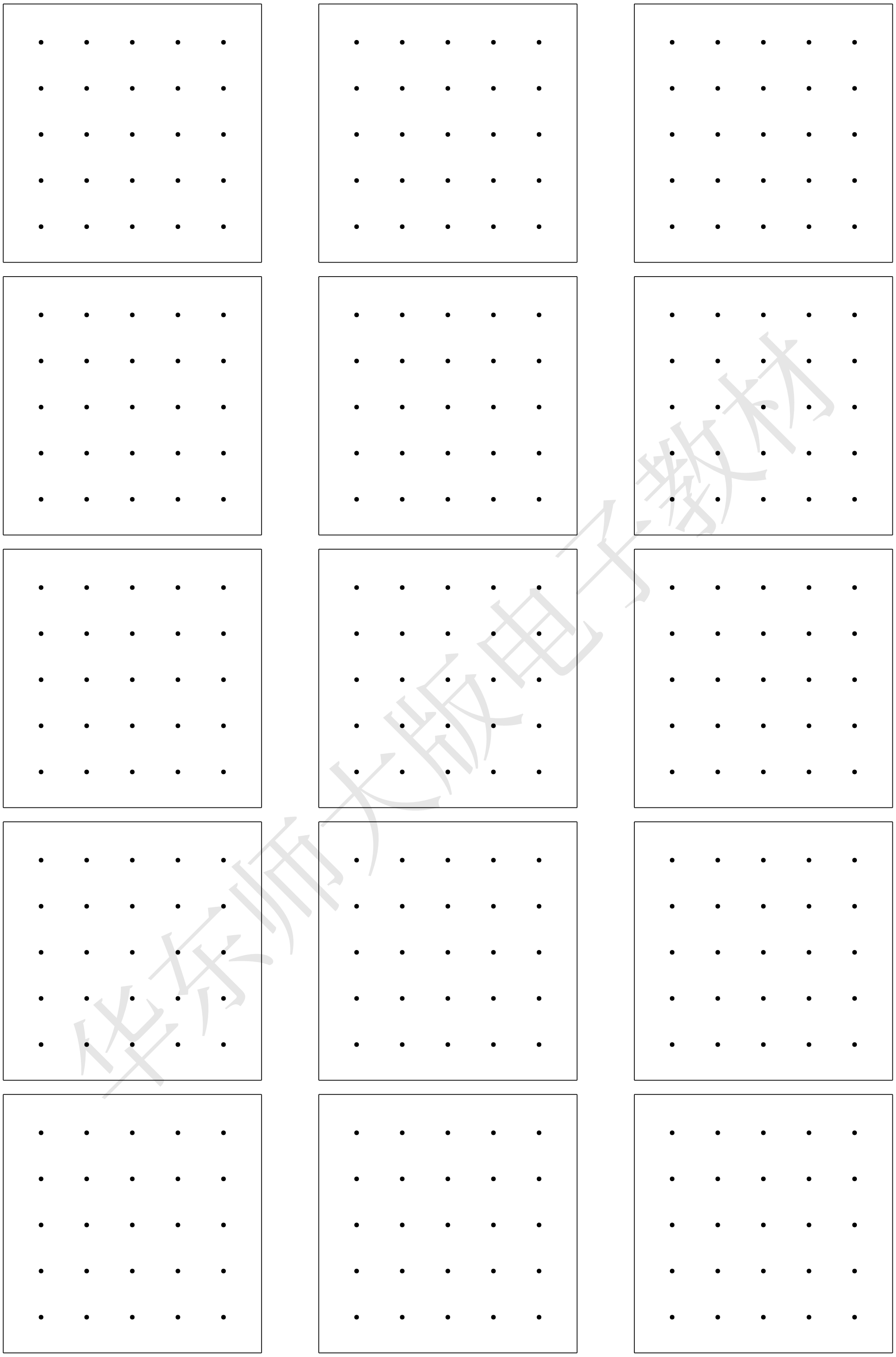


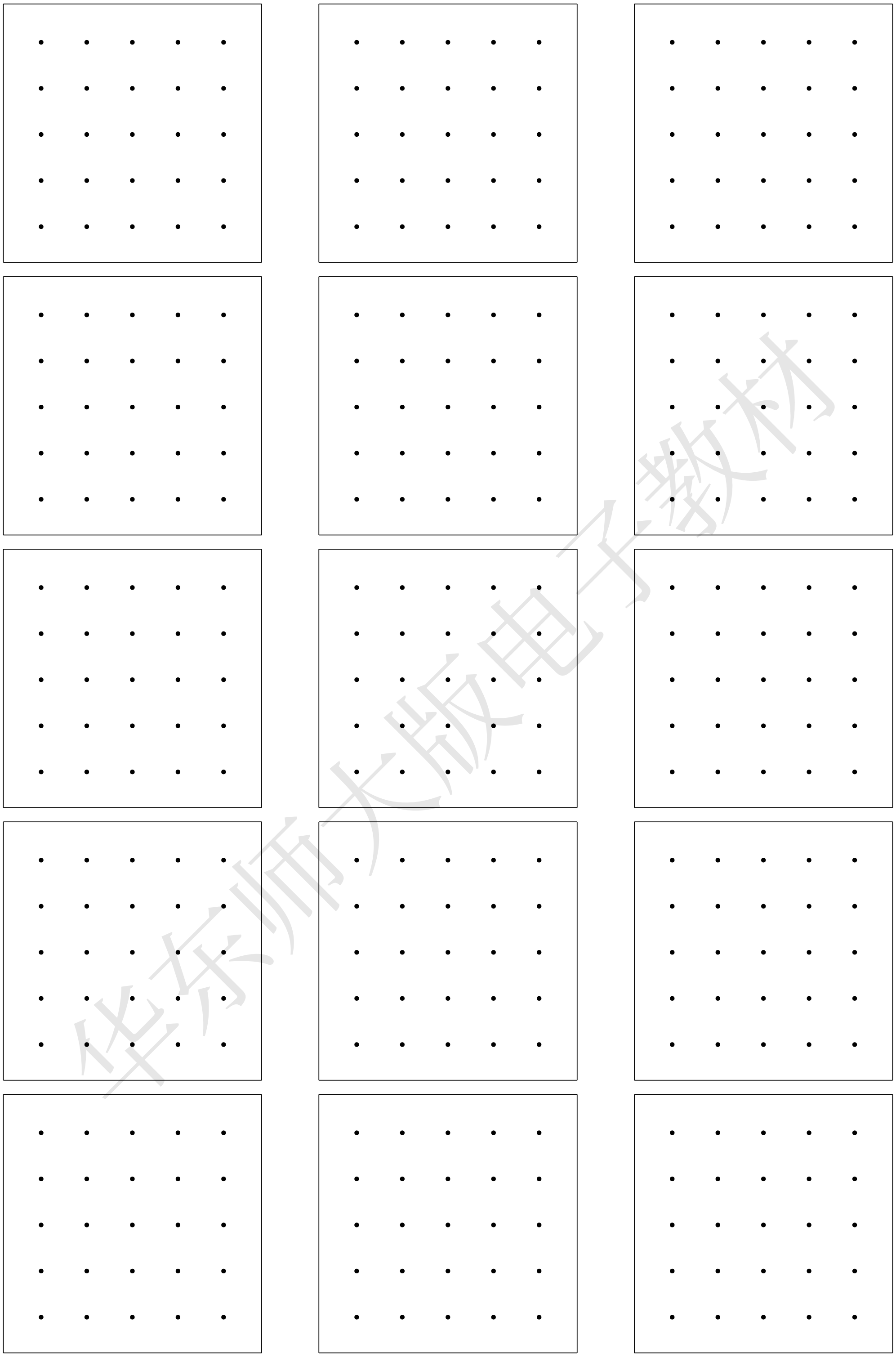




格点图







后　记

华东师大版初中数学教材是最早通过教育部审查的新课标初中数学教材之一. 自 2001 年秋季在 7 个国家级实验区投入实验以来,已有分布在 26 个省、市、自治区的地市选用过或正在选用本套教材. 10 多年来,实验区的广大师生对本套教材寄予了厚爱,为它的不断完善提出了许多宝贵意见. 根据这些意见,在实验期间,我们对教材进行了多次修改. 在此,我们对多年来给予本套教材关心的各级领导、广大实验区师生和各位同仁表示衷心感谢.

根据教育部的统一部署,在 2012 年前要完成义务教育阶段所有新课标教材的修订工作. 为了确保本套教材修订工作的顺利进行,在 2011 年 4 月至 7 月间,我们就本套教材的修订广泛征求了一线教师的意见. 2011 年 9 月在南京召开了"华东师大版初中数学教材修订研讨会",来自实验区的 120 多名教研员和骨干教师以及全体编写人员参加了会议. 会议期间就本套教材修订的整体框架达成了广泛共识. 本套教材的修订稿完成后,我们又特邀有关专家和来自教学一线的教师进行了审稿. 参与本册教材审稿的有冯国卫、郭奕津等专家和教师.

尽管我们对修订工作倾注了心血,但现在呈现在广大师生面前的修订教材肯定还存在有待进一步完善的地方. 我们真诚希望广大师生继续关心我们的教材,对我们的教材不断提出新的宝贵意见.

本册教材修订的撰稿人如下(以姓氏笔画为序):

王继延、李俊、沈加、胡耀华、唐复苏、程靖.