义务教育教科书

数学

SHUXUE

九年级　上册

主　编　王建磐
副主编　王继延
　　　　唐复苏

华东师范大学出版社
·上海·

义务教育教科书

数　学

九年级　上册

主　　编　王建磐
责任编辑　平　萍
责任校对　王丽平
装帧设计　卢晓红

出　　版　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电　　话　021－60821666　传真 021－60821766
客服电话　021－60821720　60821761

印 刷 者　福建省希望彩印有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　11
字　　数　193 千字
版　　次　2014 年 6 月第一版
印　　次　2022 年 7 月福建第十次
书　　号　ISBN 978－7－5675－0640－4
定　　价　10.30 元

出 版 人　王　焰

（如有印装质量问题，请与印刷厂调换或电话 0591－87911211 联系）

致亲爱的同学

欢迎你,我们的小伙伴.

你现在拿在手中的是依据《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020 年)》与国家《义务教育数学课程标准(2011 年版)》,为你们提供的初中阶段六册数学教科书中的第五本.

这本书与你前两年学过的数学教科书一样,从你所熟悉的情境入手,展开一些最基本的、丰富多彩的数学内容,并穿插一些阅读材料,设置一些让你思考、实践与自主探索的栏目. 不同层次的习题,应用性、探索性和开放性的各种形式的问题及综合与实践等,都将为你提供充分展示聪明才智与数学能力的机会.

现在,请你打开这本书,与我们一起继续在奇妙的数学世界漫游,探索发现更多、更具魅力的数学奥秘.

前面我们学过的有理式(整式和分式),式子中只含有加、减、乘、除及乘方运算. 你将要接触到的**“二次根式”**,则还要涉及开平方运算,它与算术平方根有着千丝万缕的联系. 它将带你进入一个新的天地,你的认识会得到进一步深化.

我们已经认识了方程,多次与各种方程打交道,并用来解决过不少实际问题. 现实生活中,还会碰到各种各样的新问题,例如,怎样设计小区绿地的形状? 如何计算人口的年增长率? 这些往往要涉及**“一元二次方程”**,它也是解决实际问题的有用工具. 学习它,你的见识会进一步增长,你的本领也将大大提高.

你知道古埃及人是如何测量金字塔高度的吗? **“图形的相似”**将告诉你这个奥秘. 你的周围世界有许许多多相似的图形,它们具有什么共同的特征? 如何判定两个图形相似呢? 学习了这一章,你就会揭开其中的奥秘,就会对相似及相似图形的面貌特征有更深刻的理解. 相似与轴对称、平移、旋转一样,也是图形之间的一种基本变换,已经学过的全等就是相似的一个特例. 你将进一步有机结合合情推理与演绎推理,提高数学思维能力.

“解直角三角形”一章将与你一起探索、发现、认识直角三角形的有关性质以及边与角之间所存在的关系,即锐角三角函数. 在这里,我们还将一起运用这些重要的结论,解决与直角三角形有关的许多度量问题,你将学到许多解决实际问题的本领.

最后,**“随机事件的概率”**这一章将在你认识随机事件发生的可能性的基础上,通过大量重复的试验,运用数据分析进一步理解随机事件概率的数学本质,学会运用简单的方法计算随机事件的概率,更好地用数学语言表述自己的见解.

我们相信,这本书一定能帮助你继续在丰富多彩的数学世界漫游、探索,充分发挥你的想象力与创造力,解决各种各样的问题.

数学世界继续欢迎你,为你探索数学的奥秘,打开一道道神秘的大门.

编者

目　录

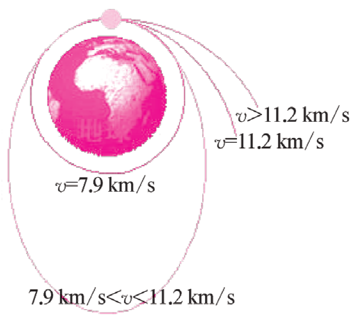
第 23 章　图形的相似

第 24 章　解直角三角形

第 25 章　随机事件的概率

数学实验附图

第21章　二次根式



人造地球卫星要冲出地球，围绕地球运行，发射时就必须达到一定的速度，这个速度称为第一宇宙速度．计算第一宇宙速度的公式是：

$$v=\sqrt{gR},$$

其中g为重力加速度，R为地球半径．

本章将学习二次根式及其运算.

21.1 二次根式

$\sqrt{a}$表示什么？a应满足什么条件？

在第 11 章我们学习了平方根和算术平方根的意义，引进了一个记号$\sqrt{a}$.

回顾

当a是正数时，$\sqrt{a}$表示a的算术平方根，即正数a的正的平方根.

当a是零时，$\sqrt{a}$等于0，它表示零的平方根，也叫做零的算术平方根.

当a是负数时，$\sqrt{a}$没有意义.

概括

$\sqrt{a}\ (a \geqslant 0)$表示非负数$a$的算术平方根，也就是说，$\sqrt{a}\ (a \geqslant 0)$是一个非负数，它的平方等于$a$，即有：

(1) $\sqrt{a} \geqslant 0\ (a \geqslant 0)$；

(2) $(\sqrt{a})^2 = a\ (a \geqslant 0)$.

形如$\sqrt{a}\ (a \geqslant 0)$的式子叫做**二次根式**.

注意

在$\sqrt{a}$中，a的取值必须满足$a \geqslant 0$，即二次根式的被开方数必须是非负数.

例 x是怎样的实数时，二次根式$\sqrt{x-1}$有意义？

分析 要使二次根式有意义，被开方数必须是非负数.

解 被开方数$x-1 \geqslant 0$，即$x \geqslant 1$.

所以，当$x \geqslant 1$时，二次根式$\sqrt{x-1}$有意义.

思考

$\sqrt{a^2}$ 等于什么？

这里 a 的取值有没有限制？取 a 的一些值，分别计算 $\sqrt{a^2}$ 的值. 从中你能发现什么？

我们不妨取 a 的一些值，如 2、-2、3、-3 等，分别计算对应的 $\sqrt{a^2}$ 的值，看看有什么规律：

$$\sqrt{2^2}=\sqrt{4}=2;$$
$$\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2;$$
$$\sqrt{3^2}=\sqrt{9}=3;$$
$$\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3;$$
$$\cdots\cdots$$

概括

当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a^2}=a$；

当 $a<0$ 时，$\sqrt{a^2}=-a$.

这是二次根式的又一重要性质. 如果二次根式的被开方数是一个完全平方数，运用这个性质，可以将它“开方”出来，从而达到化简的目的.

练　习

1. 计算：

(1) $(\sqrt{8})^2$；　(2) $(\sqrt{9})^2$；　(3) $\sqrt{81}$；　(4) $\sqrt{100}$.

2. x 是怎样的实数时，下列二次根式有意义？

(1) $\sqrt{x+3}$；　(2) $\sqrt{2x-5}$；　(3) $\sqrt{\dfrac{1}{x}}$；　(4) $\sqrt{\dfrac{5}{1-x}}$.

3. $(\sqrt{a})^2$ 与 $\sqrt{a^2}$ 是一样的吗？说说你的理由，并与同学交流.

习题 21.1

1. x 是怎样的实数时，下列二次根式有意义？

(1) $\sqrt{x+1}$；　(2) $\sqrt{3x-2}$；　(3) $\sqrt{\dfrac{3}{2x+1}}$；　(4) $\sqrt{\dfrac{1}{3-2x}}$.

2. 计算：

(1) $(\sqrt{7})^2$；　(2) $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2$；　(3) $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$；　(4) $\sqrt{9a^4}$.

3. 已知 $2<x<3$，化简：$\sqrt{(x-2)^2}+|x-3|$.

阅读材料

蚂蚁和大象一样重吗

你一定听过蚂蚁和大象进行举重比赛的故事吧！蚂蚁能举起比它的体重重许多的火柴棒，而大象举起的却是比自己体重轻许多的一截圆木，结果蚂蚁获得了举重冠军！

我们这里谈论的话题是：蚂蚁和大象一样重吗？我们知道，即使是最大的蚂蚁与最小的大象，它们的重量也明显不是一个数量级的. 但是下面的“推导”却让我们大吃一惊：蚂蚁和大象一样重！？

设蚂蚁的重量为 x 克，大象的重量为 y 克，它们的重量和为 $2a$ 克，即

$$x+y=2a.$$

两边同乘以 $(x-y)$，得

$$(x+y)(x-y)=2a(x-y),$$

即

$$x^2-y^2=2ax-2ay.$$

可变形为

$$x^2-2ax=y^2-2ay.$$

两边都加上 a^2，得

$$(x-a)^2=(y-a)^2.$$

于是 $$\sqrt{(x-a)^2}=\sqrt{(y-a)^2},$$
得 $$x-a=y-a,$$
所以 $$x=y.$$

这里竟然得出了“蚂蚁和大象一样重”的结论，岂不荒唐！那么问题究竟出在哪里呢？亲爱的同学，你能找出来吗？

21.2 二次根式的乘除

1. 二次根式的乘法

试一试

计算：

(1) $\sqrt{4}\times\sqrt{25}$ 与 $\sqrt{4\times 25}$；

(2) $\sqrt{16}\times\sqrt{9}$ 与 $\sqrt{16\times 9}$.

观察计算的结果，你能发现什么？

思考

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{2\times 3}$ 呢？

用计算器分别计算一下，看看两者是否相等. 你能说出道理吗？

从计算的结果我们发现：

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times 3}.$$

这是什么道理呢？

事实上,根据积的乘方法则,有

$$(\sqrt{2}\times\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2\times(\sqrt{3})^2=2\times3,$$

并且 $$\sqrt{2}\times\sqrt{3}>0,$$

所以 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ 是 2×3 的算术平方根,即

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}.$$

一般地,有

$$\boxed{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant0,\ b\geqslant0).}$$

这就是说,**两个算术平方根的积,等于它们被开方数的积的算术平方根.**

注意,在上式中,a、b 都表示非负数. 在本章中,如果没有特别说明,字母都表示正数.

例 1 计算:

(1) $\sqrt{7}\times\sqrt{6}$; (2) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt{32}$.

解 (1) $\sqrt{7}\times\sqrt{6}=\sqrt{7\times6}=\sqrt{42}$.

(2) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt{32}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\times32}=\sqrt{16}=4$.

2. 积的算术平方根

上面得到的等式 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant0,\ b\geqslant0)$,也可以写成

$$\boxed{\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant0,\ b\geqslant0).}$$

这就是说,**积的算术平方根,等于各因式算术平方根的积.**

利用这个性质可以进行二次根式的化简.

例 2 化简 $\sqrt{12}$,使被开方数不含完全平方的因数.

解
$$\begin{aligned}\sqrt{12} &= \sqrt{2^2 \times 3}\\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3}\\ &= 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

这里,被开方数 $12 = 2^2 \times 3$,含有完全平方的因数 2^2,通常可根据积的算术平方根的性质,并利用 $\sqrt{a^2} = a(a \geqslant 0)$,将这个因数“开方”出来.

做一做

计算下列各式,并将所得的结果化简:

(1) $\sqrt{3 \times 6}$;　　(2) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{15}$.

3. 二次根式的除法

讨论

两个二次根式相除,怎样进行运算呢?商的算术平方根又等于什么?试参考上面的研究,和同伴讨论,提出你的见解.

概括

一般地,有

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \underline{\qquad\qquad} \quad (a \geqslant 0,\ b > 0).$$

这里为什么要求 $a \geqslant 0$,$b > 0$?

这就是说,**两个算术平方根的商,等于**____.

例 3 计算：

(1) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$；　　　　(2) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$.

解 (1) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{15}{3}}=\sqrt{5}$.

(2) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\dfrac{24}{6}}=\sqrt{4}=2$.

题(2)也可先将分子化简为 $2\sqrt{6}$，从而容易算得结果.

第 7 页“概括”中的等式，也可以写成

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\underline{\qquad\qquad}\ (a\geqslant 0,\ b>0).$$

这就是说，**商的算术平方根，等于**________________.

利用这个性质可以进行二次根式的化简.

例 4 化简 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，使分母中不含二次根式，并且被开方数中不含分母.

解 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{1\times 2}{2\times 2}}=\sqrt{\dfrac{2}{2^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

这里，二次根式 $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ 的被开方数中含有分母，通常可利用分数(或分式)的基本性质将分母“配”成完全平方，再“开方”出来.

按照例 2 和例 4 的要求，化简后的二次根式被开方数中不含分母，并且被开方数中所有因数(或因式)的幂的指数都小于 2，像这样的二次根式称为**最简二次根式**.

二次根式的除法，要化去分母中的根号，只要将分子、分母同乘以一个恰当的二次根式就可以了. 如例 4，将分子、分母同乘以 $\sqrt{2}$，得

通常将这种化简过程称为分母有理化.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

练　习

1. 化简：

(1) $\sqrt{27}$；　　(2) $\sqrt{200}$；

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$；　　(4) $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

2. 计算：

(1) $\sqrt{21}\times\sqrt{35}$；　　(2) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{20}}$.

3. 现有一张边长为 1 m 的正方形彩纸，欲从中剪下一个面积为其一半的正方形，问剪下的正方形边长是多少？（结果先用最简二次根式表示，再算出近似值，精确到 0.01 m）

习题 21.2

1. 化简：

(1) $\sqrt{250}$；　　(2) $\sqrt{54}$；

(3) $\dfrac{14}{\sqrt{7}}$；　　(4) $\sqrt{\dfrac{5}{6}}$.

2. 计算：

(1) $\sqrt{18}\times\sqrt{30}$；　　(2) $\sqrt{3}\times\sqrt{\dfrac{2}{75}}$；

(3) $\dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{98}}$；　　(4) $\dfrac{\sqrt{20}-1}{\sqrt{5}}$.

3. 某液晶显示屏的对角线长为 36 cm，其长与宽之比为 4∶3. 试求该液晶显示屏的长与宽.

21.3 二次根式的加减

试一试

联想整式加减运算中的合并同类项,你会做吗?

计算:

(1) $3\sqrt{3}-2\sqrt{3}$;　　　(2) $3\sqrt{a}-2\sqrt{a}+4\sqrt{a}$.

概括

与整式中同类项相类似,我们把像 $3\sqrt{a}$、$-2\sqrt{a}$ 与 $4\sqrt{a}$ 这样的几个二次根式,称为同类二次根式. $3\sqrt{3}$ 与 $-2\sqrt{3}$ 也是同类二次根式.

二次根式的加减,与整式的加减相类似,关键是将同类二次根式合并.

例 1 计算: $3\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{2}-3\sqrt{3}$.

解 $3\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{2}-3\sqrt{3}$

$=(3\sqrt{2}-2\sqrt{2})+(\sqrt{3}-3\sqrt{3})$

$=\sqrt{2}-2\sqrt{3}$.

思考

这里三个"加数"中有同类二次根式吗?将它们化简以后看一看,再完成本题的解答.

计算: $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{12}$.

分析 先将各二次根式化简:

$\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$,

$\sqrt{18}=$ ________________,

$\sqrt{12}=$ ________________.

解 $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{12}$

$=2\sqrt{2}+$ ________ $+$ ________

$=$ ________________.

二次根式相加减,先把各个二次根式化简,再将同类二次根式合并.

例 2 计算:

(1) $\sqrt{27}-\sqrt{12}+\sqrt{45}$; (2) $\sqrt{\frac{25}{2}}+\sqrt{32}-\sqrt{18}$.

解 (1) $\sqrt{27}-\sqrt{12}+\sqrt{45}$

$=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$

$=\sqrt{3}+3\sqrt{5}$.

(2) $\sqrt{\frac{25}{2}}+\sqrt{32}-\sqrt{18}$

$=\frac{5}{2}\sqrt{2}+4\sqrt{2}-3\sqrt{2}$

$=\left(\frac{5}{2}+4-3\right)\sqrt{2}$

$=\frac{7}{2}\sqrt{2}$.

例 3 计算:

(1) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$; (2) $(\sqrt{2}-1)^2$.

解 (1) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$

$=(\sqrt{2})^2-1^2$

$=2-1$

$=1$.

(2) $(\sqrt{2}-1)^2$

$=(\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 1+1^2$

$=3-2\sqrt{2}$.

练　习

1. 计算：

(1) $2\sqrt{3}-\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{4}$；　　(2) $5\sqrt{3}-3\sqrt{75}$.

2. 计算：

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$；　　(2) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$.

习题 21.3

1. 计算：

(1) $3\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{5}-4\sqrt{2}$；

(2) $2\sqrt{75}-3\sqrt{27}+\sqrt{12}$；

(3) $\sqrt{72}+\sqrt{18}-\frac{3\sqrt{2}}{2}$；

(4) $2\sqrt{\frac{2}{3}}-3\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{24}$.

2. 计算：

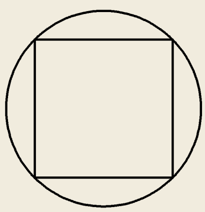
(1) $(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})$；

(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$；

(3) $(2\sqrt{5}-3)(3\sqrt{5}+2)$；

(4) $(3\sqrt{2}-2)^2$.

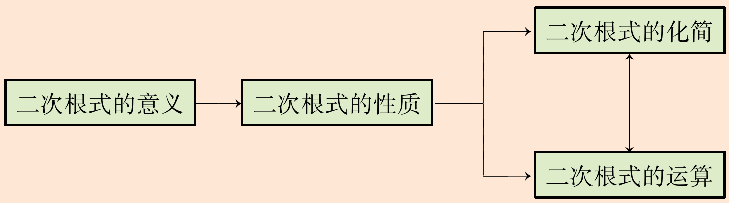
3. 用一根铁丝做成一个正方形，使它恰好能嵌入一个直径为 20 cm 的圆中（如图），求这根铁丝的长度.（精确到 0.1 cm）



（第 3 题）

小结

一、知识结构



二、要点

1. 理解符号$\sqrt{a}$的意义是研究二次根式的关键. $\sqrt{a}$表示非负数 a 的算术平方根,即有:

(1) $\sqrt{a} \geqslant 0\ (a \geqslant 0)$;

(2) $(\sqrt{a})^2 = a\ (a \geqslant 0)$.

要注意二次根式中字母的取值范围:被开方数必须是非负数.

2. 二次根式的化简是进行二次根式运算的重要手段,二次根式的化简主要包括两个方面:

(1) 如果被开方数中含有完全平方的因数(或因式),可利用积的算术平方根的性质,将它们"开方"出来;

(2) 如果被开方数中含有分母,通常可利用分数(或分式)的基本性质将分母"配"成完全平方,再将它们"开方"出来.

化简的关键点是要把被开方数中的完全平方因数(或因式)"开方"出来. 在这个过程中,二次根式的性质"$\sqrt{a^2} = a\ (a \geqslant 0)$"起着举足轻重的作用.

3. 二次根式的运算,主要研究二次根式的乘除和加减.

(1) 二次根式的乘除,只需将被开方数进行乘除,其依据是:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}\,(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0);$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}\,(a \geqslant 0,\ b > 0).$$

（2）二次根式的加减类似于整式的加减，关键是合并同类二次根式. 通常应先将各个二次根式化简（化为最简二次根式），再把同类二次根式合并.

二次根式运算的结果应尽可能化简.

复习题

A 组

1. 计算：

(1) $\sqrt{5}\times\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{5}\times\sqrt{10}$；

(3) $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{35}}$；

(4) $\sqrt{52}+2\sqrt{13}$；

(5) $\dfrac{5\sqrt{24}}{2}-3\sqrt{\dfrac{2}{3}}$；

(6) $(\sqrt{12}+5\sqrt{8})\times\sqrt{3}$；

(7) $\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$；

(8) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

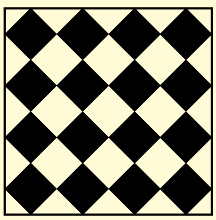
2. x 取何值时，下列各二次根式有意义？

(1) $\sqrt{3x-4}$；

(2) $\sqrt{2+\dfrac{2}{3}x}$.

3. x 是怎样的实数时，$\sqrt{(x-2)(3-x)}=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{3-x}$？

4. 如图，边长为 8 米的正方形大厅，地面由大小完全相同的黑、白正方形方砖相间铺成. 求每块方砖的边长. (精确到 0.01 米)



(第 4 题)

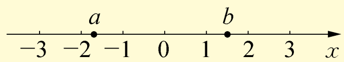
B 组

5. 要使 $\sqrt{a^2}+a=0$，a 的取值范围是________.

6. 要使 $\sqrt{a-3}-\sqrt{3-a}$ 有意义，a 的值为________.

7. 要使 $\sqrt{(x-2)^2}=(\sqrt{x-2})^2$，$x$ 的取值范围是________.

8. 实数 a、b 在数轴上的位置如图所示，化简：$\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(b-1)^2}-\sqrt{(a-b)^2}$.



（第 8 题）

C 组

9. 化简：$\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}$.（提示：由 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$，得 $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$. 将$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，…，$\dfrac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}$作类似的变形）

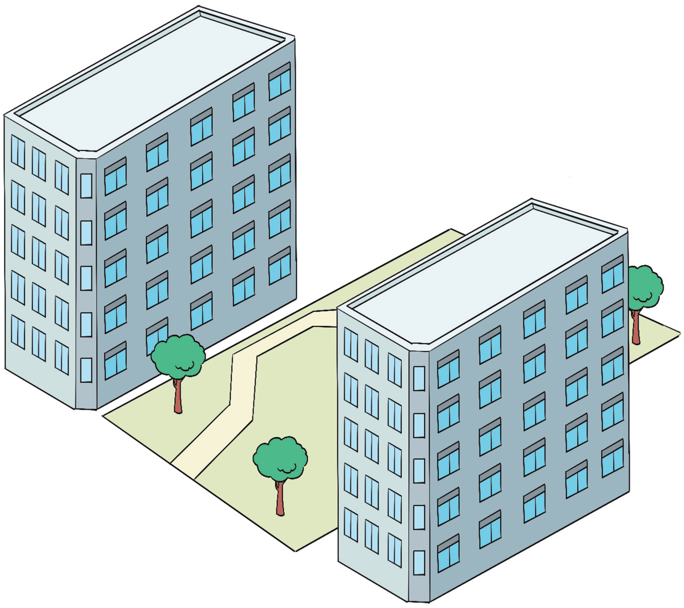
10. 19 世纪俄国文学巨匠列夫·托尔斯泰曾在其作品《一个人需要很多土地吗》中写了这样一个故事：

有一个叫巴霍姆的人到草原上去购买土地，卖地的酋长出了一个非常奇怪的地价“每天 1 000 卢布”，意思是谁出 1 000 卢布，只要他日出时从规定地点出发，日落前返回出发点，所走过的路线圈起的土地就全部归他. 如果日落前不能回到出发点，那么他就得不到半点土地，白出 1 000 卢布.

巴霍姆觉得这个条件对自己有利，便付了 1 000 卢布. 第二天天刚亮，他就连忙在草原上大步向前走去. 他走了 10 俄里（1 俄里 ≈ 1.066 8 千米）后，向左拐弯，走了许久，再向左拐弯，又走了 2 俄里，这时他发现天色不早，而自己离出发点还足有 15 俄里的路程，于是只得改变方向，径直朝出发点奔去……最后，他总算如期赶到了出发点，却因过度劳累，口吐鲜血而死.

请你算一算，巴霍姆这一天走了多少俄里？他走过的路线围成的土地面积有多大？（结果保留根号）

第22章　一元二次方程



绿苑小区在规划设计时，准备在两幢楼房之间，设置一块面积为900平方米的矩形绿地，并且长比宽多10米，那么绿地的长和宽各为多少?

设绿地的宽为x米，可列出方程

$$x(x+10)=900,$$

整理得

$$x^2+10x-900=0.$$

得到的是一个一元二次方程.

本章将学习一元二次方程的解法，
并用来解决简单的实际问题.

22.1 一元二次方程

问题 1

绿苑小区在规划设计时，准备在两幢楼房之间，设置一块面积为 900 平方米的矩形绿地，并且长比宽多 10 米，那么绿地的长和宽各为多少？

分析 我们已经知道可以运用方程解决实际问题.

设绿地的宽为 x 米，不难列出方程

$$x(x+10)=900,$$

整理得

$$x^2+10x-900=0. \qquad (1)$$

问题 2

学校图书馆去年年底有图书 5 万册，预计到明年年底增加到 7.2 万册. 求这两年的年平均增长率.

分析 设这两年的年平均增长率为 x.

已知去年年底的图书数是 5 万册，则今年年底的图书数是 $5(1+x)$ 万册.

同样，明年年底的图书数又是今年年底图书数的 $(1+x)$ 倍，即 $5(1+x)(1+x)=5(1+x)^2$（万册）.

可列得方程

$$5(1+x)^2=7.2,$$

整理可得

$$5x^2+10x-2.2=0. \qquad (2)$$

思考

问题 1 和问题 2 分别归结为解方程(1)和(2). 显然,这两个方程都不是一元一次方程. 那么这两个方程与一元一次方程的区别在哪里? 它们又有什么共同特点呢?

概括

上述两个整式方程中都只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是 2,这样的方程叫做**一元二次方程**(quadratic equation with one unknown). 一元二次方程的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0\quad(a、b、c\text{是已知数},\ a\neq 0),$$

其中 a、b、c 分别叫做二次项系数、一次项系数和常数项.

请分别指出问题 1 和问题 2 中两个方程的二次项系数、一次项系数和常数项.

练　习

将下列一元二次方程化为一般形式,并指出方程的二次项系数、一次项系数和常数项:

(1) $3x^2-x=2$;

(2) $7x-3=2x^2$;

(3) $x(2x-1)-3x(x-2)=0$;

(4) $2x(x-1)=3(x+5)-4$.

习题 22.1

1. 关于 x 的方程 $mx^2-3x=x^2-mx+2$ 是一元二次方程，m 应满足什么条件？
2. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 有一个根是 0，求 m 的值.
3. 根据题意，列出方程：(不必求解)
   学校中心大草坪上准备建两个同样大小的圆形花坛，要求使花坛的面积是余下草坪面积的一半. 已知草坪是长和宽分别为 80 米和 60 米的矩形，求花坛的半径.

22.2 一元二次方程的解法

1. 直接开平方法和因式分解法

试一试

解下列方程：

(1) $x^2=4$；　　　　(2) $x^2-1=0$.

你是怎样解的？

概括

对于题(1)，有这样的解法：

方程 $$x^2=4,$$

意味着 x 是 4 的平方根，所以

$$x=\pm\sqrt{4},$$

即 $$x = \pm 2.$$

这里得到了方程的两个根，通常也表示成

$$x_1 = 2,\ x_2 = -2.$$

这种解一元二次方程的方法叫做**直接开平方法**.

对于题(2)，有这样的解法：

将方程左边用平方差公式分解因式，得

$$(x-1)(x+1) = 0,$$

必有

$$x-1=0 \text{ 或 } x+1=0.$$

分别解这两个一元一次方程，得

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1.$$

这种解一元二次方程的方法叫做**因式分解法**.

思考

(1) 方程 $x^2 = 4$ 能否用因式分解法来解？要用因式分解法解，首先应将方程化成什么形式？

(2) 方程 $x^2 - 1 = 0$ 能否用直接开平方法来解？要用直接开平方法解，首先应将方程化成什么形式？

做一做

试用两种方法解方程：

$$x^2 - 900 = 0.$$

例1 解下列方程：

(1) $x^2 - 2 = 0$；　　(2) $16x^2 - 25 = 0$.

解 (1) 移项，得

$$x^2=2.$$

直接开平方，得

$$x=\pm\sqrt{2}.$$

即 $$x_1=\sqrt{2},\ x_2=-\sqrt{2}.$$

(2) 移项，得

$$16x^2=25.$$

方程两边都除以 16，得

$$x^2=\frac{25}{16}.$$

还有其他解法吗?

直接开平方，得

$$x=\pm\frac{5}{4}.$$

即 $$x_1=\frac{5}{4},\ x_2=-\frac{5}{4}.$$

例 2 解下列方程：

(1) $3x^2+2x=0$； (2) $x^2=3x$.

解 (1) 方程左边分解因式，得

$$x(3x+2)=0.$$

所以 $$x=0\text{ 或 }3x+2=0.$$

得 $$x_1=0,\ x_2=-\frac{2}{3}.$$

(2) 移项，得

$$x^2-3x=0.$$

方程左边分解因式，得

$$x(x-3)=0.$$

所以 $x=0$ 或 $x-3=0$.

得 $x_1=0$, $x_2=3$.

读一读

什么时候两数的积为零

——谈谈因式分解法解方程的依据

用因式分解法解一元二次方程时，我们先将左边化为两个一次因式的乘积，右边是0的形式，如“试一试”中的 $(x-1)(x+1)=0$；然后由乘积等于零，得到两个因式中至少有一个等于零，从而将一元二次方程“降次”，转化为两个一元一次方程：$x-1=0$ 和 $x+1=0$ 来解.

这里方程变形的依据，实际上还是关于等式的性质：两数乘积等于零，必须且只需其中至少有一个乘数等于零. 也就是说，当且仅当 $a=0$ 或 $b=0$ 时，$ab=0$. 证明如下：

设 a、b 是两个实数，如果 $a=0$ 或 $b=0$，因为零乘以任何数都等于零，所以 $ab=0$；

反过来，如果 $ab=0$，那么必有 $a=0$ 或 $b=0$. 我们不难用反证法证明这个结论. 事实上，假设结论不成立，即 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$，这时必有 $ab\neq 0$，与已知 $ab=0$ 矛盾，所以假设不成立，即 $a=0$ 或 $b=0$.

练习

解下列方程：

(1) $x^2=169$；　(2) $45-x^2=0$；　(3) $12y^2-25=0$；

(4) $x^2-2x=0$；　(5) $(t-2)(t+1)=0$；　(6) $x(x+1)-5x=0$.

例3 解下列方程：

(1) $(x+1)^2-4=0$；

(2) $12(2-x)^2-9=0$.

分析 两个方程都可以通过简单的变形，化为

$$(\qquad\qquad)^2 = a\ (a \geqslant 0)$$

的形式，用直接开平方法求解.

解 （1）原方程可以变形为

$$(x+1)^2 = 4.$$

直接开平方，得

$$x+1 = \pm 2.$$

所以 $x_1 = 1,\ x_2 = -3.$

你是这样解的吗？还有没有其他解法？

（2）原方程可以变形为

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

直接开平方，得

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

所以 $x_1 = \underline{\qquad\quad},\ x_2 = \underline{\qquad\quad}.$

你知道吗？

小张和小林一起解方程

$$x(3x+2) - 6(3x+2) = 0.$$

小张将方程左边分解因式，得

$$(3x+2)(x-6) = 0,$$

所以 $3x+2=0$ 或 $x-6=0.$

得 $x_1 = -\dfrac{2}{3},\ x_2 = 6.$

小林的解法是这样的：

移项，得 $x(3x+2) = 6(3x+2),$

方程两边都除以$(3x+2)$，得

$$x=6.$$

小林说："我的方法多简便！"可另一个根$x=-\frac{2}{3}$哪里去了？小林的解法对吗？你能解开这个谜吗？

练　习

解下列方程：

(1) $(x+2)^2-16=0$；　(2) $(2x+3)^2-25=0$；

(3) $4(1-3x)^2=1$；　(4) $3(x-1)^2-18=0$.

2. 配方法

例4　解方程：$x^2+2x=5$.

思考

要用直接开平方法求解，首先希望能将方程化为

$$(\qquad)^2=a$$

的形式. 那么，怎么实现呢？

为此，通常设法在方程两边同时加上一个适当的数，使左边配成一个含有未知数的完全平方式（右边是一个常数）. 那么，本题中，要把$x^2+2x=5$的左边配成完全平方式，这个"适当的数"是什么呢？

回想两数和的平方公式，有

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$

从中能得到什么启示？

解　原方程两边都加上1，得

$$x^2+2x+1=6,$$

即

$$(x+1)^2=6.$$

直接开平方，得

$$x+1=\pm\sqrt{6}.$$

所以 $$x=-1\pm\sqrt{6},$$

即 $$x_1=-1+\sqrt{6},\ x_2=-1-\sqrt{6}.$$

概括

这里的解法，是通过方程的简单变形，将左边配成一个含有未知数的完全平方式，右边是一个非负常数，从而可以直接开平方求解. 这种解一元二次方程的方法叫做**配方法**.

例 5 用配方法解方程：

(1) $x^2-4x+1=0$； (2) $4x^2-12x-1=0$.

左边配上什么数能成为完全平方？

$x^2-2\cdot x\cdot 2+\square^2=(x-\square)^2$.

解 (1) 原方程可化为

$$x^2-4x=-1.$$

配方（两边同时加上 4），得

$$x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2=-1+2^2,$$

即 $$(x-2)^2=3.$$

直接开平方，得 $x-2=\pm\sqrt{3}$，

所以 $$x_1=2+\sqrt{3},\ x_2=2-\sqrt{3}.$$

(2) 移项，得 $4x^2-12x=1$.

两边同除以 4，得 $x^2-3x=\dfrac{1}{4}$.

这里应该怎样配方？回顾例 4 和例 5 题（1）的解答，归纳一下：配方时，方程两边加上的数是如何确定的？

配方，得

$$x^2-2\cdot x\cdot\left(\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

即 $$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{4}.$$

直接开平方，得 $x-\dfrac{3}{2}=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，

所以 $x_1=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，$x_2=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

思考

题(2)中，注意到 $4x^2=(2x)^2$，方程移项后可以写成

$$(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3=1,$$

可以怎样配方？试一试，并完成解答.

练　习

1. 填空，将左边的多项式配成完全平方式：

(1) $x^2+6x+(\quad)=(x+\quad)^2$；

(2) $x^2-8x+(\quad)=(x-\quad)^2$；

(3) $x^2+\dfrac{3}{2}x+(\quad)=(x+\quad)^2$；

(4) $4x^2-6x+(\quad)=4(x-\quad)^2=(2x-\quad)^2$.

2. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2+8x-2=0$；　　(2) $x^2-5x-6=0$.

试一试

用配方法解关于 x 的方程

$$x^2+px+q=0\quad(p^2-4q\geqslant 0).$$

思考

如何用配方法解方程 $3x^2+2x-3=0$？

这里的二次项系数不等于 1，怎么办？请尝试做一做.

3. 公式法

探索

我们来解一般形式的一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0).$$

因为 $a\neq 0$，方程两边都除以 a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

移项，得 $$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

配方，得 $$x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a},$$

即 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

因为 $a\neq 0$，所以 $4a^2>0$. 当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，直接开平方，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

所以 $$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

即 $$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

由以上研究，得到了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad(b^2-4ac\geqslant 0).$$

这里为什么强调 $b^2-4ac\geqslant 0$? 如果 $b^2-4ac<0$, 会怎么样呢?

将一元二次方程中系数 a、b、c 的值,直接代入这个公式,就可以求得方程的根. 这种解一元二次方程的方法叫做**公式法**.

例 6 解下列方程:

(1) $2x^2+x-6=0$;　(2) $x^2+4x=2$;

(3) $5x^2-4x-12=0$;(4) $4x^2+4x+10=1-8x$.

解 (1) $a=2$, $b=1$, $c=-6$,

$$b^2-4ac=1^2-4\times 2\times(-6)$$
$$=1+48=49,$$

所以 $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2\times 2}=\frac{-1\pm 7}{4},$$

即 $$x_1=\frac{3}{2},\ x_2=-2.$$

(2) 将方程化为一般形式,得

$$x^2+4x-2=0.$$

因为 $$b^2-4ac=24,$$

所以 $$x=\frac{-4\pm\sqrt{24}}{2}=-2\pm\sqrt{6},$$

即 $$x_1=-2+\sqrt{6},\ x_2=-2-\sqrt{6}.$$

(3) 因为 $$b^2-4ac=256,$$

所以 $$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{256}}{2\times 5}=\frac{4\pm 16}{10}=\frac{2\pm 8}{5},$$

即 $$x_1=2,\ x_2=-\frac{6}{5}.$$

(4) 整理，得

$$4x^2+12x+9=0.$$

因为 $b^2-4ac=0$，

所以 $x=\dfrac{-12\pm0}{8}$，

即 $x_1=x_2=-\dfrac{3}{2}$.

这里 $b^2-4ac=0$，方程有两个相等的实数根.

练　习

用公式法解下列方程：

(1) $x^2-6x+1=0$；

(2) $2x^2-x=6$；

(3) $4x^2-3x-1=x-2$；

(4) $3x(x-3)=2(x-1)(x+1)$.

思考

根据你学习的体会小结一下：解一元二次方程有哪几种方法？通常你是如何选用的？和同学交流一下.

应用

现在我们来解决22.1节中的问题1：

$$x(x+10)=900,$$

$$x^2+10x-900=0,$$

$$x=-5\pm5\sqrt{37},$$

$$x_1=-5+5\sqrt{37},\ x_2=-5-5\sqrt{37}.$$

它们都是所列方程的根，但负数根 x_2 不符合题意，应舍去. 取

$$x=-5+5\sqrt{37}\approx 25.4,$$

$$x+10\approx 35.4,$$

符合题意，因此绿地的宽约为 25.4 米，长约为 35.4 米.

4. 一元二次方程根的判别式

回忆

我们在用配方法推导一元二次方程求根公式的过程中，得到

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad (*)$$

只有当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，才能直接开平方，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

如果 $b^2-4ac<0$，会怎么样？

也就是说，只有当一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的系数 a、b、c 满足条件 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时才有实数根. 因此，我们可以根据一元二次方程的系数直接判定根的情况.

分析 观察方程（$*$），我们发现有如下三种情况：

（1）当 $b^2-4ac>0$ 时，方程（$*$）的右边是一个正数，它有两个不相等的平方根，因此方程有两个不相等的实数根：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

(2) 当 $b^2-4ac=0$ 时,方程(*)的右边是0,因此方程有两个相等的实数根:

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a};$$

(3) 当 $b^2-4ac<0$ 时,方程(*)的右边是一个负数,而对于任何实数 x,方程左边 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$,因此方程没有实数根.

概括

这里的 b^2-4ac 叫做一元二次方程**根的判别式**,通常用符号“Δ”* 来表示,用它可以直接判断一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的实数根的情况:

当 $\Delta>0$ 时,方程有两个不相等的实数根;

当 $\Delta=0$ 时,方程有两个相等的实数根;

当 $\Delta<0$ 时,方程没有实数根.

例7 不解方程,判断下列方程的根的情况:

计算判别式时,方程必须化为一元二次方程的一般形式.

(1) $3x^2=5x-2$; (2) $4x^2-2x+\frac{1}{4}=0$;

(3) $4(y^2+1)-y=0$.

解 (1) 原方程可变形为 $3x^2-5x+2=0$.

因为 $\Delta=(-5)^2-4\times3\times2=25-24=1>0$, 所以方程有两个不相等的实数根.

请写出以下两道小题的解答过程.

(2) 因为 $\Delta=$ ________________________________,

所以方程________________.

(3) 原方程可变形为________________________________.

因为 $\Delta=$ ________________________________,

所以方程________________.

* “Δ”是希腊字母,读作 delta.

练　习

1. 不解方程，判断下列方程的根的情况：

(1) $3x^2+5x=4$；　　(2) $2x-x^2-2=0$；

(3) $4(y^2-y)+1=0$；　　(4) $2(x+1)^2=5x$.

2. 小明告诉同学，他发现了判断一类方程有无实数根的简易方法：若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的系数 a、c 异号（即两数为一正一负），那么这个方程一定有两个不相等的实数根. 他的说法是否正确？为什么？

试一试

已知关于 x 的方程 $2x^2-(3+4k)x+2k^2+k=0$.

(1) 当 k 取何值时，方程有两个不相等的实数根？

(2) 当 k 取何值时，方程有两个相等的实数根？

(3) 当 k 取何值时，方程没有实数根？

*5. 一元二次方程的根与系数的关系

试一试

求出一元二次方程 $x^2+3x-4=0$ 的两根 x_1 和 x_2，计算 x_1+x_2 和 $x_1\cdot x_2$ 的值. 它们与方程的系数有什么关系？

换几个一元二次方程，再试试，结果怎样？

方程 $x^2+3x-4=0$ 的两根为 $x_1=1$，$x_2=-4$，于是 $x_1+x_2=-3$，$x_1\cdot x_2=-4$. 我们发现：这个方程的二次项系数为 1，它的两根之和 -3 等于一次项系数 3 的相反数，两根之积等于常数项 -4.

对于任何一个二次项系数为 1 的一元二次方程，是否都有这样的结果呢？

探索

我们来考察方程 $x^2+px+q=0(p^2-4q\geqslant 0)$.

由一元二次方程的求根公式,得到方程的两根分别为

$$x_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2},\ x_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

所以

$$x_1+x_2=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}+\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}=-p,$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\cdot\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$$
$$=\frac{(-p)^2-(p^2-4q)}{4}=q.$$

概括

二次项系数为 1 的一元二次方程根与系数的关系:

设一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 x_1、x_2,那么

$$x_1+x_2=-p,\ x_1\cdot x_2=q.$$

例 8 不解方程,求出方程的两根之和与两根之积:

(1) $x^2+3x-5=0$; (2) $2x^2-3x-5=0$.

解 (1) 设两根为 x_1、x_2,由上述二次项系数为 1 的一元二次方程根与系数的关系,可得

$$x_1+x_2=-3,\ x_1\cdot x_2=-5.$$

(2) 方程两边同除以 2,得

$$x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}=0.$$

先将方程化为二次项系数为 1 的情形.

设两根为 x_1、x_2，可得

$$x_1+x_2=-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2},\ x_1\cdot x_2=-\frac{5}{2}.$$

由例 8 中题(2)的解法，你能得到怎样的启示？

例 9 试探索一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$, $b^2-4ac\geqslant 0$) 的根与系数的关系.

解 方程两边同除以 a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

由二次项系数为 1 的一元二次方程根与系数的关系，可得

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

这就是一般情形下一元二次方程的根与系数的关系，前面概括的结论是它的特例(二次项系数为 1). 利用这个结论，我们可以直接写出例 8 中题(2)的答案：

$$x_1+x_2=-\left(\frac{-3}{2}\right)=\frac{3}{2},\ x_1\cdot x_2=\frac{-5}{2}=-\frac{5}{2}.$$

练　习

1. 试由一元二次方程的求根公式，直接推导方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) 的根与系数的关系.

2. 不解方程，判断下列方程是否有实数根. 如果有实数根的话，求出方程的两根之和与两根之积：

(1) $x^2+4x-3=0$；　　(2) $3x^2-4x=0$；

(3) $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2=x$；　　(4) $\frac{x^2+3x}{2}=\frac{1}{3}$.

3. 试解答下列问题，并和同学讨论一下，有哪些不同的解法：

(1) 已知关于 x 的方程 $x^2+mx+2n=0$ 的两个根是 1 和 -3，求 m 和 n 的值；

(2) 已知关于 x 的方程 $x^2+mx-20=0$ 的一个根是 -4，求它的另一个根和 m 的值.

习题 22.2

1. 解下列方程：

(1) $2x^2-6=0$；　(2) $27=4x^2$；

(3) $3x^2=4x$；　(4) $x(x-1)+3(x-1)=0$；

(5) $(x+1)^2=2$；　(6) $3(x-5)^2=2(5-x)$.

2. 解下列方程：

(1) $(2x-1)^2-1=0$；　(2) $\frac{1}{2}(x+3)^2=2$；

(3) $x^2+2x-8=0$；　(4) $3x^2=4x-1$；

(5) $x(3x-2)-6x^2=0$；　(6) $(2x-3)^2=x^2$.

3. 求满足下列要求的 x 的所有值：

(1) $3x^2-6$ 的值等于 21；

(2) $3x^2-6$ 的值与 $x-2$ 的值相等.

4. 用适当的方法解下列方程：

(1) $3x^2-4x=2x$；　(2) $\frac{1}{3}(x+3)^2=1$；

(3) $x^2+(\sqrt{3}+1)x=0$；　(4) $x(x-6)=2(x-8)$；

(5) $(x+1)(x-1)=2\sqrt{2}x$；　(6) $x(x+8)=16$；

(7) $(x+2)(x-5)=1$；　(8) $(2x+1)^2=2(2x+1)$.

5. 已知 $A=2x^2+7x-1$，$B=6x+2$，当 x 为何值时，$A=B$？

6. 已知两个连续奇数的积是 255，求这两个奇数.

7. 不解方程，判断下列方程的根的情况：

(1) $3x^2=4x+2$；　(2) $2(x+2)^2-(8-x)=0$；

(3) $x^2+3-2\sqrt{3}x=0$；　(4) $(2y-3)^2+(3y-2)^2=0$.

8. 当 k 取何值时，关于 x 的方程 $x^2-(2k+1)x+k^2=2$ 没有实数根？当 k 取何值时，这个方程有实数根？

9. 求证：对于任何实数 m，关于 x 的方程 $x^2-2mx+2m-2=0$ 总有两个不相等的实数根.

10. 不解方程，求下列方程的两根之和与两根之积：

(1) $(x+1)(x-2)=2$；　(2) $3x^2+7x=6$.

11. 解答下列问题，并考虑有哪些不同的解法：

(1) 已知关于 x 的方程 $x^2-px+q=0$ 的两个根是 0 和 -3，求 p 和 q 的值；

(2) 已知关于 x 的方程 $x^2-6x+p^2-2p+5=0$ 的一个根是 2，求它的另一个根和 p 的值.

阅读材料

“代数学之父”韦达

一元二次方程的根与系数的关系最早由法国数学家韦达(F. Viète, 1540－1603)发现,习惯上也称作“韦达定理”. 韦达定理更一般地揭示了一元 n 次方程的根与系数的关系,一元二次方程是其特例.

韦达是16世纪最有影响的数学家之一,被尊称为“代数学之父”. 他是第一个引进系统的代数符号,并对方程论做了改进的数学家.

韦达出生于法国东部的普瓦图,年轻时学习法律并当过律师. 后来从事政治活动,当过议会的议员. 韦达把数学当作一种业余爱好,绝大多数闲暇时间都用来研究数学,写出了许多关于三角学、代数学和几何学的著作,并自己出资印刷和发行.

韦达最著名的著作是《分析方法入门》,对符号代数学的发展有不少贡献. 韦达是第一个在数学中有意识地、系统地使用字母的人,他不仅用字母来表示已知数、未知数及其乘幂,而且还用来表示一般的系数,带来了代数学理论研究的重大进步. 当时,他用辅音字母表示已知量,用元音字母表示未知量. 1637年,笛卡儿对韦达这种使用字母的方法做了改进,用 x、y、z 等表示未知量,用 a、b、c 等表示已知量,成为现今的习惯用法.

韦达用代数方法解决几何问题的思想由笛卡儿继承,发展成为解析几何学. 韦达对方程论的贡献是在《论方程的识别与订正》一书中系统阐述并改良了三、四次方程的解法,指出了根与系数之间的关系.

下面是关于韦达的两则轶闻:

当时欧洲的数学家流行相互提出难题,向同行挑战的学术交流方式. 比利时的数学家罗芒乌斯(Romanus, 1561－1615)于1593年提出一个需要解45次方程的问题向各国数学家挑战,相传比利时的大使曾向法国国王亨利四世夸口说:法国还没有一个数学家能解答这一问题. 国王便召来了韦达,结果韦达仅用几分钟就求出了方程的两个根,之后又求出了除负数之外的21个根. 反过来,韦达也

曾提出数学问题向罗芒乌斯挑战. 后来,当罗芒乌斯得知韦达的天才解法后,长途跋涉前往法国拜访韦达,从此他俩建立了深厚的友谊.

还有一个传说,在当时法国和西班牙的战争中,法国军队对于西班牙的军事动态总是了如指掌,总能先发制人,最终打败了西班牙. 西班牙的国王菲力普二世对法国人在战争中的"未卜先知"十分恼火,但又无法理解,以至向教皇控告说:法国在对付他的国家时使用了"巫术". 其实这也是韦达的功劳,他成功地破译了西班牙的军事密码,为祖国赢得了战争的主动权.

22.3 实践与探索

问题 1

学校生物小组有一块长 32 m、宽 20 m 的矩形试验田,为了管理方便,准备沿平行于两边的方向纵、横各开辟一条等宽的小道. 要使种植面积为 540 m^2,小道的宽应是多少?

请完成本题的解答.

分析 问题中没有明确小道在试验田中的位置,试作出图 22.3.1,不难发现小道的占地面积与位置无关. 设小道宽为 x m,则两条小道的面积分别为 $32x$ m^2 和 $20x$ m^2,其中重叠部分小正方形的面积为 x^2 m^2,根据题意,得

$$32\times 20-32x-20x+x^2=540.$$

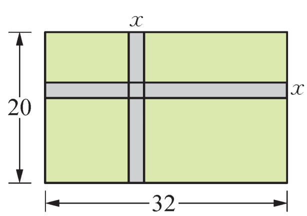


图 22.3.1

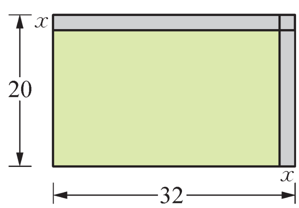


图 22.3.2

试一试

如果设想把小道平移到两边,如图 22.3.2 所示,小道所占面积是否保持不变?在这样的设想下,所列方程是否符合题目要求?处理问题是否方便些?

在应用一元二次方程解决实际问题时,与应用一元一次方程一样,要注意分析题意,抓住等量关系,列出方程,把实际问题转化为数学问题来解决.求得方程的根之后,要注意检验是否符合题意,最后得到实际问题的解答.

问题 2

某药品经过两次降价,每瓶零售价由 56 元降为 31.5 元.已知两次降价的百分率相同,求每次降价的百分率.

分析 若每次降价的百分率为 x,则第一次降价后的零售价为原来的 $(1-x)$ 倍,即 $56(1-x)$ 元,第二次降价后的零售价为 $56(1-x)$ 元的 $(1-x)$ 倍.

这与讨论增长率问题中的数量关系是否相似?有什么不同?

解 设每次降价的百分率为 x,根据题意,得

$$56(1-x)^2=31.5.$$

解这个方程,得

$$x_1=0.25,\quad x_2=1.75.$$

因为降价的百分率不可能大于 1,所以 $x_2=1.75$ 不符合题意.经检验,$x=0.25=25\%$ 符合本题要求.

答:每次降价的百分率为 25%.

练　习

1. 学生会准备举办一次摄影展览，在每张长和宽分别为 18 厘米和 12 厘米的矩形相片周围镶上一圈等宽的彩纸. 经试验，彩纸面积为相片面积的 $\frac{2}{3}$ 时较美观，求所镶彩纸的宽.（精确到 0.1 厘米）

（第 1 题）

2. 以初速度 v_0 竖直上抛的物体的高度 h 和时间 t 满足关系式 $h = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$（$g$ 为重力加速度，$g \approx 10$ 米／秒^2）. 爆竹在地面点燃后以初速度 $v_0 = 20$ 米／秒 上升，经过多少时间爆竹离地 15 米？
3. 某工厂 1 月份的产值是 50 000 元，3 月份的产值达到 60 000 元，这两个月的产值平均月增长的百分率是多少？（精确到 0.1%）
4. 据某初级中学对毕业班学生三年来参加市级以上各项活动获奖情况的统计，七年级时有 48 人次获奖，之后逐年增加，到九年级毕业时累计共有 183 人次获奖. 求这两年中获奖人次的平均年增长率.

试研究下列问题，与你的同伴交流、讨论，并完成问题的解答.

问题 3

小明把一张边长为 10 cm 的正方形硬纸板的四周各剪去一个同样大小的正方形，再折叠成一个无盖的长方体盒子，如图 22. 3. 3.

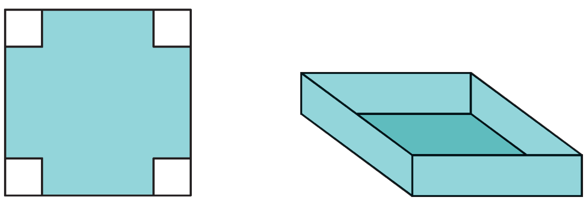


图 22. 3. 3

（1）如果要求长方体的底面积为 81cm^2，那么剪去的正方形边长为多少？

（2）如果按下表列出的长方体底面积的数据要求，那么剪去的正方形边长会发生怎样的变化？折叠成的长方体的侧面积又会发生怎样的变化？

折叠成的长方体底面积(cm^2)	81	64	49	36	25	16	9	4
剪去的正方形边长(cm)								
折叠成的长方体侧面积(cm^2)								

探索

在你观察到的变化中，你感到折叠而成的长方体的侧面积会不会有最大的情况？先在上面的表格中记录下你得到的数据，再以剪去的正方形的边长为自变量，折叠成的长方体侧面积为它的函数，在平面直角坐标系中画出相应的点. 看看与你的感觉是否一致.

问题 4

某工厂计划在两年后实现产值翻一番，那么这两年中产值的平均年增长率应为多少？

分析 翻一番，即为原产值的2倍. 若设原产值为1个单位，那么两年后的产值就是2个单位.

探索

如果调整计划，两年后的产值为原产值的1.5倍、1.2倍……那么两年中的平均年增长率分别应调整为多少？

又如果第二年的增长率为第一年的2倍，那么第一年的增长率为多少时，可以实现两年后产值翻一番？

练　习

（第 1 题）

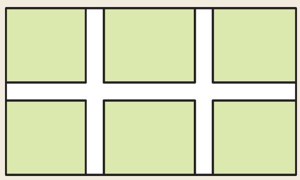
1. 某花生种植基地原有花生品种每公顷产量为 3 000 千克，出油率为 55%. 改用新品种之后，每公顷收获的花生可加工得到花生油 2 025 千克. 已知新品种花生的每公顷产量和出油率都比原有品种有所增加，其中出油率增加是每公顷产量增长率的一半，求两者的增长率.（精确到 1%）
2. 某商店准备进一种季节性小家电，每台进价为 40 元. 经市场预测，销售定价为 52 元时，可售出 180 台；销售定价每增加（或降低）1 元，销售量将减少（或增多）10 台. 商店若希望获利 2 000 元，则应进货多少台？销售定价为多少？

   （1）本题如何设未知数较适宜？需要列出哪些相关量的代数式？

   （2）所列方程的解是否都符合题意？如何解释？

   （3）请你为商店估算一下，若要获得最大利润，则应进货多少台？销售定价为多少？
3. 某市人均居住面积为 14.6 平方米，计划在两年后达到 18 平方米. 在预计每年住房面积的增长率时，还应考虑人口的变化因素等. 请你把问题补充完整，再给出解答.

习题 22.3



（第 1 题）

1. 如图，学校课外生物小组的试验园地是长 35 米、宽 20 米的矩形，为便于管理，现要在中间开辟一横两纵共三条等宽的小道，要使种植面积为 600 平方米，求小道的宽.（精确到 0.1 米）
2. 某商店 2 月份的营业额为 50 万元，3 月份下降了 30%，4 月份比 3 月份有所增长，5 月份的增长率又比 4 月份的增长率增加了 5 个百分点（即 5 月份的增长率要比 4 月份的增长率多 5%），营业额达到 48.3 万元. 问 4、5 两月的营业额增长率各是多少？

3. 学校准备在图书馆后面的场地边建一个面积为 50 平方米的矩形自行车棚. 一边利用图书馆的后墙,并利用已有总长为 25 米的铁围栏. 请你设计,如何搭建较合适?

4. 一块长 30 米、宽 20 米的矩形操场,现要将它的面积增加一倍,但不改变操场的长、宽之比,问长和宽应各增加多少米?(精确到 0.1 米)

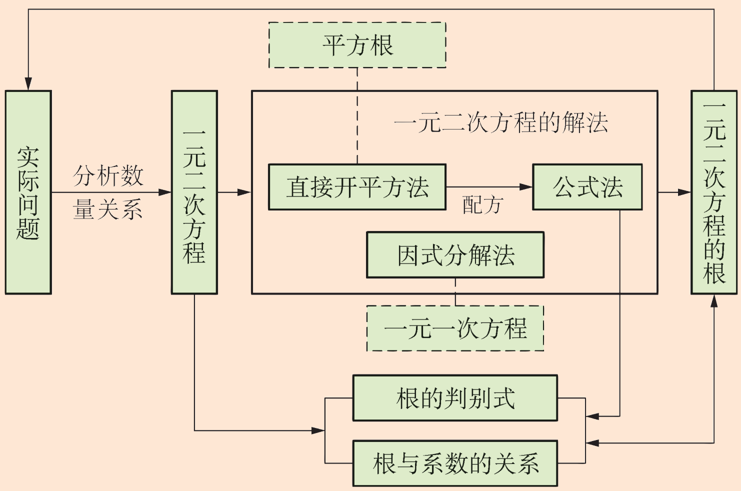
5. 水果店花 1 500 元进了一批水果,按 50% 的利润定价,无人购买. 决定打折出售,但仍无人购买,结果又一次打折后才售完. 经结算,这批水果共盈利 500 元. 若两次打折的折扣相同,问每次打几折?(精确到 0.1 折)

6. 为了绿化学校附近的荒山,某校九年级学生已连续三年春季上山植树,至今已成活了 2 000 棵. 已知这些学生在七年级时植树 400 棵,若平均成活率为 95%,求这些学生后两年植树数的平均年增长率.(精确到 1%)


(第 6 题)

小结

一、知识结构



二、要点

1. 本章我们研究一元二次方程的解法，经历了由简单到复杂、从特殊到一般的认识过程.

首先通过简单的实例，学习了两种基本的方法：直接开平方法和因式分解法，其基本思想是“降次”、转化，将一个二次方程化归为两个一次方程来求解. 对于一些简单的二次方程，可以运用这两种方法求解.

接着我们学习了一种重要的方法——配方法，它的基本思想是通过变形，将方程的左边配成一个含有未知数的一次式的完全平方（右边是一个非负常数），从而转化为用直接开平方法求解. 配方法在以后的学习中还有许多应用，例如下学期将要学习的二次函数（第 26 章），通过配方可以使函数的表达式变得更加清楚，便于研究.

最后，用配方法解一般形式的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($b^2-4ac\geqslant 0$)，得到一元二次方程的求根公式：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. 它提供了解一元二次方程的一般而简便的方法.

2. 一元二次方程的根是由方程的系数确定的，求根公式最直接地表明了这一事实. 此外，求根公式的推导过程，还揭示了一元二次方程根的判别式以及根与系数的关系.

一元二次方程的根有三种情况：有两个不相等的实数根；有两个相等的实数根；没有实数根. 一元二次方程根的判别式（$\Delta=b^2-4ac$），能对此作出有效的判断.

一元二次方程的根与系数的关系，给出了有关方程根的对称式的十分美妙的结果.

3. 应用一元二次方程解决实际问题，也像一元一次方程的应用那样，要注重分析实际问题中的等量关系，列出方程；得到方程的根以后，必须注意检验其是否符合题意，特别是一元二次方程通常有两个实数根，更应引起重视，注意检验，决定取舍.

复习题

A 组

1. 解下列方程：

(1) $3x^2=2x$；　(2) $6x^2-40=0$；

(3) $x(3x-1)=3-x$；　(4) $y(y-2)=4-y$；

(5) $4x(1-x)=1$；　(6) $t(t-2)-3t^2=0$.

2. 已知关于 x 的方程 $x^2-3x+k=0$.

(1) 当 k 为何值时，方程有两个不相等的实数根？

(2) 当 k 为何值时，方程有两个相等的实数根？

(3) 当 k 为何值时，方程没有实数根？

3. 不解方程，求下列方程的两根之和与两根之积：

(1) $2x^2+5x-1=0$；　(2) $(x+2)^2=2(x^2+3)$.

4. 已知 $A=2x^2+7x-1$，$B=4x+1$，分别求出满足下列条件的 x 的值：

(1) A 与 B 的值互为相反数；　(2) A 的值比 B 的值大 3.

5. 已知关于 x 的方程 $(2x-m)(mx+1)=(3x+1)(mx-1)$ 有一个根是 0，求它的另一个根和 m 的值.

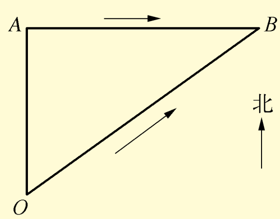
6. 已知三个连续奇数的平方和是 371，求这三个奇数.

7. 要在某正方形广场靠墙的一边开辟一条宽 4 米的绿化带，使余下部分的面积为 100 平方米，求原正方形广场的边长.（精确到 0.1 米）

8. 村里准备修一条灌溉渠，其横截面是面积为 1.6 平方米的等腰梯形，它的上底比渠深多 2 米，下底比渠深多 0.4 米. 求灌溉渠横截面上、下底边的长和灌溉渠的深度.

（第 8 题）

9. 如图，某海关缉私艇在点 O 处发现在正北方向 30 海里的 A 处有一艘可疑船只，测得它正以 60 海里/时的速度向正东方向航行，随即调整方向，以 75 海里/时的速度准备在 B 处拦截. 问经过多少时间能赶上？



（第 9 题）

B 组

10. 解下列方程：

(1) $4(x-2)^2-(3x-1)^2=0$；

(2) $(2x-1)^2+3(2x-1)+2=0$；

(3) $x^2+5=2\sqrt{5}x$；

(4) $\sqrt{3}x^2-x-2\sqrt{3}=0$.

11. 已知 $x=1$ 是一元二次方程 $(a-2)x^2+(a^2-3)x-a+1=0$ 的一个根，求 a 的值.

12. 已知关于 x 的方程 $2x^2-4x+3q=0$ 的一个根是 $1-\sqrt{2}$，求它的另一个根和 q 的值.

13. 已知关于 x 的方程 $(m-1)x^2-(m-2)x-2m=0$，它总是二次方程吗？试求出它的解.

14. 已知代数式 x^2-5x+7，先用配方法说明，不论 x 取何值，这个代数式的值总是正数；再求出当 x 取何值时，这个代数式的值最小，最小值是多少？

15. 学校原有一块面积为 1 500 平方米的矩形场地，现结合环境整治，将场地的一边增加 5 米，另一边减少 5 米，结果场地的面积增加了 10%. 求现在场地的长和宽.

C 组

16. 解方程：

(1) $(x^2-x)^2-5(x^2-x)+6=0$；

(2) $\dfrac{x+1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{x+1}=1$.

17. 证明：对于任何实数 m，关于 x 的方程 $(x-1)(x-2)=m^2$ 总有两个不相等的实数根.

18. 已知 $y\neq 0$，且 $3x^2-2xy-8y^2=0$，求 $\dfrac{x}{y}$ 的值.

19. 已知关于 x 的方程 $mx^2-(2m-1)x+m-2=0$.

(1) 当 m 取何值时，方程有两个不相等的实数根？

(2) 当 m 取何值时，方程有实数根？

20. 某产品每件的生产成本为 50 元，原定销售价为 65 元. 经市场预测，从现在开始的第一个季度销售价将下降 10%，第二个季度又将回升 4%. 若要使半年以后的销售总利润不变，如果你作为决策者，将采取什么措施？请将本题补充完整并解答.

第23章　图形的相似

你瞧，那些大大小小的图形是多么地相像！日常生活中，我们经常会看到这种相似的图形，那么它们有什么主要特征与关系呢？

本章将探索相似图形的性质与判定方法，并利用相似的性质解决实际生活中的一些问题．

23.1 成比例线段

日常生活中,我们会碰到很多形状相同、大小不一定相同的图形,例如下面两张照片,右边的照片是由左边的照片放大得来的. 尽管它们大小不同,但形状相同.

我们把这种具有相同形状的图形称为**相似图形**(similar figures).

同一底片扩印出来的不同尺寸的照片是相似图形. 放电影时胶片上的图像和它映射到屏幕上的图像,也是彼此相似的.

为了研究相似图形,先研究与其密切相关的成比例线段.

1. 成比例线段

试一试

由图 23.1.1 的格点图可知,$\frac{AB}{A'B'}=$ ________,$\frac{BC}{B'C'}=$ ________.

这样$\frac{AB}{A'B'}$与$\frac{BC}{B'C'}$之间有什么关系?

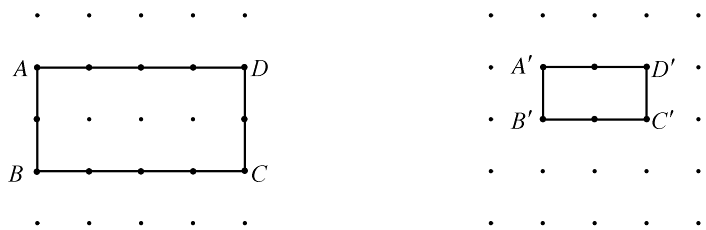


图 23. 1. 1

概括

对于给定的四条线段 a、b、c、d,如果其中两条线段的长度之比等于另外两条线段的长度之比,如 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$(或 $a:b=c:d$),那么,这四条线段叫做**成比例线段**,简称比例线段(proportional segments). 此时也称这四条线段成比例.

例1 判断下列线段 a、b、c、d 是否是成比例线段:

(1) $a=4$, $b=8$, $c=5$, $d=10$;

(2) $a=2$, $b=2\sqrt{15}$, $c=\sqrt{5}$, $d=5\sqrt{3}$.

解 (1) $\because \frac{a}{b}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}, \frac{c}{d}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

$\therefore$ 线段 a、b、c、d 是成比例线段.

(2) $\because \frac{a}{c}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{b}{d}=\frac{2\sqrt{15}}{5\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$,

$\therefore$ 这四条线段是成比例线段.

对于成比例线段，我们有下面的结论：

如果 $\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$，那么 $\boldsymbol{ad=bc}$.

如果 $\boldsymbol{ad=bc}$，那么 $\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$.

以上结论称为比例的基本性质.

请试着证明这两个结论. 这两个命题间有什么关系？

例2 已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，求证：

(1) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$；(2) $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}(a\neq b)$.

证明 (1) $\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，

等式两边同加上 1，得

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1,$$

$\therefore \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

(2) $\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，

$\therefore ad=bc$，

等式两边同减去 ac，得

$$ad-ac=bc-ac,$$

$\therefore ac-ad=ac-bc$，

$\therefore a(c-d)=c(a-b)$.

由 $a\neq b$，且 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，知 $c\neq d$，从而 $a-b\neq 0$，且 $c-d\neq 0$，上式两边同除以 $(a-b)(c-d)$，得

$$\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}.$$

想一想

根据比例的基本性质，由 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，你还可以得到其他哪些类似的结论？

练　习

1. 判断下列线段 a、b、c、d 是否是成比例线段：

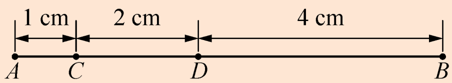
　(1) $a=2\text{ cm}$，$b=4\text{ cm}$，$c=3\text{ m}$，$d=6\text{ m}$；

　(2) $a=0.8$，$b=3$，$c=0.64$，$d=2.4$.

2. 已知线段 a、b、c 满足关系式 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$，且 $b=4$，那么 $ac=$________.

3. 已知 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{2}$，那么 $\dfrac{a+b}{b}$、$\dfrac{a}{a-b}$ 各等于多少？

4. (1) 根据图示求线段比：$\dfrac{AC}{CD}$、$\dfrac{AC}{CB}$、$\dfrac{CD}{DB}$；



（第 4 题）

　(2) 试指出图中所有成比例的线段.

2. 平行线分线段成比例

翻开我们的作业本，每一页都是由一些间距相等的平行线组成的. 如图 23.1.2，在作业本上任意画一条直线 m 与相邻的三条平行线交于 A、B、C 三点，得到两条线段 AB、BC，那么可以发现所得的这两条线段相等，即 $AB=BC$. 如图 23.1.3，再任意画一条直线 n 与这组平行线相交，得到两条线段 DE 和 EF，我们同样可以发现所得的这两条线段相等，即 $DE=EF$.

试用学过的知识说明 $AB=BC$，$DE=EF$.

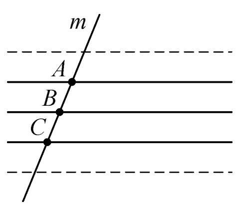


图 23.1.2

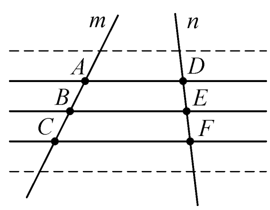


图 23.1.3

由此，我们可以得到 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$.

现在让我们观察一般的情况.

做一做

选择作业本上不相邻的三条平行线，任意画两条直线 m、n 与它们相交. 如果 m、n 这两条直线平行（如图 23.1.4），观察并思考这时所得的 AD、DB、FE、EC 这四条线段的长度有什么关系；如果 m、n 这两条直线不平行（如图 23.1.5），你再观察一下，也可以量一量，算一算，看看它们是否存在类似的关系.

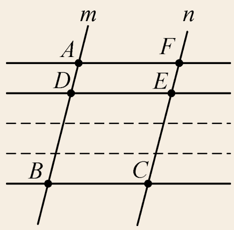


图 23.1.4

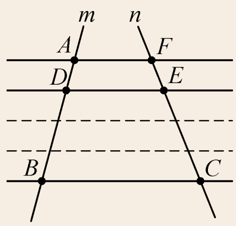


图 23.1.5

我们可以发现，当两条直线与一组平行线相交时，所截得的线段存在一定的比例关系：$\frac{AD}{DB}=\frac{FE}{EC}$. 这就是如下的基本事实：

两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例.（简称"**平行线分线段成比例**"）

思考

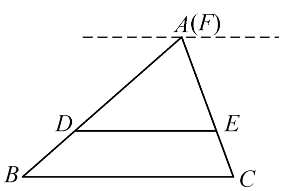


图 23.1.6

如图 23.1.6，当图 23.1.5 中的点 A 与点 F 重合时，就形成一个三角形的特殊情形. 此时，AD、DB、AE、EC 这四条线段之间会有怎样的关系呢？

如图 23.1.6，在 $\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，过点 A 作 DE 的平行线，那么根据平行线分线段成比例的基本事实，可以得到 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，再根据比例的有关性质，就有 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ 和 $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$ 等结论.

思考

如图 23.1.7，当图 23.1.5 中的直线 m、n 相交于第二条平行线上某点时，是否也有类似的成比例线段呢？

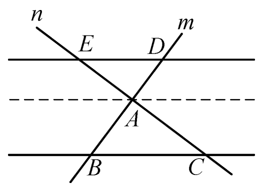


图 23.1.7

由此，即有如下结论：

平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段成比例.

做一做

在图 23.1.8 中，$DE \parallel AF \parallel BC$，根据上面的结论，试找出图中成比例的线段，与你的同伴比一比，看谁找得快，找得多.

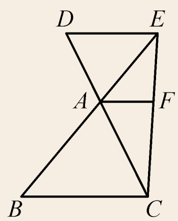


图 23.1.8

例3 如图 23.1.9，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，$AB = 4$，$DE = 3$，$EF = 6$. 求 BC 的长.

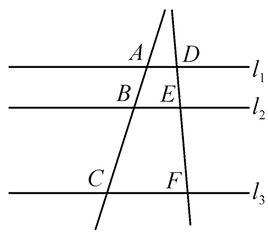


图 23.1.9

解 $\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，

$\therefore \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$（平行线分线段成比例）.

$\because AB = 4$，$DE = 3$，$EF = 6$，

$\therefore \dfrac{4}{BC} = \dfrac{3}{6}$，

$\therefore BC = 8$.

例4 如图 23.1.10，E 为▱$ABCD$ 的边 CD 延长线上的一点，连结 BE，交 AC 于点 O，交 AD 于点 F. 求证：$\dfrac{BO}{FO} = \dfrac{EO}{BO}$.

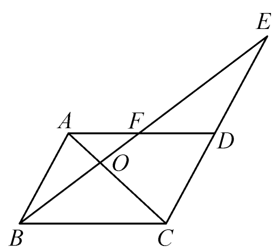


图 23.1.10

证明 $\because AF \parallel BC$，

$\therefore \dfrac{BO}{FO}=\dfrac{CO}{AO}$（平行线分线段成比例）.

$\because AB \parallel CE$，

$\therefore \dfrac{EO}{BO}=\dfrac{CO}{AO}$（平行线分线段成比例）.

$\therefore \dfrac{BO}{FO}=\dfrac{EO}{BO}$.

读一读

线段的等分

将某件物品等分是生活中经常会遇到的事情. 例如将一根绳子平均分成五段，从数学上看，就是将一条线段五等分.

你知道下面这个简单的方法吗？如图 1，将这根绳子放在你的练习本上，使它恰好跨过六条横线. 现在，你看到这根绳子被分成了相等的五小段.

如果你没有练习本，那也没有关系. 让我们按照上面的想法，用三角尺完成等分线段这件事情.

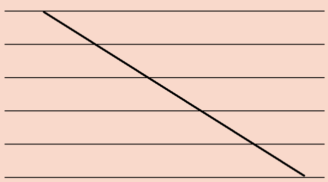


图 1

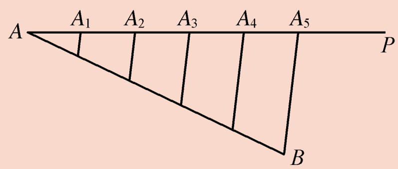


图 2

如图 2，过线段 AB 的一个端点 A 任意画一条射线 AP，在 AP 上依次取五段相等的线段 AA_1、A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4、A_4A_5，连结 BA_5，再分别过点 A_1、A_2、A_3、A_4 画 BA_5 的平行线，这些平行线就恰好将线段 AB 平均分成五等份.

你想知道其中的原因吗？想想平行线分线段成比例的基本事实，你就会明白了.

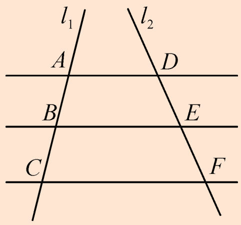
现在，你会画了吗？请你再试试看，将一条线段 7 等分.

练　习

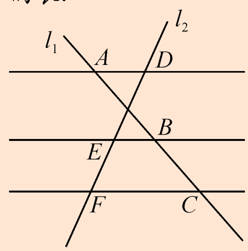
1. 如图，$AD \parallel BE \parallel CF$，直线 l_1、l_2 与这三条平行线分别交于点 A、B、C 和点 D、E、F.

(1) 已知 $AB = BC = 4$，$DE = 5$，求 EF 的长；

(2) 已知 $AB = 5$，$BC = 6$，$DE = 7$，求 EF 的长.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，$AD \parallel BE \parallel CF$，直线 l_1、l_2 与这三条平行线分别交于点 A、B、C 和点 D、E、F，$AB = 4$，$BC = 3$，$DF = 9$. 求 EF 的长.

习题 23.1

1. 在比例尺为 1∶5 000 000 的地图上，量得甲、乙两地的距离是 25 厘米，则两地间的实际距离是多少？

2. 判断下列长度的各组线段是否是成比例线段：

(1) 2 厘米，3 厘米，4 厘米，5 厘米；

(2) 1.5 厘米，2.5 厘米，3 厘米，5 厘米；

(3) 1.1 厘米，2.2 厘米，3.3 厘米，4.4 厘米；

(4) 1 厘米，2 厘米，2 厘米，4 厘米.

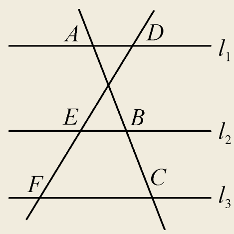
3. 小明的学校里有两种规格的国旗，一种规格的国旗长 288 cm、宽 192 cm；另一种规格的国旗长 144 cm、宽 96 cm. 请问这两种规格的国旗的长与宽的比有什么关系？

4. 已知 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. 求证：$\frac{b}{\sqrt{ad}} = \frac{\sqrt{ad}}{c}$（$a$、$b$、$c$、$d > 0$）.

5. 已知 $\frac{a-b}{b} = \frac{3}{5}$. 求 $\frac{a}{b}$ 的值.

6. 已知 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$（$b \pm d \neq 0$）. 求证：$\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$.

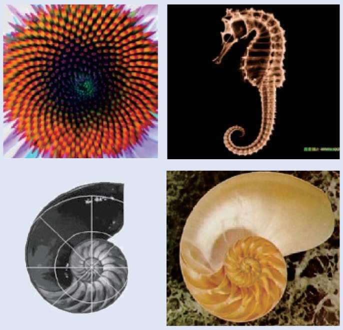
7. 如图，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，两条直线与这三条平行线分别交于点 A、B、C 和点 D、E、F. 已知 $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{2}$，求 $\frac{DE}{DF}$ 的值.



（第 7 题）

阅读材料

黄 金 分 割

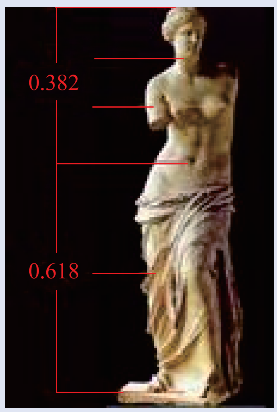


自然界中的黄金分割

两千多年前，古希腊数学家欧多克索斯(Eudoxus，约前408年—前355年)发现：将一条线段 AB 分割成长、短两条线段 AP、PB，若短段与长段的长度之比等于长段的长度与全长之比，即 $\frac{PB}{AP}=\frac{AP}{AB}$ (此时线段 AP 叫做线段 PB、AB 的比例中项)，则可得出这一比值等于0.618…. 这种分割称为黄金分割，这个比值称为黄金比，点 P 叫做线段 AB 的黄金分割点.

为什么人们会关注黄金分割呢？那是因为人们认为这个分割点是分割线段时最优美、最令人赏心悦目的点.

自古希腊以来，黄金分割就被视为最美丽的几何学比率，并广泛地用于建造神殿和雕刻中. 但在比古希腊还早两千多年所建的金字塔中，它就已被采用了. 文明古国埃及的金字塔，形似方锥，大小各异. 但这些金字塔的高与底面边长的比值都接近于0.618. 不仅在建筑和艺术中，就是在日常生活中，黄金分割也处处可见. 如演员在舞台上表演，站在黄金分割点上，台下的观众看上去感觉最好. 有人发现，人的肚脐高度和人体总高度的比值接近于黄金比. 就连普通树叶的宽与长之比，蝴蝶身长与双翅展开后的长度之比也都接近于0.618. 还有黄金矩形、黄金三角形(顶角为36°的等腰三角形)等. 五角星中更是充满了黄金分割.



连女神维纳斯的雕像上也都烙有“0.618”的印记

去发现大千世界中奇妙无比的黄金分割吧！

雅典帕特农神庙：包含黄金矩形的建筑物，它是世界上最美丽的建筑之一

23.2 相似图形

我们已经知道，两个形状相同(大小可以不同)的平面图形称为相似图形. 相似图形有什么主要性质？又如何判断两个图形相似与否呢？本节对第一个问题做一些初步的探索，进而针对一类较为简单的平面图形——多边形，用数学语言给出相似形的定义，从而我们就有准确的方法判断两个多边形相似与否了.

做一做

图 23.2.1 是大小不同的两张地图，当然，它们是相似的图形. 设在大地图中有 A、B、C 三地，在小地图中相应的三地记为 A'、B'、C'，试用刻度尺量一量两张地图中 $A(A')$ 与 $B(B')$ 两地之间的图上距离和 $B(B')$ 与 $C(C')$ 两地之间的图上距离，用量角器量一量 $\angle ABC$ 和 $\angle A'B'C'$ 的大小.

AB = ________ cm，BC = ________ cm；

$A'B'$ = ________ cm，$B'C'$ = ________ cm；

$\angle ABC$ = ________°，$\angle A'B'C'$ = ________°.

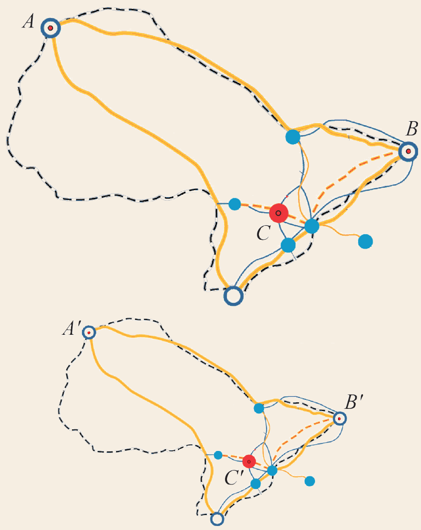


图 23.2.1

我们可以得到$\angle ABC=\angle A'B'C'$. 但是,两张地图中AB和$A'B'$、BC和$B'C'$的长度都是不相等的,那么它们之间有什么关系呢?小地图是由大地图缩小得来的,我们能感到线段$A'B'$、$B'C'$的长度与线段AB、BC的长度相比,都"同样程度"地缩小了. 计算可得

再算算$\frac{AC}{A'C'}$,你发现了什么?

$$\frac{AB}{A'B'}=\_\_\_\_\_\_,\frac{BC}{B'C'}=\_\_\_\_\_\_.$$

如果在这两张地图中$\frac{AB}{A'B'}\neq\frac{BC}{B'C'}$,那么会出现什么情况?

我们能发现$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$,即$AB$、$A'B'$、$BC$、$B'C'$这四条线段是成比例线段.

实际上,上面两张相似的图形中的对应线段都是成比例的,对应角都是相等的.

这样的结论对一般的相似多边形是否成立呢?

探索

图 23.2.2 中两个四边形是相似图形,仔细观察这两个图形,它们的对应边之间是否有以上关系呢?对应角之间又有什么关系?

为了验证你的猜测是否正确,可以用刻度尺和量角器量量看.

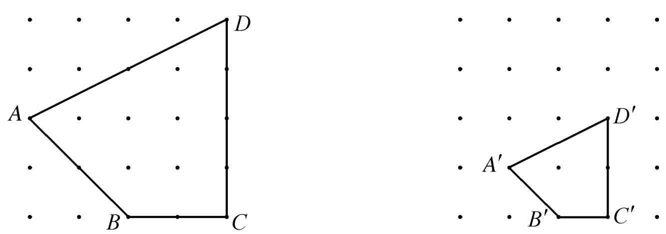


图 23.2.2

再看图 23.2.3 中两个相似的五边形,是否与你观察图 23.2.2 所得到的结果一样?

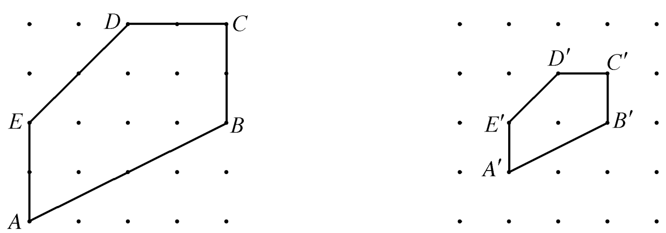


图 23.2.3

概括

由此可以得到相似多边形的性质：

相似多边形的对应边成比例，对应角相等.

实际上，对应边成比例和对应角相等这两个特征足以刻画多边形的相似了. 也就是说，在数学上我们可以给出相似多边形如下的定义：

两个边数相同的多边形，如果各边对应成比例，各角对应相等，就称这两个多边形相似.

这个定义是我们判断两个多边形是否相似的准确方法.

例 在图 23. 2. 4 所示的两个相似四边形中，求边 x 的长度和角 α 的大小.

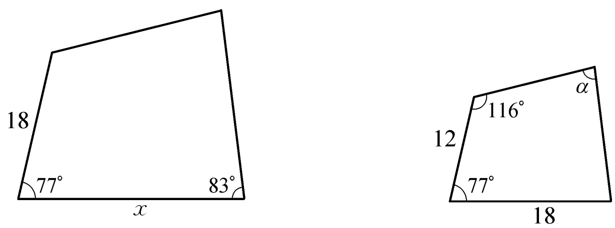


图 23. 2. 4

分析 利用相似多边形的性质和多边形的内角和公式就可以得到所需结果，在利用相似多边形的性质时，必须分清对应边和对应角.

解 $\because$ 两个四边形相似，

$\therefore \dfrac{18}{12}=\dfrac{x}{18}$，

$\therefore x=27.$

根据对应角相等，可得

$$\begin{aligned}\alpha&=360°-(77°+83°+116°)\\&=84°.\end{aligned}$$

思考

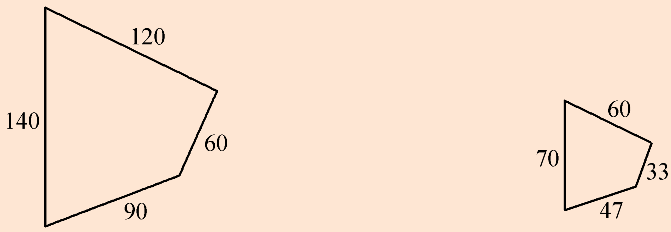
两个三角形一定是相似图形吗？两个等腰三角形呢？两个等边三角形呢？

练 习

1. 下图是两个等边三角形,它们相似吗?试找出图形中的成比例线段,并用比例式表示.

(第 1 题)

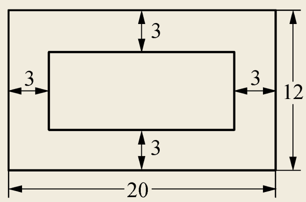
2. 如图所示的两个多边形相似吗?说说你的理由.



(第 2 题)

习题 23.2

1. 所有的矩形都相似吗?所有的正方形呢?
2. 如图所示的两个矩形是否相似?
3. 在本册教科书最后所附的格点图中分别画出两个相似的三角形、四边形、五边形.
4. 把一张长为 10 cm、宽为 6 cm 的矩形图片用复印机放大,其中长放大为 30 cm,那么新图片的面积是原来的多少倍?



(第 2 题)

5. 将一张矩形纸片 $ABCD$ 沿一组对边 AD 和 BC 的中点连线 EF 对折,对折后所得矩形恰好与原矩形相似. 求原矩形纸片的长与宽之比.

23.3 相似三角形

1. 相似三角形

在相似多边形中，最简单的就是**相似三角形**(similar triangles)，它们是对应边成比例、对应角相等的三角形.

相似用符号"∽"来表示，读作"相似于". 如图 23.3.1 所示的两个三角形中，

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'},$$

$$\angle A=\angle A', \angle B=\angle B', \angle C=\angle C'.$$

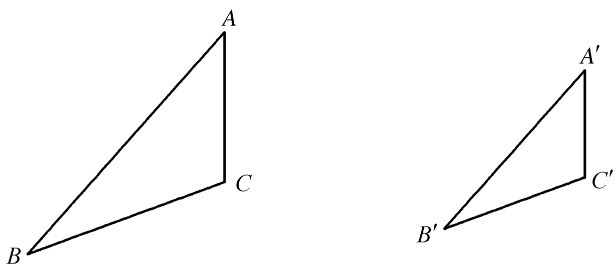


图 23.3.1

此时 △*ABC* 与 △*A′B′C′* 相似，记作

$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C',$$

读作：△*ABC* 相似于 △*A′B′C′*.

这里，将对应顶点写在对应的位置上，这样可以比较容易地找到相似三角形的对应边和对应角.

如果记

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=k,$$

那么，这个比值 k 就表示这两个相似三角形的相似比.

当 $k=1$ 时，两个相似三角形有什么特点？

全等三角形是相似三角形的特例.

做一做

如图 23.3.2，在 $\triangle ABC$ 中，D 为边 AB 上的任一点，作 $DE \parallel BC$，交边 AC 于点 E，用刻度尺和量角器量一量，看看 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的边角之间有什么关系，进而判断这两个三角形是否相似.

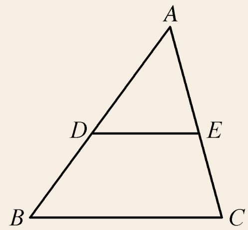


图 23.3.2

如果取点 D 为边 AB 的中点，那么可以发现 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 的相似比为 $k=\frac{1}{2}$.

显然 $\angle ADE=\angle ABC$，$\angle AED=\angle ACB$，$\angle A=\angle A$.

又由平行线分线段成比例的基本事实，可推得$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，通过度量，还可以发现 $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$，因而有 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

我们可以用演绎推理证明这一结论.

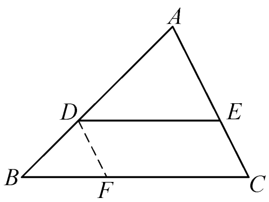


图 23.3.3

已知：如图 23.3.3，$DE \parallel BC$，并分别交 AB、AC 于点 D、E.

求证：$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

证明 $\because$ $DE \parallel BC$，

$\therefore$ $\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$，

$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$（平行线分线段成比例），

$\therefore$ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.

过点 D 作 AC 的平行线交 BC 于点 F，

$\therefore$ $\frac{FC}{BF}=\frac{DA}{BD}$（平行线分线段成比例），

$\therefore$ $\frac{FC}{BC}=\frac{AD}{AB}$.

$\therefore$ $\frac{FC}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.

$\because$ $DE \parallel BC$, $DF \parallel AC$,

$\therefore$ 四边形 $DFCE$ 是平行四边形,

$\therefore$ $DE = FC$.

$\therefore$ $\dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$.

又 $\because$ $\angle ADE = \angle B$, $\angle AED = \angle C$, $\angle A = \angle A$,

$\therefore$ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$(相似三角形的定义).

思考

如图 23.3.4, $DE \parallel BC$, $\triangle AED$ 与 $\triangle ABC$ 是否还是相似的?

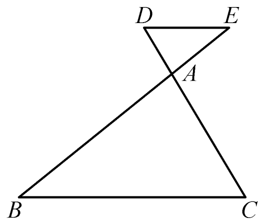


图 23.3.4

由此,可以得出下面常用的结论:

平行于三角形一边的直线,和其他两边(或两边的延长线)相交所构成的三角形与原三角形相似.

例 1 如图 23.3.5,在 $\triangle ABC$ 中,点 D 是边 AB 的三等分点,$DE \parallel BC$, $DE = 5$. 求 BC 的长.

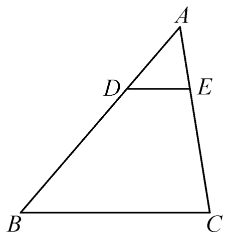


图 23.3.5

解 $\because$ $DE \parallel BC$,

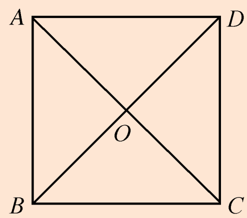
$\therefore$ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$(平行于三角形一边的直线,和其他两边相交所构成的三角形和原三角形相似),

$\therefore$ $\dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{1}{3}$,

$\therefore$ $BC = 3DE = 15$.

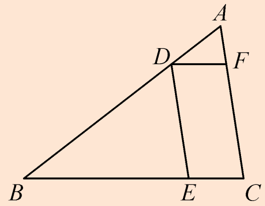
练 习

1. 如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 1,点 O 为对角线的交点,试指出图中的相似三角形.
2. 如果一个三角形的三边长分别是 5、12 和 13,与其相似的三角形的最长边长是 39,那么较大三角形的周长是多少? 较小三角形与较大三角形周长的比是多少?



(第 1 题)

3. 如图，在△ABC 中，点 D 是边 AB 的四等分点，$DE/\!/AC$，$DF/\!/BC$，$AC=8$，$BC=12$. 求四边形 $DECF$ 的周长.



（第 3 题）

2. 相似三角形的判定

我们现在判定两个三角形是否相似，必须要知道它们的对应边是否成比例，对应角是否相等. 那么是否存在判定两个三角形相似的简便方法呢？

回顾

我们在判定两个三角形全等时，使用了哪些方法？判定三角形相似是否有类似的方法？

你还记得八年级上学期学习全等三角形的判定时，曾就边与角分类考察的几种不同情况吗？它们是：两边一角，两角一边，三角，三边. 从这几种情况出发，我们得到了一些重要的判定三角形全等的方法.

那么，对于相似三角形的判定，是否也存在类似的分类与判定方法呢？

让我们先从最常见的三角尺开始.

观察你和同伴的直角三角尺，同样角度（30°与60°，或 45°与 45°）的三角尺看起来是相似的. 这样从直观来看，一个三角形的三个角分别与另一个三角形的三个角对应相等时，它们就“应该”相似了. 确实是这样吗？

探索

如图 23. 3. 6，任意画两个三角形(可以画在教科书最后所附的格点图上)，使其三对角分别对应相等. 用刻度尺量一量两个三角形的对应边，看看这两个三角形的边是否对应成比例. 你能得出什么结论?

和其他同学比较一下，你们的结论都相同吗?

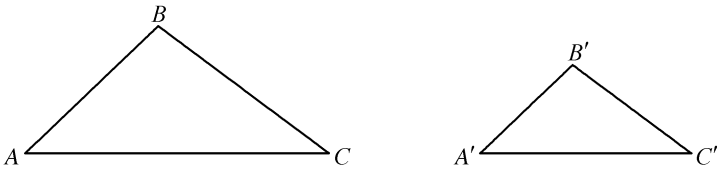


图 23. 3. 6

我们可以发现，此时它们的边对应成比例，于是这两个三角形相似.

而根据三角形的内角和等于 180°，我们知道，如果两个三角形有两对角分别对应相等，那么第三对角也一定对应相等.

由此，我们可以得到判定两个三角形相似的一个较简便的方法，即

相似三角形的判定定理 1　两角分别相等的两个三角形相似.

已知：如图 23. 3. 7，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，$\angle A = \angle A_1$，$\angle B = \angle B_1$.

求证：$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

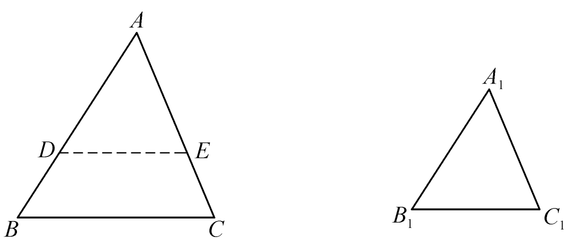


图 23. 3. 7

*证明　在边 AB 或它的延长线上截取 $AD = A_1B_1$，过点 D 作 BC 的平行线交 AC 于点 E，则

$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

$\because$ $DE \parallel BC$,

$\therefore$ $\angle ADE = \angle B$.

在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中,

$\because$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle ADE = \angle B = \angle B_1$, $AD = A_1B_1$,

$\therefore$ $\triangle ADE \cong \triangle A_1B_1C_1$.

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

证明过程隐含着全等变换的过程:将 $\triangle A_1B_1C_1$ 全等变换到 $\triangle ADE$.

思考

观察你的两把不一样的三角尺,就可以得出结论.

如果两个三角形仅有一对角是对应相等的,那么它们是否一定相似?

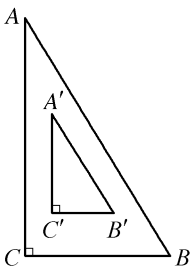


图 23.3.8

例 2 如图 23.3.8,在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$中,$\angle C$ 与 $\angle C'$ 都是直角,$\angle A = \angle A'$. 求证:$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

证明 $\because$ $\angle C = \angle C' = 90°$,

$\angle A = \angle A'$,

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$(两角分别相等的两个三角形相似).

此时,把直角算在内,实际上有两对角对应相等.

此例告诉我们,两个直角三角形,若有一对锐角对应相等,则它们一定相似.

例 3 如图 23.3.9,在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, $EF \parallel AB$. 求证:$\triangle ADE \backsim \triangle EFC$.

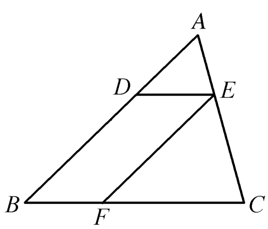


图 23.3.9

想一想

在例 3 中,如果点 D 恰好是边 AB 的中点,那么点 E 是边 AC 的中点吗? 此时,DE 和 BC 有什么关系? $\triangle ADE$ 与 $\triangle EFC$ 又有什么特殊关系呢?

证明 ∵ $DE \parallel BC$,

∴ $\angle ADE = \angle B$, $\angle AED = \angle C$.

又∵ $EF \parallel AB$,

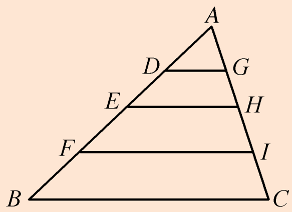
∴ $\angle EFC = \angle B$,

∴ $\angle ADE = \angle EFC$,

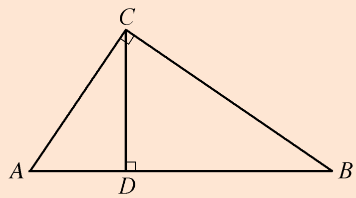
∴ $\triangle ADE \backsim \triangle EFC$(两角分别相等的两个三角形相似).

练　习

1. 如图,$DG \parallel EH \parallel FI \parallel BC$,找出图中所有的相似三角形.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 找出图中所有的相似三角形,并说明理由.

探索

观察图 23.3.10,如果有一点 E 在边 AC 上移动,那么点 E 在什么位置时能使$\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 相似呢?

图中 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的一组对应边 AD 与 AB 的长度的比值为$\frac{1}{3}$. 将点E由点A开始在AC上移动,可以发现当$AE = \frac{1}{3}AC$ 时,$\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 似乎相似. 此时$\frac{AD}{AB} =$ ________.

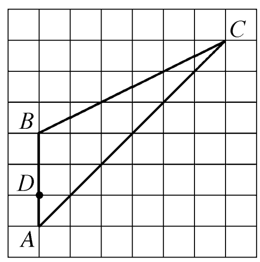


图 23.3.10

猜想

如果一个三角形的两条边与另一个三角形的两条边对应成比例,并且夹角相等,那么这两个三角形相似.

下面我们来证明上述猜想.

已知:如图23.3.11,在$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$中,$\angle A=\angle A_1$,$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$.

求证:$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

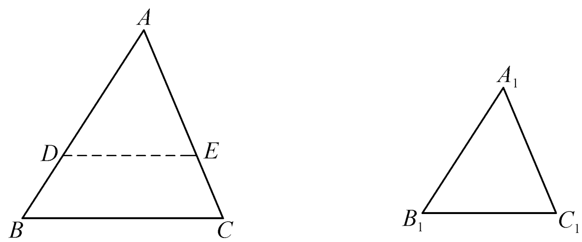


图 23. 3. 11

*证明 在边AB或它的延长线上截取$AD=A_1B_1$,过点D作BC的平行线交AC于点E,则

$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$,

$\therefore\ \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$.

$\because\ \dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$, $AD=A_1B_1$,

$\therefore\ AE=A_1C_1$.

在$\triangle ADE$和$\triangle A_1B_1C_1$中,

$\because\ AD=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$, $AE=A_1C_1$,

$\therefore\ \triangle ADE\cong\triangle A_1B_1C_1$.

$\therefore\ \triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

这样我们又有了一种判定两个三角形相似的方法,即

相似三角形的判定定理2　两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.

如果相等的角不是成比例的两边的夹角,那么这两个三角形还相似吗?

画一画,看看是否不一定相似.

例 4 证明图 23.3.12 中的$\triangle AEB$和$\triangle FEC$相似.

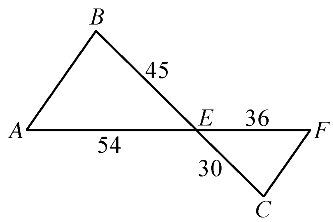


图 23.3.12

证明 $\because \dfrac{AE}{FE}=\dfrac{54}{36}=1.5$,

$\dfrac{BE}{CE}=\dfrac{45}{30}=1.5$,

$\therefore \dfrac{AE}{FE}=\dfrac{BE}{CE}$.

又$\because \angle AEB=\angle FEC$,

$\therefore \triangle AEB \backsim \triangle FEC$(两边成比例且夹角相等的两个三角形相似).

探索

如果两个三角形的三条边对应成比例,那么这两个三角形相似吗?

做一做

在如图 23.3.13 所示的方格图中任画一个三角形,再画出第二个三角形,使它的三边长都是原来三角形三边长的相同倍数.画完之后,用量角器度量并比较两个三角形对应角的大小,你得出了什么结论?你同伴的结论和你的一样吗?

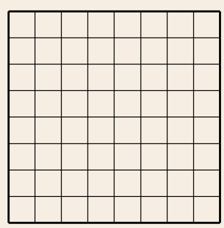


图 23.3.13

试试看,写出这个判定定理的证明过程.

我们可以发现这两个三角形相似. 即有如下定理:

相似三角形的判定定理 3　三边成比例的两个三角形相似.

类似于前两个判定定理的证明,我们也可以证明这个判定定理.

它们的相似比是多少?

例 5　在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中,$AB = 6$ cm,$BC = 8$ cm,$AC = 10$ cm,$A'B' = 18$ cm,$B'C' = 24$ cm,$A'C' = 30$ cm. 试证明 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似.

证明　$\because \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$,

$\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3}$,

$\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$,

$\therefore \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$,

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$(三边成比例的两个三角形相似).

练　习

1. 依据下列各组条件,说明$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$是否相似:

   (1) $AB = 10$ cm,$BC = 8$ cm,$AC = 16$ cm,$A'B' = 16$ cm,$B'C' = 12.8$ cm,$A'C' = 25.6$ cm;

   (2) $\angle A = 80°$,$\angle C = 60°$,$\angle A' = 80°$,$\angle B' = 40°$;

   (3) $\angle A = 40°$,$AB = 8$,$AC = 15$,$\angle A' = 40°$,$A'B' = 16$,$A'C' = 30$.

2. 在第 1 题的题(3)中,若已知 $BC = a$,$\angle B = \alpha$,你能求出 $B'C'$的长与$\angle B'$、$\angle C'$的大小吗? 写出你的计算过程.

3. 在图 23.3.10 中,点 E 在边 AC 上移动,除了教科书上提出的$\triangle ADE$ 之外,你还能找到另外的$\triangle ADE$ 与原三角形相似吗? 若能,请求出此时 AE 的长度.

3. 相似三角形的性质

两个三角形相似，除了对应边成比例、对应角相等之外，还可以得到许多有用的结论. 例如，在图 23. 3. 14 中，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是两个相似三角形，相似比为 k，其中 AD、$A'D'$ 分别为 BC、$B'C'$ 边上的高，那么 AD、$A'D'$ 之间有什么关系？

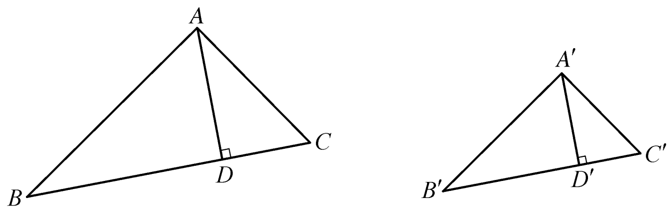


图 23. 3. 14

$\triangle ABD$ 和 $\triangle A'B'D'$ 都是直角三角形，且 $\angle B = \angle B'$，因为有两个角对应相等，所以这两个三角形相似. 因此

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} = k.$$

由此可以得出结论：

相似三角形对应边上的高的比等于相似比.

想一想

相似三角形面积的比与相似比有什么关系？

由 $\dfrac{AD}{A'D'} = \dfrac{BC}{B'C'} = k$，可得

$$\begin{aligned}\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} &= \frac{\frac{1}{2}AD \cdot BC}{\frac{1}{2}A'D' \cdot B'C'} \\ &= \frac{AD}{A'D'} \cdot \frac{BC}{B'C'} \\ &= k^2.\end{aligned}$$

由此可以得出结论：

相似三角形面积的比等于相似比的平方.

相似多边形也有同样的结论吗？

思考

如图23.3.15，$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$相似，AD、$A'D'$分别为对应边上的中线，BE、$B'E'$分别为对应角的平分线，那么它们之间是否有与对应边上的高类似的关系？这两个三角形的周长又有什么关系呢？

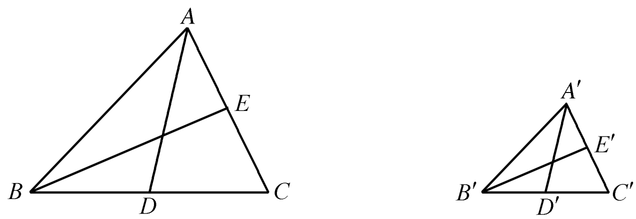


图 23.3.15

可以得到的结论是：

相似三角形对应角的平分线之比等于相似比.

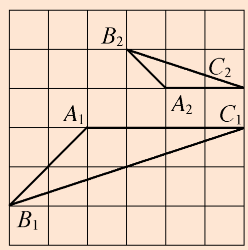
相似三角形对应边上的中线之比等于相似比.

相似三角形的周长之比等于相似比.

请你试着证明这些结论.

练 习

1. 如果两个三角形相似，相似比为3∶5，那么对应角的平分线的比等于多少？
2. 相似三角形对应边的比为0.4，那么相似比为________，对应边上的中线的比为________，周长的比为________，面积的比为________.
3. 如图，在正方形方格图上有$\triangle A_1B_1C_1$和$\triangle A_2B_2C_2$，这两个三角形相似吗？如果相似，请给出证明，并求出$\triangle A_1B_1C_1$和$\triangle A_2B_2C_2$的面积比.



（第3题）

4. 相似三角形的应用

人们从很早开始，就懂得利用相似三角形的有关性质来计算那些不能直接测量的物体高度和两地距离.

例 6 古代一位数学家想出了一种测量金字塔高度的方法：如图 23.3.16，为了测量金字塔的高度 OB，先竖一根已知长度的木棒 $O'B'$，比较木棒的影长 $A'B'$ 与金字塔的影长 AB，即可近似算出金字塔的高度 OB. 如果 $O'B' = 1$ 米，$A'B' = 2$ 米，$AB = 274$ 米，求金字塔的高度 OB.

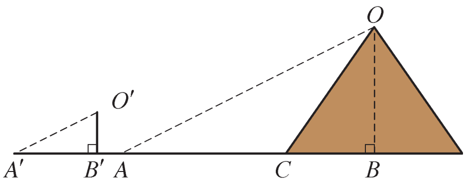


图 23.3.16

金字塔的影长 AB 为露在外面的影长 AC 与金字塔底边的一半 CB 的长度的和.

解 ∵ 太阳光线是平行光线，

∴ $\angle OAB = \angle O'A'B'$.

∵ $\angle ABO = \angle A'B'O' = 90^\circ$，

∴ $\triangle OAB \backsim \triangle O'A'B'$（两角分别相等的两个三角形相似），

∴ $\dfrac{OB}{O'B'} = \dfrac{AB}{A'B'}$，

∴ $OB = \dfrac{AB \times O'B'}{A'B'} = \dfrac{274 \times 1}{2} = 137$（米）.

答：金字塔的高度 OB 为 137 米.

例 7 如图 23.3.17，为了估算河的宽度，我们可以在河的对岸选定一个目标作为点 A，再在河的这一边选定点 B 和 C，使 $AB \perp BC$，然后，再选定点 E，使 $EC \perp BC$，用视线确定 BC 和 AE 的交点 D. 此时如果测得 $BD = 118$ 米，$DC = 61$ 米，$EC = 50$ 米，求河的宽度 AB.（精确到 0.1 米）

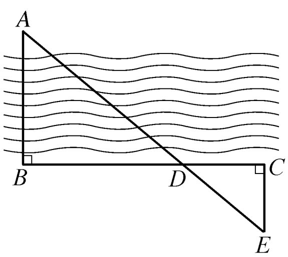


图 23.3.17

解 $\because \angle ADB = \angle EDC$,

$\angle ABD = \angle ECD = 90°$,

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle ECD$（两角分别相等的两个三角形相似），

$$\therefore \frac{AB}{EC} = \frac{BD}{CD},$$

解得 $$AB = \frac{BD \times EC}{CD} = \frac{118 \times 50}{61} \approx 96.7(\text{米}).$$

答：河的宽度 AB 约为 96.7 米.

以上例题给我们提供了一些利用相似三角形进行测量的方法.

利用相似三角形，可以证明几条线段之间的乘积关系.

例 8 如图 23.3.18，已知 D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上的点，且 $\angle ADE = \angle C$. 求证：$AD \cdot AB = AE \cdot AC$.

证明 $\because \angle ADE = \angle C$，$\angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ACB$（两角分别相等的两个三角形相似），

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB},$$

$\therefore AD \cdot AB = AE \cdot AC$.

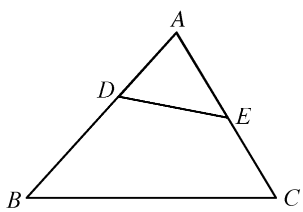
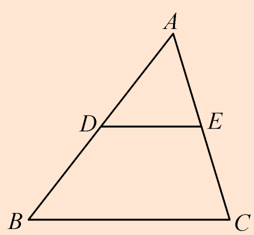


图 23.3.18

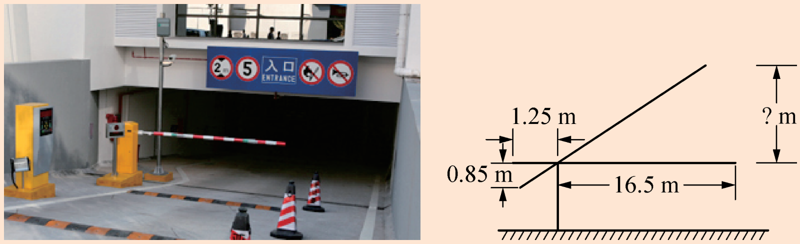
练　习

1. 在同一时刻，物体的高度与它在阳光下的影长成正比. 在某一时刻，有人测得一高为 1.8 米的竹竿的影长为 3 米，某一高楼的影长为 60 米，那么这幢高楼的高度是多少米？
2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，$BC = 6$，梯形 $DBCE$ 的面积是 $\triangle ADE$ 面积的 3 倍. 求 DE 的长.



（第 2 题）

3. 如图，停车场的栏杆的短臂长为 1.25 m，长臂长为 16.5 m，当短臂端点下降 0.85 m 时，长臂端点升高多少？（栏杆的宽度忽略不计）



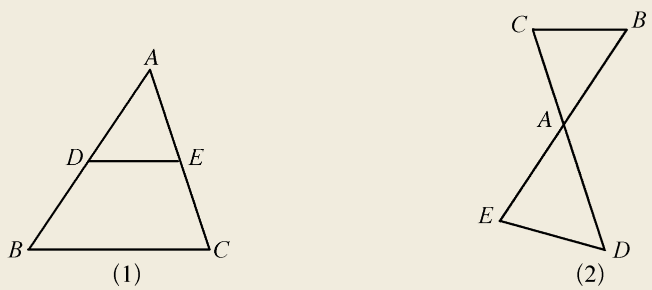
（第 3 题）

习题 23.3

1. 判断下面各组中的两个三角形是否相似，如果相似，请写出证明过程：

（1）如图(1)，$\angle B = \angle ADE$，$\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$；

（2）如图(2)，$\angle E = \angle C$，$\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$.



（第 1 题）

2. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 6、8、10，和 $\triangle ABC$ 相似的 $\triangle A'B'C'$ 的最长边长为 30. 求 $\triangle A'B'C'$ 的另两条边的长、周长以及最大角的大小.

3. 使用三角尺画一个三角形，其中两个角分别为 60° 与 45°，再画一个与它相似的三角形.

4. 依据下列各组条件，判断 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是否相似，如果相似，请给出证明：

（1）$\angle A = 70°$，$\angle B = 46°$，$\angle A' = 70°$，$\angle C' = 64°$；

（2）$AB = 10$ 厘米，$BC = 12$ 厘米，$AC = 15$ 厘米，$A'B' = 150$ 厘米，$B'C' = 180$ 厘米，$A'C' = 225$ 厘米；

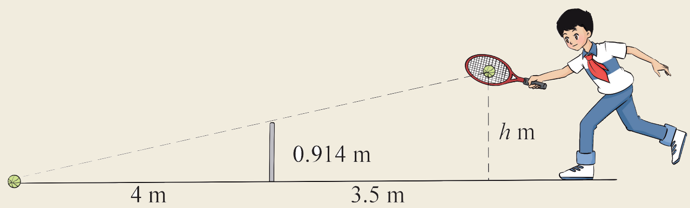
（3）$\angle B = 35°$，$BC = 10$，BC 上的高 $AD = 7$，$\angle B' = 35°$，$B'C' = 5$，$B'C'$ 上的高 $A'D' = 3.5$.

5. 在两个等腰三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 中，$\angle A$、$\angle A'$ 分别是顶角. 试分别依据下列条件，判断 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是否相似，如果相似，请写出证明过程：

（1）$\angle A = \angle A'$；

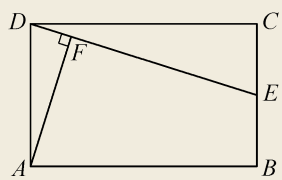
（2）$\angle B = \angle B'$（或 $\angle C = \angle C'$）.

6. 网球比赛时，发球往往是制胜的关键. 如图，小明在打网球时，使球恰好能打过网，假设球沿直线前进而且落在离网 4 米的位置上，求球拍击球的高度 h.（精确到 0.01 米）



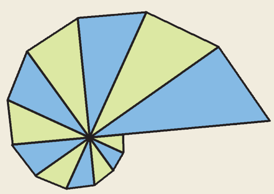
（第 6 题）

7. 如图，E 是矩形 $ABCD$ 的边 CB 上的一点，$AF \perp DE$ 于点 F，$AB = 3$，$AD = 2$，$CE = 1$. 证明 $\triangle AFD \backsim \triangle DCE$，并计算点 A 至直线 DE 的距离.（精确到 0.1）



（第 7 题）

8. 如图是用 12 个相似的直角三角形组成的图案，请你也用相似三角形设计出一个或两个美丽的图案.



（第 8 题）

23.4 中位线

在23.3节中，我们曾得到如下结论：

如图23.4.1，在$\triangle ABC$中，$DE\parallel BC$，则$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

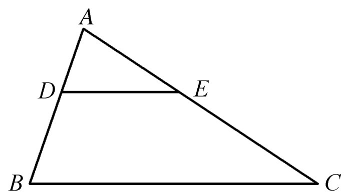


图 23.4.1

在推理过程中，我们由$DE\parallel BC$推得$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$. 那么当点$D$是$AB$的中点时，利用该比例式容易推知点$E$也是$AC$的中点，并且$DE=\frac{1}{2}BC$.

现在换一个角度考虑，如果已知点D、E分别是AB与AC的中点，那么是否可以推出$DE\parallel BC$？DE与BC之间又存在怎样的数量关系呢？

画画看，你能有什么猜想？

猜想

如图23.4.2，在$\triangle ABC$中，点D、E分别是AB与AC的中点. 根据画出的图形，可以猜想：

$$DE\parallel BC，且\ DE=\frac{1}{2}BC.$$

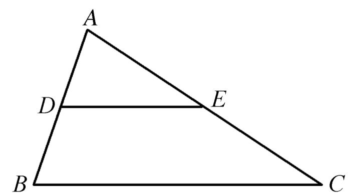


图 23.4.2

对此，我们可以用演绎推理给出证明.

证明 在$\triangle ABC$中，

$\because$ 点D、E分别是AB与AC的中点，

$\therefore\ \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{2}$.

$\because\ \angle A=\angle A$，

$\therefore\ \triangle ADE\backsim\triangle ABC$，

$\therefore\ \angle ADE=\angle ABC$，

$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$，

$\therefore\ DE\parallel BC$，且$DE=\frac{1}{2}BC$.

概括

我们把连结三角形两边中点的线段叫做**三角形的中位线**，并且有：

三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半.

例 1 求证：三角形的一条中位线与第三边上的中线互相平分.

已知：如图 23.4.3，在 $\triangle ABC$ 中，$AD = DB$，$BE = EC$，$AF = FC$.

求证：AE、DF 互相平分.

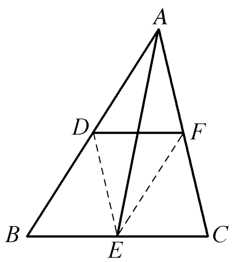


图 23.4.3

证明 连结 DE、EF.

$\because$ $AD = DB$，$BE = EC$，

$\therefore$ $DE \parallel AC$（三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半）.

同理可得 $EF \parallel BA$.

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是平行四边形.

$\therefore$ AE、DF 互相平分.

例 2 如图 23.4.4，在 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别是边 BC、AB 的中点，AD、CE 相交于点 G. 求证：$\dfrac{GE}{CE} = \dfrac{GD}{AD} = \dfrac{1}{3}$.

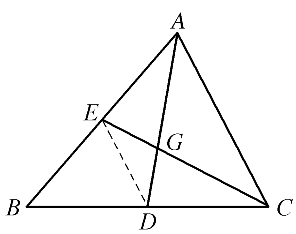


图 23.4.4

证明 连结 ED.

$\because$ D、E 分别是边 BC、AB 的中点，

$\therefore$ $DE \parallel AC$，$\dfrac{DE}{AC} = \dfrac{1}{2}$（三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半），

$\therefore$ $\triangle ACG \backsim \triangle DEG$，

$\therefore$ $\dfrac{GE}{GC} = \dfrac{GD}{GA} = \dfrac{DE}{AC} = \dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ $\dfrac{GE}{CE} = \dfrac{GD}{AD} = \dfrac{1}{3}$.

拓展

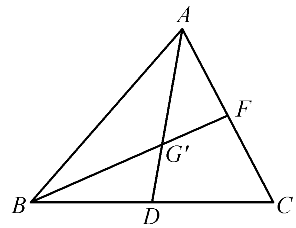


图 23.4.5

如果在图 23.4.4 中取 AC 的中点 F,假设 BF 与 AD 相交于点 G',如图 23.4.5,那么我们同理可得 $\frac{G'D}{AD}=\frac{G'F}{BF}=\frac{1}{3}$,所以 $\frac{GD}{AD}=\frac{G'D}{AD}=\frac{1}{3}$,即两图中的点 G 与点 G' 是重合的.

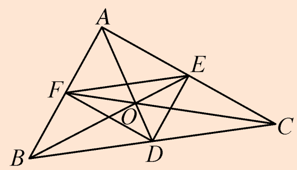
于是,我们有以下结论:

三角形三条边上的中线交于一点,这个点就是三角形的重心,重心与一边中点的连线的长是对应中线长的 $\frac{1}{3}$.

数学上的"重心"与物理上的"重心"是一致的.

练 习

1. 如图,在△ABC 中,D、E、F 分别为边 BC、AC、AB 的中点,AD、BE、CF 相交于点 O,$AB=6$,$BC=10$,$AC=8$. 试求出线段 DE、OA、OF 的长及∠EDF 的大小.(结果保留根号)

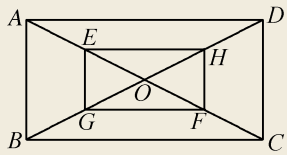


(第 1 题)

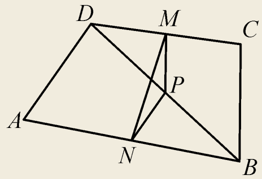
2. 求证:顺次连结四边形各边的中点所得的四边形是平行四边形.

习题 23.4

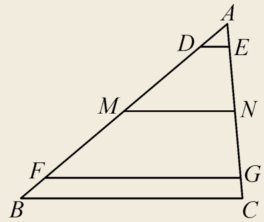
1. 三角形的周长为 56 cm,则它的三条中位线组成的三角形的周长是________ cm.
2. 如图,矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O,E、F、G、H 分别为 OA、OC、OB、OD 的中点. 求证:四边形 $EGFH$ 是矩形.



（第 2 题）



（第 3 题）



（第 4 题）

3. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD = BC$，P 是对角线 BD 的中点，M 是 DC 的中点，N 是 AB 的中点. 求证：$\angle PMN = \angle PNM$.

4. 如图，$AD = BF$，$DE \parallel FG \parallel BC$，$MN$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线. 求证：$DE + FG = 2MN$.

23.5 位似图形

相似与轴对称、平移、旋转一样，也是图形之间的基本变换，它可以将一个图形放大或缩小，并保持形状不变.

下面介绍一种特殊的画相似多边形的方法.

现在要把多边形 $ABCDE$ 放大到 1.5 倍，也就是使所得的多边形与原多边形的相似比为 1.5. 如图 23.5.1，我们可以按下列步骤画出所需的多边形：

1. 任取一点 O；
2. 以点 O 为端点作射线 OA、OB、OC、OD 和 OE；
3. 分别在射线 OA、OB、OC、OD 和 OE 上取点 A'、B'、C'、D'和 E'，使 $OA':OA = OB':OB = OC':OC = OD':OD = OE':OE = 1.5$；
4. 顺次连结点 A'、B'、C'、D'和 E'，就得到所要画的多边形$A'B'C'D'E'$.

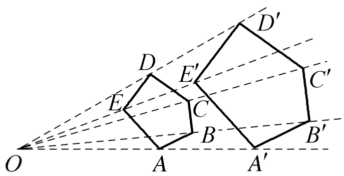


图 23.5.1

探索

用刻度尺和量角器量一量，看看上面的两个多边形是否相似？

你能否用演绎推理说明其中的理由？

试试看，写出演绎推理的整个过程.

如图 23.5.1，两个图形的对应点 A 与 A'、B 与 B'、C 与 C'……的连线都交于一点 O，并且 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\cdots=k$，这两个图形叫做**位似图形**(homothetic figures)，点 O 叫做**位似中心**(homothetic center).

利用位似的方法，可以把一个多边形放大或缩小.

要画四边形 $ABCD$ 的位似图形，还可以如图 23.5.2 那样操作：任取一点 O，作直线 OA、OB、OC、OD，在点 O 的另一侧取点 A'、B'、C'、D'，使 $OA' : OA = OB' : OB = OC' : OC = OD' : OD = 2$，这样就可以得到放大到 2 倍的四边形 $A'B'C'D'$.

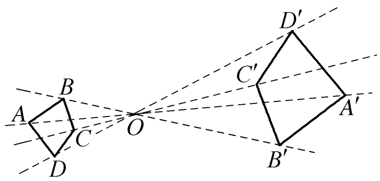


图 23.5.2

实际上，如图 23.5.3 所示，如果把位似中心取在多边形内，那么也可以把一个多边形放大或缩小，而且比较简便.

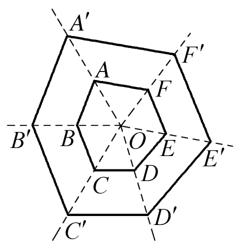


图 23.5.3

想想看，还可以把位似中心取在哪里？

练 习

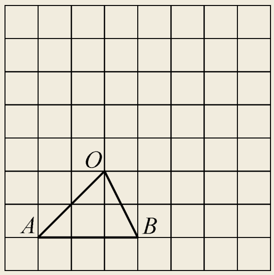
任意画一个五边形，再把它放大到原来的 3 倍.

习题 23.5

1. 任选一种方法，按下列相似比画出一个三角形的位似图形.

（1）相似比为$\frac{1}{2}$；（2）相似比为 2.5.

2. 如图，已知格点三角形 OAB，请在方格图中画出另一格点三角形，使其与原三角形关于点 O 成位似关系，并说出它们之间的相似比.（在方格图中，以格点为顶点的三角形叫做格点三角形）



（第 2 题）

数学与艺术的美妙结合——分形

雪花是什么形状呢？科学家通过研究发现：将正三角形的每边三等分，再以其居中的那一条线段为底边，向外作等边三角形，这样得到一个六角形. 然后将六角形的每边三等分，重复上述的作法. 如图 1 所示，如此继续下去，就得到了雪花曲线.

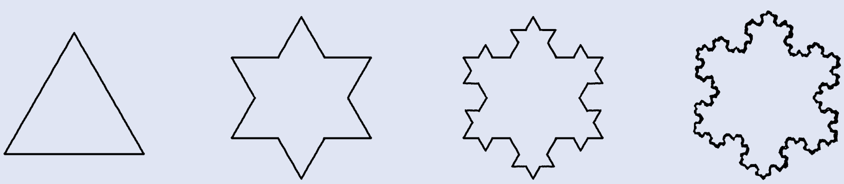


图 1

雪花曲线的每一部分经过放大都可以与它的整体形状相似，这种现象叫自相似．只要有足够细的笔，这种自相似的过程就可以继续表现下去．

观察图 2 中的图形，这也是通过等边三角形绘制的另一幅自相似图形．

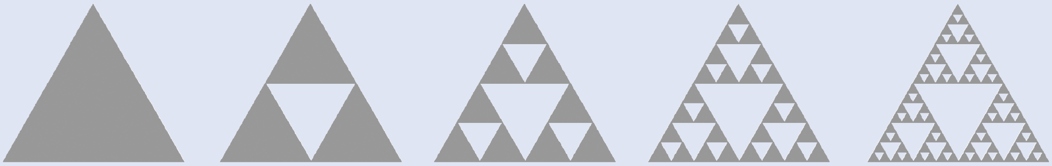


图 2

图 3 是五边形的一幅自相似图形．

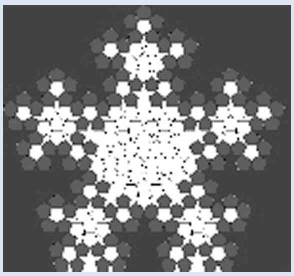
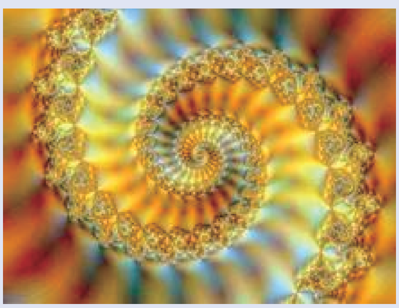


图 3

图 4

自然界中其实存在很多自相似现象，如图 4 所示的树木的生长，又如雪花的形成，土地干旱形成的地面裂纹等．现在已经有了一个专门的数学分支来研究像雪花这样的自相似图形，这就是 20 世纪 70 年代由美国数学家芒德布罗特(B. Mandelbrot，1924－2010)创立的分形几何．

如图 5，通过计算机可以把简单的图形设计成美丽无比的分形图案，人们称之为分形艺术．



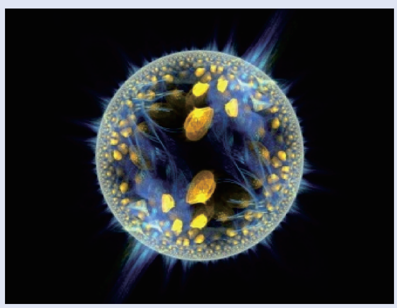


图 5

23.6 图形与坐标

1. 用坐标确定位置

回顾

在八年级学习函数及其图象时,我们曾经建立平面直角坐标系,用一对有序实数表示平面上点的位置. 那么如何用坐标来表示一个物体的位置呢?

不少问题中,物体的大小往往可以忽略,因而可以用点来表示,从而可以用坐标确定物体所在的位置.

某中学夏令营举行野外拉练活动,老师交给大家一张地图,如图 23.6.1 所示,地图上画了一个平面直角坐标系作为定向标记,并给出了四座农舍的坐标:(1, 2)、(−3, 5)、(4, 5)、(0, 3).

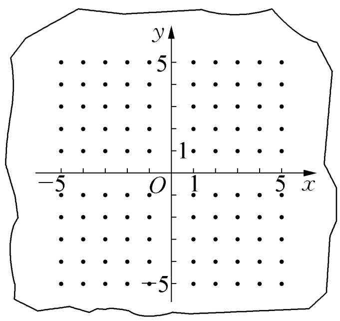


图 23.6.1

目的地位于连结第一座与第三座农舍的直线和连结第二座与第四座农舍的直线的交点处. 利用平面直角坐标系,同学们很快就到达了目的地. 请你在图中画出目的地的位置.

试一试

图 23. 6. 2 是某乡镇的示意图,试在图中建立适当的平面直角坐标系,用坐标表示各地的位置.

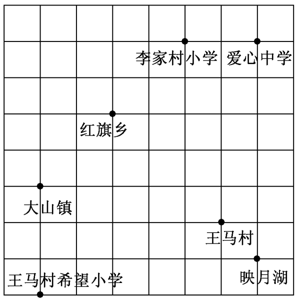


图 23. 6. 2

你和你的同伴在图 23. 6. 2 中建立的平面直角坐标系的位置是一样的吗? 选定的坐标单位是一样的吗?

有了平面直角坐标系,我们可以毫不费力地在平面上确定一个点的位置,进而可以确定一个物体的位置. 现实生活中我们可以看到这种方法的许多应用: 如用经度和纬度来表示某次台风中心所处的位置,或表示某次强烈地震的震中位置等.

思考

我们已经知道,可以用一对有序实数表示平面上点的位置,从而确定一个物体的位置.

如下的地震信息告诉我们这一地震中心所处的位置是北纬 33. 2°、东经 96. 6°.

2010 年 4 月 14 日 7 时 49 分(北京时间),在我国青海省玉树藏族自治州发生了 $M_S7.1$ 地震(简称玉树地震). 根据中国地震台网中心最新测定结果,玉树地震震中位置为 33. 2°N, 96. 6°E,震源深度约 14 km,位于玉树城区西北约 44 km 处.

由此信息,你能发现其他表示该地震中心位置的方法吗?

我们可以发现该地震中心位置还表示为该地城区西北约 44 km 处. 也就是说,可以用“角度(方向)、距离”这两个量刻画物体的位置,这种方式在军事和地理中较为常用.

做一做

小明去某地考察环境污染问题,并且他事先知道下面的信息:

“悠悠日用化工品厂”在他现在所在地的北偏东 30°的方向,距离此处 3 千米的地方;

“明天调味品厂”在他现在所在地的北偏西 45°的方向,距离此处 2.4 千米的地方;

“321 号水库”在他现在所在地的南偏东 27°的方向,距离此处 1.1 千米的地方.

根据这些信息,试在图 23.6.3 中画出表示各处位置的示意图.

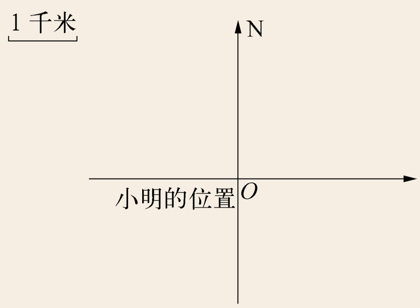


图 23.6.3

在图 23.6.3 中帮助小明完成这张示意图.

思考

现在我们可以用多种方法表示平面上一个点的位置,那么如何确定一个平面图形的位置呢?由点与图形之间的关系可以得到什么启发?

我们知道，所有的平面图形都可以看成是点的集合，因此可以通过确定有关点的位置（坐标），进而确定一个平面图形的位置.

试一试

图 23.6.4 是一个边长为 5 的正方形，试建立适当的平面直角坐标系，写出它的顶点坐标.

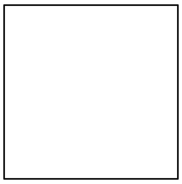


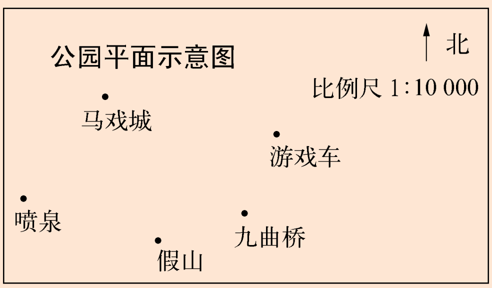
图 23.6.4

你和你同伴的方法是否一样？

对于如图 23.6.4 所示的正方形，一旦确定了四个顶点的坐标，便可完全确定该正方形的位置.

练　习

1. 小燕在某市公园的门口看到这个公园的平面示意图如图所示. 试借助刻度尺、量角器解决下面的问题.



（第 1 题）

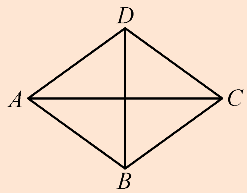
（1）建立适当的平面直角坐标系，用坐标表示假山、游戏车、马戏城的位置.

（2）填空：

九曲桥在假山的北偏东________度的方向上，到假山的距离约为________米；

喷泉在假山的北偏西______度的方向上，到假山的距离约为______米.

2. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，两条对角线 AC、BD 的长分别为 8 和 6，试建立适当的平面直角坐标系，写出它的四个顶点的坐标.



(第 2 题)

2. 图形的变换与坐标

在同一个平面直角坐标系中，一个图形经过变换之后，该图形上各点的坐标会如何变化呢？

例 1 在图 23.6.5 中，$\triangle AOB$ 沿 x 轴向右平移 3 个单位之后，得到 $\triangle A'O'B'$. 三个顶点的坐标有什么变化？

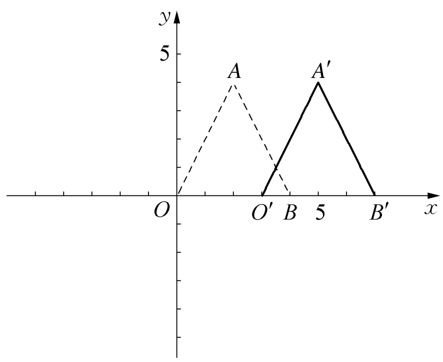


图 23.6.5

解 $\triangle AOB$ 的三个顶点的坐标分别是

$$A(2, 4), O(0, 0), B(4, 0).$$

平移之后的 $\triangle A'O'B'$ 对应的顶点坐标分别是

$$A'(5, 4), O'(3, 0), B'(7, 0).$$

沿 x 轴向右平移 3 个单位之后，三个顶点的纵坐标都没有改变，而横坐标都增加了 3.

比较相应顶点的坐标，你发现了什么？

例 2 如图 23.6.6，$\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为$(-3, 4)$、$(-4, 3)$和$(-1, 3)$. 将$\triangle ABC$沿 y 轴向下平移 3 个单位得到$\triangle A'B'C'$，然后再将$\triangle A'B'C'$沿 x 轴向右平移 4 个单位得到$\triangle A''B''C''$. 试写出现在三个顶点的坐标，看看发生了什么变化.

解 $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别是

$$A(-3, 4),\ B(-4, 3),\ C(-1, 3).$$

沿 y 轴向下平移 3 个单位之后的$\triangle A'B'C'$对应的顶点坐标分别是

$$A'(-3, 1),\ B'(-4, 0),\ C'(-1, 0).$$

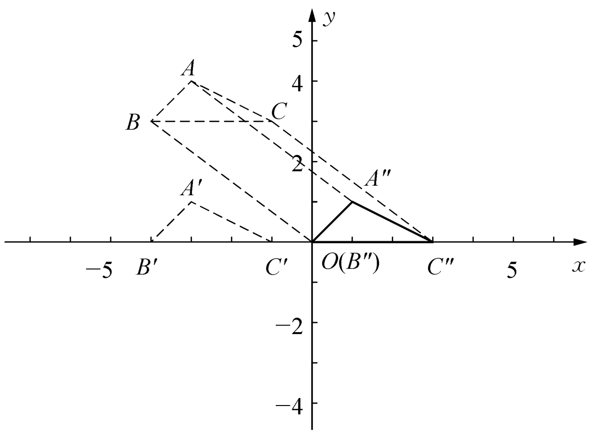


图 23.6.6

沿 x 轴向右平移 4 个单位之后的$\triangle A''B''C''$对应的顶点坐标分别是

$$A''(1, 1),\ B''(0, 0),\ C''(3, 0).$$

经过两次平移之后，三角形三个顶点的横坐标都增加了 4，纵坐标都减少了 3.

我们还可以把这两次平移看作是$\triangle ABC$沿 BB''方向平移一次，得到$\triangle A''B''C''$.

思考

在图 23.6.7 中，$\triangle AOB$ 关于 x 轴的轴对称图形是 $\triangle A'OB$，它们对应顶点的坐标有什么变化？

你找到对应顶点坐标的变化规律了吗？

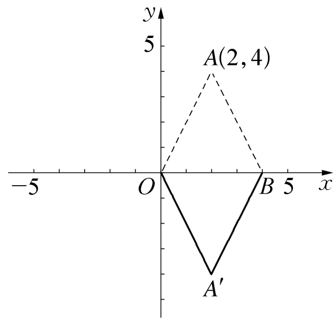


图 23.6.7

试一试

请在图 23.6.8 中的平面直角坐标系中画一个平行四边形，写出它的四个顶点的坐标，然后画出这个平行四边形关于 y 轴的对称图形，写出对称图形四个顶点的坐标，观察对应顶点的坐标有什么变化.

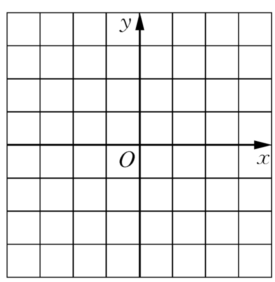


图 23.6.8

思考

如图 23. 6. 9,将△AOB 缩小后得到△COD,你能求出它们的相似比吗?

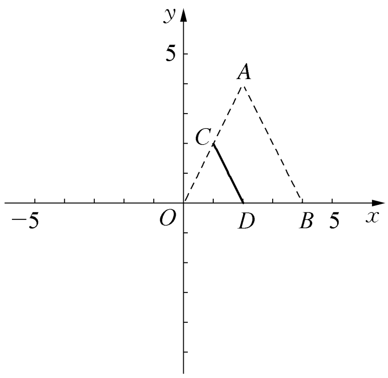


图 23. 6. 9

△AOB 的顶点坐标发生了什么变化?

探索

如图 23. 6. 10,已知矩形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别是 $A(0, 0)$、$B(3, 0)$、$C(3, 2)$、$D(0, 2)$,将这四个顶点的坐标同时扩大到原来的 2 倍后得到一组新坐标,画出新坐标对应的点所确定的图形,看看新的图形和原图形之间有什么关系.

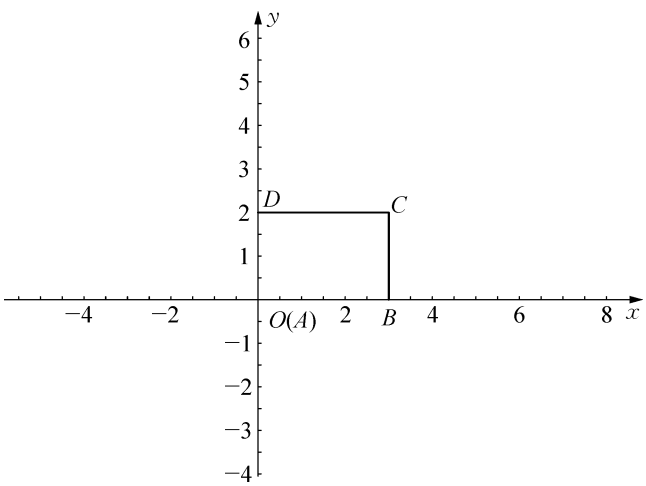


图 23. 6. 10

你能说明理由吗?

概括

请补充完整表格中的内容.

我们看到，当一个几何图形经过某种变换改变位置或大小后，图形上各点的坐标也发生了相应的变化. 本节所运用的那些变换引起的点的坐标的变化可以归纳成下表.

图形变换 / 变换后点的坐标 / 变换前点的坐标	关于 x 轴对称	关于 y 轴对称	关于原点对称	沿 x 轴向右平移 a 个单位	沿 y 轴向上平移 b 个单位	图形以原点为位似中心缩放 k 倍
(x, y)	$(x, -y)$			$(x+a, y)$		

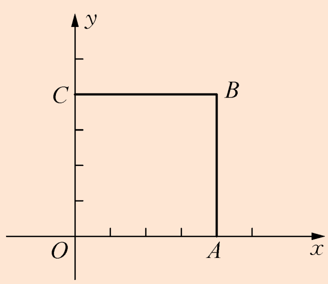
反过来，按上表的方式之一同时改变一个几何图形上各点的坐标，就使该图形产生相应的变换，改变它的位置或大小.

练　习

1. 矩形 $ABCD$ 的顶点坐标分别为 $(1, 4)$、$(5, 4)$、$(5, 1)$、$(1, 1)$，请写出该矩形关于 y 轴对称的对称图形 $A'B'C'D'$ 的顶点坐标.

2. $\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $(0, 0)$、$(0, 4)$、$(3, 0)$，将 $\triangle ABC$ 沿 x 轴向左平移 2 个单位，得到 $\triangle A'B'C'$；然后再沿 y 轴向下平移 3 个单位，得到 $\triangle A''B''C''$. 试分别写出 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle A''B''C''$ 的三个顶点的坐标.

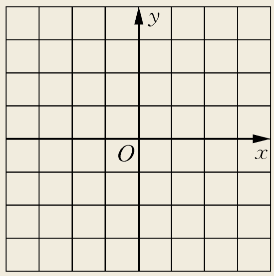
3. 如图，已知正方形 $OABC$ 的边长为 4，请写出各个顶点的坐标. 如果将它们的坐标同时缩小一半，得到一组新坐标，画出新坐标所对应的点，并把它们连结起来，得到一个新的图形，试说出它的名称. 你能说明其中的道理吗？



（第 3 题）

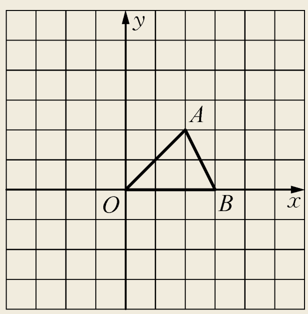
习题 23.6

1. 已知下列各点的坐标,在如图所示的平面直角坐标系中正确标出这些点,并把它们依次连结起来,观察得到的图形,你觉得它像什么?
(0, 2),(0, 0),(1, 3),(2, 3),(3, 2),(3, 0),(1, −1),(2, −1),(1, −3),(0, −1),(−1, −3),(−2, −1),(−1, −1),(−3, 0),(−3, 2),(−2, 3),(−1, 3),(0, 0).



(第 1 题)

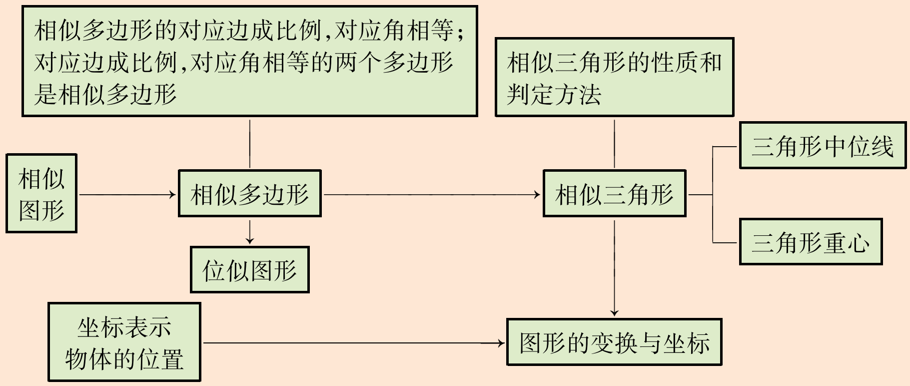
2. 将图中的△OAB 分别作下列变换,画出相应的图形,指出三个顶点的坐标所发生的变化:
(1) 沿 y 轴正方向平移 2 个单位;
(2) 关于 y 轴对称;
(3) 以点 O 为位似中心,放大到原来的 2 倍;
(4) 沿 y 轴向下平移 2 个单位,再沿 x 轴向左平移 3 个单位.



(第 2 题)

小结

一、知识结构



二、要点

1. 本章介绍了比例的基本性质、成比例线段的概念，探索发现了平行线分线段成比例的基本事实，它是证明相似三角形判定定理的基础.

2. 对于相似三角形的判定定理，仍然采用合情推理与演绎推理相结合的方法，通过类比、实验操作等合情推理去探索发现，然后再通过演绎推理进行证明，体现了两种推理方式在解决问题的不同阶段所发挥的作用.

3. 本章介绍了相似三角形的性质：相似三角形对应线段的比等于相似比，面积比等于相似比的平方. 利用相似三角形的性质可以解决现实生活中的许多实际问题. 本章探索并证明了三角形的中位线定理，今后我们会发现利用三角形的中位线定理可以解决许多数学问题.

4. 本章还介绍了用平面直角坐标系以及角度（方向）和距离来描述物体的位置，并运用坐标的方法研究图形的变换，应注意从中体会数与形之间的关系.

5. 与轴对称、平移、旋转一样，相似也是由现实世界广泛存在的某些现象抽象得到的一种图形变换，同样反映了图形与图形之间的变化关系. 与轴对称、平移、旋转三种变换不同的是，在相似变换下，图形的形状不变，但大小可能会发生变化. 全等变换是相似变换的一个特例.

复习题

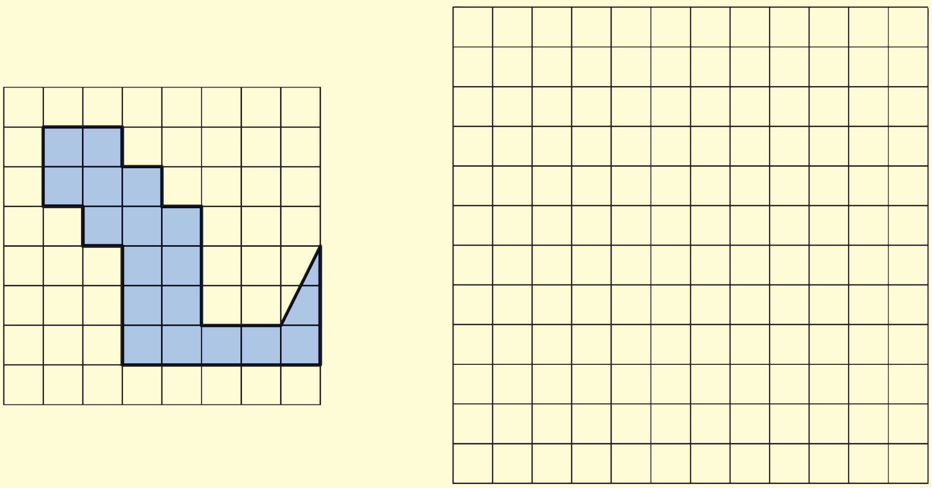
A 组

1. 地图上两地间的图上距离为 3 厘米，比例尺是 1∶1 000 000，那么两地间的实际距离是________米.

2. 若 $\frac{x-y}{13}=\frac{y}{7}$，则 $\frac{x+y}{y}=$ ________.

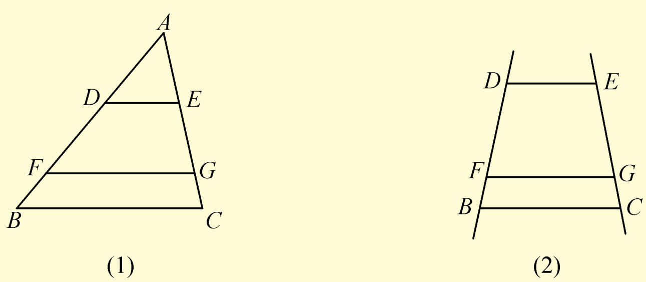
3. 如果在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E、F 分别为边 BC、AC、AB 的中点，$AB=5$，$BC=12$，$AC=13$，那么 $\triangle DEF$ 的周长 = ________，面积 = ________.

4. 在图中右边的方格图中描出左边方格图中所示图形的放大图形.



（第 4 题）

5. （1）如图(1)，$DE \parallel FG \parallel BC$，$AD=DF=2FB$，那么 AE、EG、GC 有什么关系？
（2）如图(2)，$DE \parallel FG \parallel BC$，$DF=3FB$，那么 EG 与 GC 有什么关系？



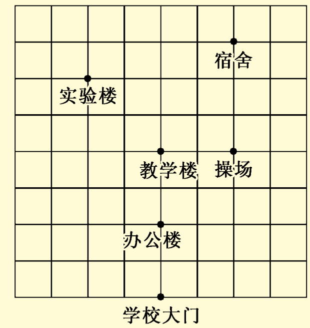
（第 5 题）

6. 所有的直角三角形都相似吗？所有的等腰直角三角形都相似吗？为什么？

7. 所有的菱形都相似吗？所有的正方形都相似吗？为什么？

8. 如果一个 4 米高的旗杆在太阳光下的影长为 6 米，同它临近的一个建筑物的影长是 24 米，那么这个建筑物的高度是多少？

9. 如图是小明所在学校的平面示意图，小明可以如何描述他所住的宿舍位置？



（第 9 题）

10. 判断下列各组中的两个三角形是否相似，如果相似，请写出证明过程.

（1）在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 是直角，$\angle A=30°$；在 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle B'$ 是直角，$\angle C'=60°$.

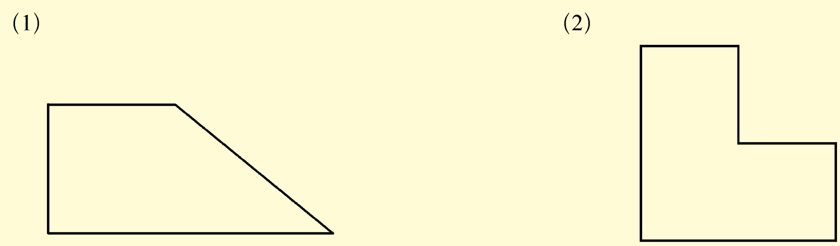
（2）在 $\triangle ABC$ 中，$AB=5$，$BC=7$，$AC=8$；在 $\triangle A'B'C'$ 中，$A'C'=16$，$B'C'=14$，$A'B'=10$.

11. $\square ABCD$ 与 $\square A'B'C'D'$ 相似，$AB=5$，AB 的对应边 $A'B'=6$，$\square ABCD$ 的面积为 10. 求 $\square A'B'C'D'$ 的面积.

B 组

12. 若 $\frac{x}{6}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}$（$x$、$y$、$z$ 均不为零），则 $\frac{x+3y}{3y-2z}=$ ________.

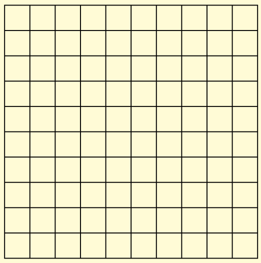
13. 将下列图形分别分成四小块，使它们的形状、大小完全相同，并且与原图形相似，应怎样分？（画出大致图形即可）



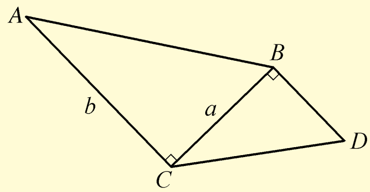
（第 13 题）

14. 请在如图所示的方格图中，先画出两个相似但不全等的格点三角形，再在适当的位置画上坐标轴，指出这两个相似三角形的顶点坐标之间的关系.

15. 如图，已知 $\angle ACB=\angle CBD=90°$，$AC=b$，$CB=a$，当 BD 与 a、b 之间满足怎样的关系式时，$\triangle ACB\backsim\triangle CBD$？

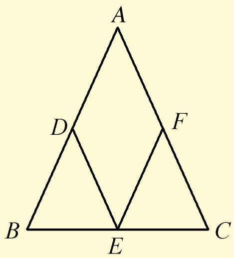


（第 14 题）

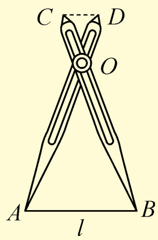


（第 15 题）

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D、E、F 分别是 AB、BC、CA 的中点. 求证：四边形 $ADEF$ 是菱形.



（第 16 题）

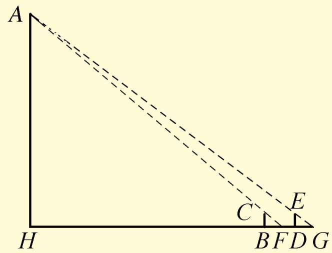


（第 17 题）

17. 如图，比例规是一种画图工具，使用它可以把线段按一定比例伸长或缩短. 它是由长度相等的两脚 AD 和 BC 交叉构成的. 如果把比例规的两脚合上，使螺丝钉固定在刻度 3 的地方（即同时使 $OA=3OD$，$OB=3OC$），然后张开两脚，使 A、B 两个尖端分别在线段 l 的两个端点上，这时 CD 与 AB 有什么关系？为什么？

18. 三国魏人刘徽，自撰《海岛算经》，专论测高望远. 其中有一题，是数学史上有名的测量问题. 今译如下：

如图，要测量海岛上一座山峰 A 的高度 AH，立两根高三丈的标杆 BC 和 DE，两竿相距 $BD=1\ 000$ 步，点 D、B、H 成一线. 从 BC 退行 123 步到 F，人目着地观察 A，A、C、F 三点共线；从 DE 退行 127 步到点 G，从点 G 看点 A，A、E、G 三点也共线. 试算出山峰的高度 AH 及点 H、B 间的距离 HB.（古制中，1 步 $=6$ 尺，1 里 $=180$ 丈 $=1\ 800$ 尺 $=300$ 步. 结果用里和步来表示）

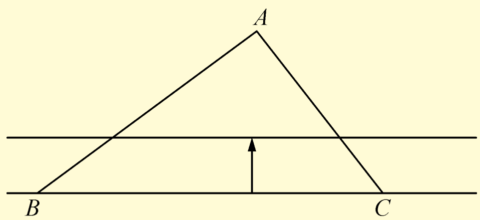


（第 18 题）

C 组

19. 在 Rt△*ABC* 中，点 *P* 位于直角边 *AC* 上，且与点 *A*、*C* 不重合，试过点 *P* 作直线截△*ABC*，使截得的三角形与原△*ABC* 相似，画出所有可能的图形，并说明理由.

20. 如图，在△*ABC* 中，$AB=8$，$AC=6$，$BC=10$. 线段 *BC* 所在直线以每秒 2 个单位的速度沿与其垂直的方向向上平行移动. 记 x 秒时，该直线在△*ABC* 内的部分的长度为 y. 试写出 y 关于 x 的函数关系式，并在平面直角坐标系中画出这一函数的图象.

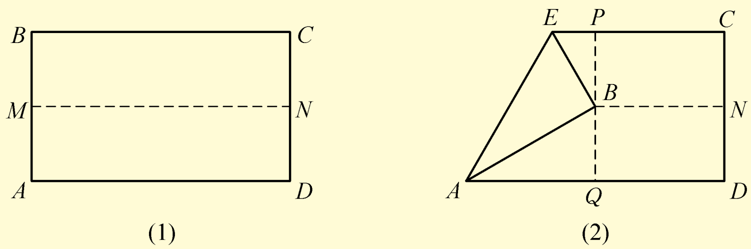


（第 20 题）

21. 如图(1)，先把一张矩形纸片 *ABCD* 上下对折，设折痕为 *MN*；如图(2)，再把点 *B* 叠在折痕线上，得到△*ABE*. 过点 *B* 向右折纸片，使 *D*、*Q*、*A* 三点仍保持在一条直线上，得折痕 *PQ*.

(1) 求证：△*PBE*∽△*QAB*.

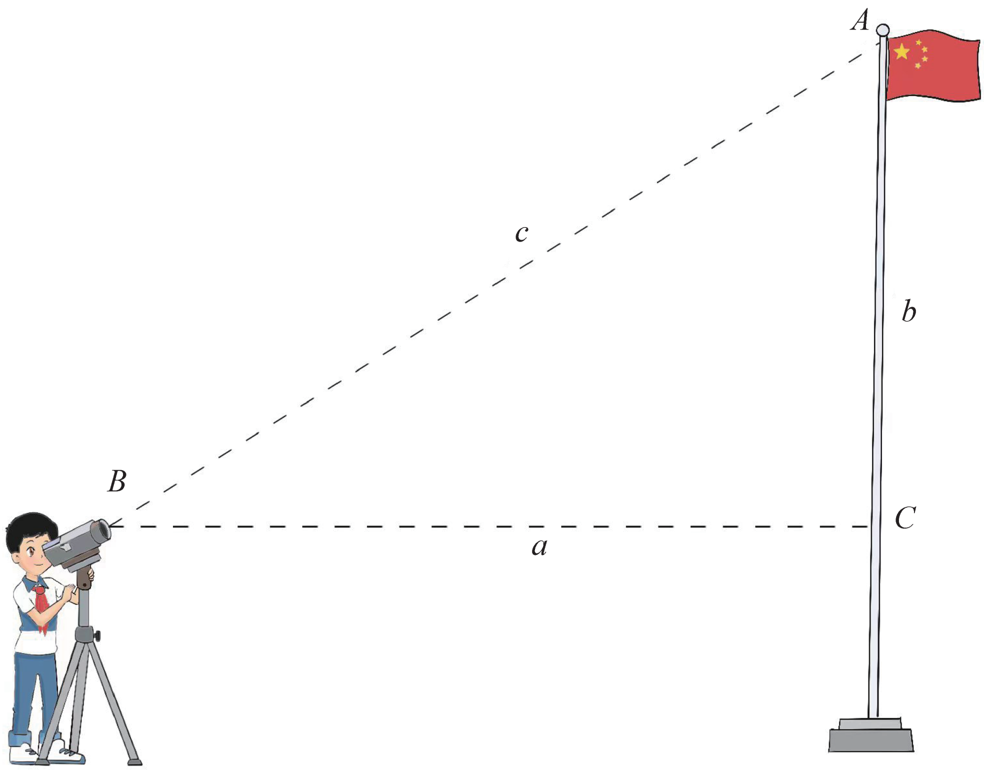
(2) 你认为△*PBE* 和△*BAE* 相似吗？如果相似，给出证明；如果不相似，请说明理由.



（第 21 题）

22. 已知线段 l，试构造一个直角三角形，使其周长恰好等于线段 l 的长，你能画出多少个符合要求的直角三角形？想想看，你一定能找到满意的答案.

第24章　解直角三角形



测量物体的高度是人们经常遇到的问题．对测量数据进行处理，往往要用到下面的式子：

$$a^2+b^2=c^2 \qquad (1)$$

$$\tan B=\frac{b}{a} \qquad (2)$$

我们已经知道，式子(1)表示直角三角形三边之间的关系，即勾股定理．式子(2)的意义是什么呢？

本章将告诉我们怎样利用直角三角形来解决有关的测量问题．

24.1 测　量

当你走进学校，仰头望着操场旗杆上高高飘扬的五星红旗时，你也许很想知道，操场旗杆有多高？

你可能会想到利用相似三角形的知识来解决这个问题.

如图 24.1.1，站在操场上，请你的同学量出你在太阳光下的影子长度、旗杆的影子长度，再根据你的身高，便可以利用相似三角形的知识计算出旗杆的高度.

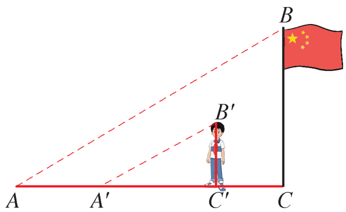


图 24.1.1

如果就你一个人，又遇上阴天，那怎么办呢？人们想到了一种可行的方法，还是利用相似三角形的知识.

试一试

如图 24.1.2，站在离旗杆 BE 底部 10 米处的点 D，目测旗杆的顶部，视线 AB 与水平线的夹角 $\angle BAC$ 为 34°，并已知目高 AD 为 1.5 米. 现在若按 1∶500 的比例将 $\triangle ABC$ 画在纸上，并记为 $\triangle A'B'C'$，用刻度尺量出纸上 $B'C'$ 的长度，便可以算出旗杆的实际高度.

你知道计算的方法吗？

你算出来了吗？

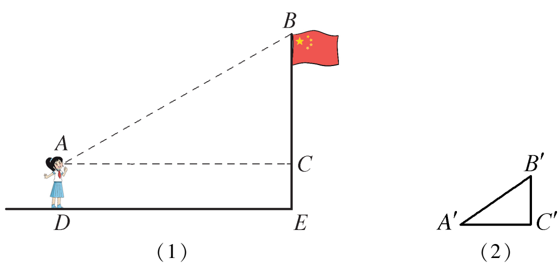


图 24.1.2

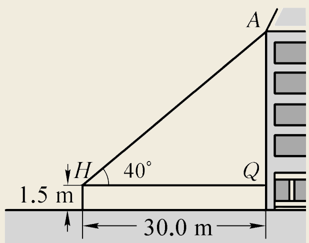
实际上,我们利用图 24. 1. 2(1)中已知的数据就可以直接计算旗杆的高度,而这一问题的解决将涉及直角三角形中的边角关系,这就是本章要探究的内容.

练　习

1. 小兵身高 160 cm,他的影子长度是 100 cm. 如果同时,他朋友的影子比他的影子短 5 cm,那么他的朋友有多高?
2. 小明想知道学校旗杆的高度,他发现旗杆顶端的绳子垂到地面还多出 1 米,当他把绳子的下端拉开 5 米后,发现下端刚好接触地面. 求旗杆的高度.

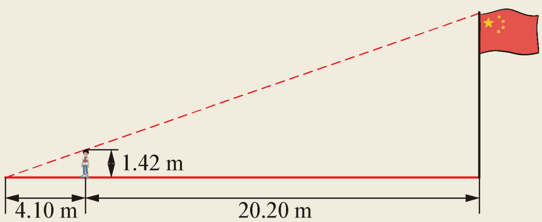
习题 24. 1

1. 如图,为测量某建筑物的高度,在离该建筑物底部 30. 0 米处,目测其顶,视线与水平线的夹角为 40°,目高为 1. 5 米. 试利用相似三角形的知识,求出该建筑物的高度.(精确到 0. 1 米)



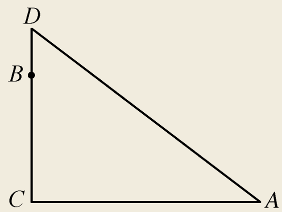
(第 1 题)

2. 小强身高 1. 42 米,他想求出校园内旗杆的高度. 他从旗杆底部沿着旗杆的影子走了 20. 20 米,此时他头顶的投影恰与旗杆顶端的投影重合,这时他距旗杆影子的末端是 4. 10 米. 旗杆的高度是多少?(精确到 0. 01 米)



(第 2 题)

3. 如图,在一棵树 10 米高的 B 处有两只猴子,一只猴子爬下树走到离树 20 米的池塘 A 处,另一只猴子爬到树顶 D 后直接跃到 A 处. 距离以直线计算,如果两只猴子所经过的距离相等,求这棵树的高度.



(第 3 题)

24.2 直角三角形的性质

在研究直角三角形的边角关系之前,我们先来探索和归纳直角三角形的性质.

我们已经知道:

(1) 直角三角形的两个锐角互余.

(2) 直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方(勾股定理).

下面我们探索直角三角形的其他性质.

探索

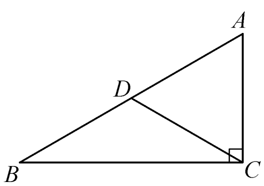


图 24.2.1

如图 24.2.1,画 Rt$\triangle ABC$,并画出斜边 AB 上的中线 CD,量一量,看看 CD 与 AB 有什么关系.

相信你与你的同伴一定会发现:CD 恰好是 AB 的一半.

下面让我们用演绎推理证明这一猜想.

已知:如图 24.2.2,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB = 90°$,CD 是斜边 AB 上的中线.

求证:$CD = \frac{1}{2}AB$.

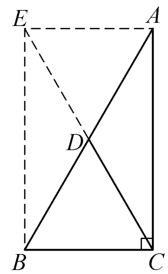


图 24.2.2

证明 延长 CD 至点 E,使 $DE = CD$,连结 AE、BE.

$\because$ CD 是斜边 AB 上的中线,

$\therefore$ $AD = DB$.

又 $\because$ $DE = CD$,

$\therefore$ 四边形 $ACBE$ 是平行四边形.

又 $\because$ $\angle ACB = 90°$,

$\therefore$ 四边形 $ACBE$ 是矩形,

$\therefore$ $CE = AB$,

$\therefore$ $CD = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}AB$.

由此,我们得到直角三角形的又一条性质:

(3)直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

利用直角三角形的上述性质,可以解决某些与直角三角形有关的问题.

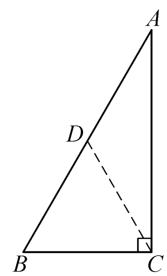


图 24.2.3

例 如图 24.2.3,在 Rt$\triangle ACB$ 中,$\angle ACB = 90°$,$\angle A = 30°$. 求证:$BC = \frac{1}{2}AB$.

证明 作斜边 AB 上的中线 CD,则

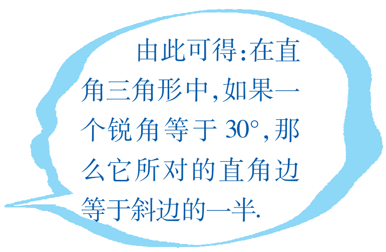
$CD = \frac{1}{2}AB = AD = BD$(直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半).

$\because$ $\angle A = 30°$,

$\therefore$ $\angle B = 60°$,

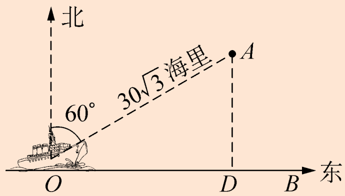
$\therefore$ $\triangle CDB$ 是等边三角形.

$\therefore$ $BC = BD = \frac{1}{2}AB$.



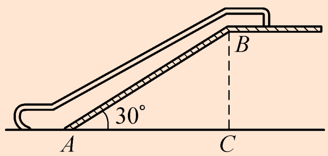
练　习

1. 已知直角三角形两条直角边的长分别为 1 cm 和$\sqrt{3}$ cm. 求斜边上中线的长.
2. 如图,在 A 岛周围 20 海里水域有暗礁,一艘轮船由西向东航行到点 O 处时,发现 A 岛在北偏东 60°的方向,且与轮船相距 $30\sqrt{3}$ 海里. 该船如果不改变航向,有触暗礁的危险吗?



(第 2 题)

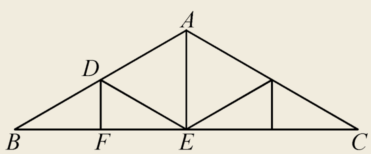
3. 如图是某商店营业大厅自动扶梯的示意图. 自动扶梯 AB 的倾斜角为 30°,大厅两层之间的距离 BC 为 6 米. 你能算出自动扶梯 AB 的长吗?



(第 3 题)

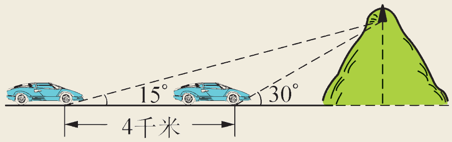
习题 24. 2

1. 小明沿倾斜角为 30°的山坡,从山脚步行到山顶的革命烈士纪念碑,共走了 120 m. 求山顶的高度.
2. 如图所示的人字屋架的设计图关于 AE 所在直线成轴对称. 其中 $AB = AC = 5$ m,D 是 AB 的中点,并且 AE、DF 都垂直于 BC. 如果 $\angle BAC = 120°$,那么你能求出图中其他各条线段的长吗?试写出计算过程.



(第 2 题)

3. 如图,小明在汽车上看见前面山上有个气象站,仰角为15°,当汽车又笔直地向山的方向行驶4千米后,小明看气象站的仰角为30°. 你能算出这个气象站离地面的高度吗?



(第3题)

24.3 锐角三角函数

利用前面给出的直角三角形的一些性质,可以解决某些与直角三角形有关的简单问题. 为了更有效地解决各种测量问题,我们有必要深入研究直角三角形中边与角的一些关系.

1. 锐角三角函数

在24.1节中,我们曾经使用两种方法求出操场旗杆的高度,其中都出现了两个相似的直角三角形,即

$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'.$$

按1∶500的比例,就一定有

$$\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{1}{500},$$

$\frac{1}{500}$就是它们的相似比.

当然也有 $$\frac{B'C'}{A'C'}=\frac{BC}{AC}.$$

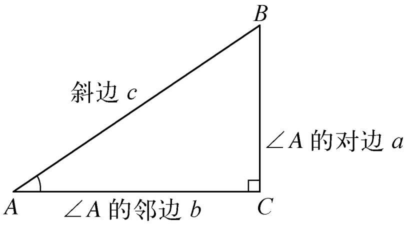


图 24.3.1

我们已经知道,直角三角形 ABC 可以简记为 Rt△ABC,直角∠C 所对的边 AB 称为斜边,用 c 表示,另两条直角边为∠A 的对边与邻边,分别用 a、b 表示(如图 24.3.1).

前面的结论启示我们,在 Rt△ABC 中,只要一个锐角的大小不变(如 ∠A = 34°),那么不管这个直角三角形的大小如何,该锐角的对边与邻边的比值都是一个固定的值.

思考

一般情况下,在 Rt△ABC 中,当锐角∠A 取其他确定值时,∠A 的对边与邻边的比值还会是一个固定值吗?

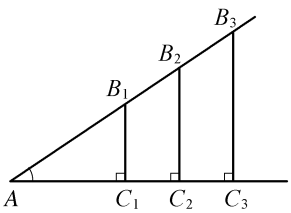


图 24.3.2

探索

观察图 24.3.2 中的 Rt△AB_1C_1、Rt△AB_2C_2 和 Rt△AB_3C_3,易知

$$\text{Rt}\triangle AB_1C_1 \backsim \text{Rt}\triangle \underline{\qquad\quad} \backsim \text{Rt}\triangle \underline{\qquad\quad},$$

所以 $$\frac{B_1C_1}{AC_1} = \underline{\qquad\quad} = \underline{\qquad\quad}.$$

也可以这样理解:根据直角三角形相似的判定,包含锐角∠A 的直角三角形均相似,因此,这些比值分别相等.

可见,在 Rt△ABC 中,对于锐角∠A 的每一个确定的值,其对边与邻边的比值都是唯一确定的.

我们同样可以发现,对于锐角∠A 的每一个确定的值,其对边与斜边、邻边与斜边的比值和对边与邻边的比值一样也是唯一确定的.

因此,这几个比值都是锐角∠A 的函数,分别记作 $\sin A$、$\cos A$、$\tan A$,即

$$\sin A = \frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c},$$

$$\cos A = \frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c},$$

$$\tan A = \frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}} = \frac{a}{b},$$

分别叫做锐角∠A 的**正弦、余弦、正切**，统称为锐角∠A 的**三角函数**.

显然，锐角三角函数值都是正实数，并且

$$0 < \sin A < 1, 0 < \cos A < 1.$$

根据三角函数的定义，我们还可以得出

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

例 1 如图 24. 3. 3，在 Rt△ABC 中，∠C = 90°，AC = 15，BC = 8. 试求出∠A 的三个三角函数值.

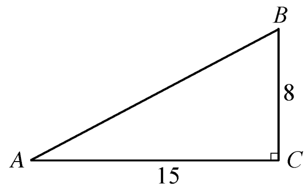


图 24. 3. 3

解 $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{289} = 17$,

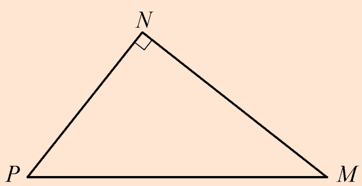
$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{17},$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{17},$$

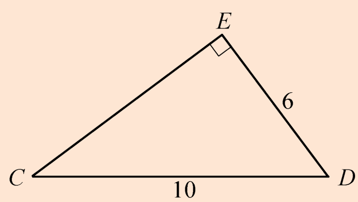
$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{15}.$$

练 习

1. 如图，在 Rt△MNP 中，∠N = 90°，则：
   ∠P 的对边是________，∠P 的邻边是________；
   ∠M 的对边是________，∠M 的邻边是________.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在 Rt△DEC 中，∠E = 90°，CD = 10，DE = 6. 试求出 ∠D 的三个三角函数值.
3. 在 Rt△ABC 中，∠C = 90°，∠A、∠B、∠C 的对边分别为 a、b、c. 根据下列所给条件，分别求出 ∠B 的三个三角函数值：
   (1) $a = 3, b = 4$;　　　　(2) $a = 5, c = 13$.

你知道这些结论的理由吗？

如图 24.3.4，在Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，则 $BC=\frac{1}{2}AB$，$AC=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$.

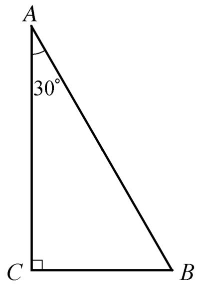


图 24.3.4

从而可得：

$$\sin 30°=\frac{BC}{AB}=\frac{\frac{1}{2}AB}{AB}=\frac{1}{2},$$

$$\cos 30°=\frac{AC}{AB}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}AB}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30°=\frac{BC}{AC}=\frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

同理可得：

$$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60°=\frac{1}{2},\ \tan 60°=\sqrt{3}.$$

做一做

在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A=45°$. 根据锐角三角函数的定义，求出 $\angle A$ 的三个三角函数值.

为了便于记忆，我们把 30°、45°、60°角的各个三角函数值列表如下：

请填出空白处的值.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°			1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

例 2 求值：$\sin 30° \cdot \tan 30° + \cos 60° \cdot \tan 60°$.

解 $\sin 30° \cdot \tan 30° + \cos 60° \cdot \tan 60°$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \times \sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

练　习

1. 用特殊角的三角函数填空：

$\frac{\sqrt{3}}{2} =$ ________ $=$ ________；　　$\frac{\sqrt{2}}{2} =$ ________ $=$ ________；

$1 =$ ________；　　$\sqrt{3} =$ ________.

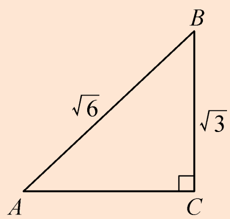
2. 求下列各式的值：

(1) $\sin^2 60° + \cos^2 60°$；

(2) $2\cos 60° + 2\sin 30° + 4\tan 45°$；

(3) $\frac{\cos 30°}{1 + \sin 30°} + \frac{1}{\tan 60°}$.

3. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$AB = \sqrt{6}$，$BC = \sqrt{3}$. 求$\angle A$ 的大小.



（第 3 题）

2. 用计算器求锐角三角函数值

下面我们介绍如何利用计算器求已知锐角的三角函数值，以及由三角函数值求对应的锐角.

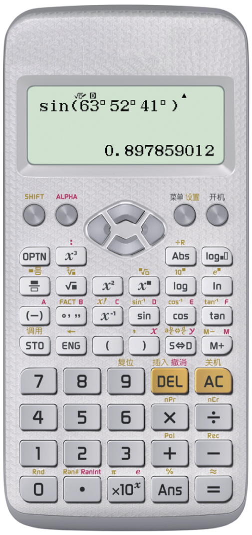
(1) 求已知锐角的三角函数值.

例 3 求 $\sin 63°52'41''$的值.（精确到 0.000 1）

解 先用如下方法将角度单位状态设定为“度”：

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{菜单}}$（设置）$\boxed{2}$（角度单位）$\boxed{1}$（度），屏幕显示 D.

再按下列顺序依次按键：



$\boxed{\sin}$ $\boxed{6}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\circ\,'\,''}$ $\boxed{5}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\circ\,'\,''}$ $\boxed{4}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\circ\,'\,''}$ $\boxed{=}$，

显示结果为 0.897 859 012.

所以 $\sin 63°52'41'' \approx 0.8979$.

注意：（设置）是 $\boxed{\text{菜单}}$ 的第二功能，启用第二功能，需先按 $\boxed{\text{SHIFT}}$ 键.

例 4 求 $\tan 19°15'$的值.（精确到 0.000 1）

解 在角度单位状态为“度”的情况下（屏幕显示 D），按下列顺序依次按键：

$\boxed{\tan}$ $\boxed{1}$ $\boxed{9}$ $\boxed{\circ\,'\,''}$ $\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\circ\,'\,''}$ $\boxed{=}$，

显示结果为 0.349 215 633 4.

所以 $\tan 19°15' \approx 0.3492$.

（2）由锐角三角函数值求锐角.

例 5 已知 $\tan x = 0.7410$，求锐角 x.（精确到 $1'$）

解 在角度单位状态为“度”的情况下（屏幕显示 D），按下列顺序依次按键：

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\tan}$（$\tan^{-1}$）$\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{7}$ $\boxed{4}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$，

显示结果为 36.538 445 77.

再按键 $\boxed{\circ\,'\,''}$，显示结果为 $36°32'18.4''$.

所以 $x \approx 36°32'$.

练习

1. 利用计算器求下列三角函数值：(精确到0.000 1)

(1) $\sin 24°$；　　(2) $\cos 51°42'20''$；

(3) $\tan 70°21'$.

2. 已知下列锐角 α 的各三角函数值，利用计算器求锐角 α：(精确到 $1'$)

(1) $\sin\alpha = 0.2476$；　　(2) $\cos\alpha = 0.4174$；

(3) $\tan\alpha = 0.1890$.

习题 24.3

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$AC = 21$，$AB = 29$. 分别求出 $\angle A$、$\angle B$ 的三个三角函数值.
2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$BC : AC = 3 : 4$. 求 $\angle A$ 的三个三角函数值.
3. 求下列各式的值：

(1) $\sin 30° + \sin^2 45° - \frac{1}{3}\tan^2 60°$；

(2) $\sqrt{(4\sin 30° - \tan 60°)(\tan 60° + 4\cos 60°)}$.

4. 利用计算器求下式的值：(精确到0.000 1)

$\sin 81°32'17'' + \cos 38°43'47''$.

5. 已知 $\tan A = 3.1748$，利用计算器求锐角 $\angle A$.（精确到 $1'$）

24.4 解直角三角形

我们已经掌握了直角三角形的有关性质以及边角之间的各种关系，这些都是解决与直角三角形有关的实际问题的有效工具.

例 1 如图 24.4.1，一棵大树在一次强烈的地震中于离地面 5 米处折断倒下，树顶落在离树根 12 米处，则大树在折断之前高多少？

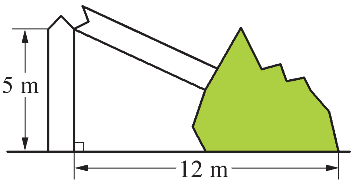


图 24.4.1

解 利用勾股定理可以求出折断后倒下部分的长度为

$$\sqrt{5^2+12^2}=13,$$

$$13+5=18(\text{米}).$$

答：大树在折断之前高 18 米.

本题是已知两直角边，求斜边.

在例 1 中，我们还可以利用直角三角形的边角关系求出另外两个锐角. 像这样，在直角三角形中，由已知元素求出未知元素的过程，叫做解直角三角形.

例 2 如图 24.4.2，在相距 2 000 米的东、西两座炮台 A、B 处同时发现入侵敌舰 C，在炮台 A 处测得敌舰 C 在它的南偏东 40°的方向，在炮台 B 处测得敌舰 C 在它的正南方. 试求敌舰与两炮台的距离.（精确到 1 米）

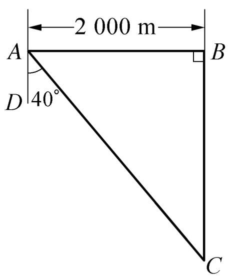


图 24.4.2

解 在 Rt△ABC 中，

$$\because\ \angle CAB=90^\circ-\angle DAC=50^\circ,$$

$$\frac{BC}{AB}=\tan\angle CAB,$$

$$\therefore\ BC=AB\cdot\tan\angle CAB$$

$$=2\,000\times\tan 50^\circ\approx 2\,384(\text{米}).$$

$$\because\ \frac{AB}{AC}=\cos 50^\circ,$$

本题是已知一边、一锐角，求其他两边.

$$\therefore\ AC=\frac{AB}{\cos 50^\circ}=\frac{2\,000}{\cos 50^\circ}\approx 3\,111(\text{米}).$$

答：敌舰与 A、B 两炮台的距离分别约为 3 111 米和 2 384 米.

在解直角三角形的过程中，常会遇到近似计算，除特别说明外，本教科书中的角度都精确到 $1'$.

解直角三角形，只有下面两种情况：

（1）已知两条边；

（2）已知一条边和一个锐角.

根据三角形全等的判定，由于已知一个角是直角，所以在这两种情况下，对应的直角三角形唯一确定. 因此，可以求出其他元素.

练　习

1. 在电线杆离地面 8 米高处向地面拉一条缆绳，缆绳和地面成 $53°7'$ 角，求该缆绳的长及缆绳地面固定点到电线杆底部的距离.（精确到 0.1 米）
2. 海船以 32.6 海里/时的速度向正北方向航行，在 A 处看灯塔 Q 在海船的北偏东 30° 处，半小时后航行到 B 处，发现此时灯塔 Q 与海船的距离最短. 求灯塔 Q 到 B 处的距离.（画出图形后计算，精确到 0.1 海里）

读一读

如图 24.4.3，在进行测量时，从下向上看，视线与水平线的夹角叫做仰角；从上往下看，视线与水平线的夹角叫做俯角.

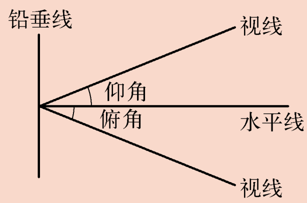


图 24.4.3

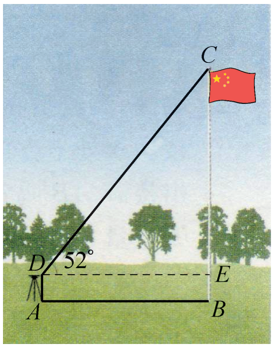


图 24.4.4

仿照例3的方法，求出第100页图24.1.2中旗杆的高度.

例3　如图24.4.4，为了测量旗杆的高度 BC，在离旗杆底部10米的 A 处，用高1.50米的测角仪 DA 测得旗杆顶端 C 的仰角 $\alpha=52°$. 求旗杆 BC 的高.（精确到0.1米）

解　在Rt△CDE中，

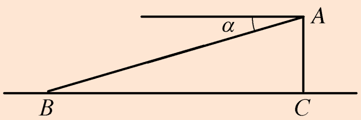
$$\begin{aligned}\because\ CE &= DE\times\tan\alpha\\ &=AB\times\tan\alpha\\ &=10\times\tan 52°\\ &\approx 12.80,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ BC &= BE+CE\\ &=DA+CE\\ &\approx 1.50+12.80\\ &=14.3(\text{米}).\end{aligned}$$

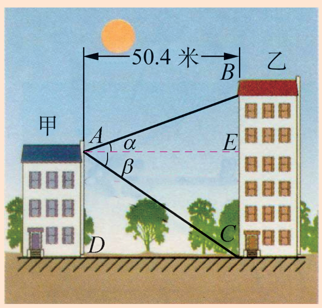
答：旗杆 BC 的高度约为14.3米.

练　习

1. 如图，某飞机于空中 A 处探测到正下方的地面目标 C，此时飞行高度 $AC=1\ 200$ 米，从飞机上看地面控制点 B 的俯角 $\alpha=16°31'$. 求 A 处到控制点 B 的距离.（精确到1米）



（第1题）



（第2题）

2. 两座建筑物 DA 与 CB，其地面距离 DC 为50.4米，从 DA 的顶点 A 测得 CB 顶部 B 的仰角 $\alpha=20°$，测得其底部 C 的俯角 $\beta=35°$. 求这两座建筑物的高.（精确到0.1米）

读一读

在修路、挖河、开渠和筑坝时，设计图纸上都要注明斜坡的倾斜程度.

如图 24.4.5，坡面的铅垂高度(h)和水平长度(l)的比叫做坡面的坡度(或坡比)，记作 i，即 $i=\frac{h}{l}$.

坡度通常写成 $1:m$ 的形式，如 $i=1:6$.

坡面与水平面的夹角叫做坡角，记作 α，有

$$i=\frac{h}{l}=\tan\alpha.$$

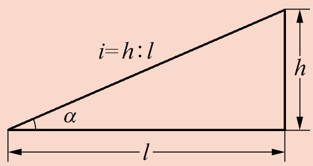
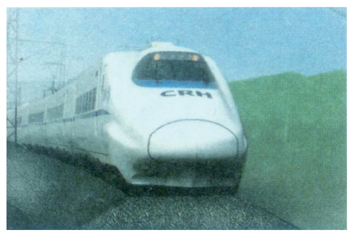


图 24.4.5

显然，坡度越大，坡角 α 就越大，坡面就越陡.

例 4 如图 24.4.6，一段路基的横断面是梯形，高为 4.2 米，上底宽为 12.51 米，其坡面的坡角分别是 32° 和 28°. 求路基下底的宽.（精确到 0.1 米）



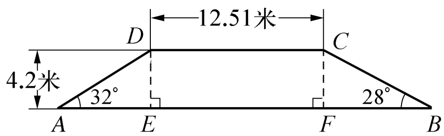


图 24.4.6

解 作 $DE\perp AB$，$CF\perp AB$，垂足分别为点 E、F. 由题意可知

$$DE=CF=4.2,$$

$$EF=CD=12.51.$$

在 Rt△ADE 中，

$$\because \frac{DE}{AE}=\frac{4.2}{AE}=\tan 32°,$$

$$\therefore\ AE=\frac{4.2}{\tan 32^\circ}\approx 6.72.$$

在Rt△BCF中,同理可得

$$BF=\frac{4.2}{\tan 28^\circ}\approx 7.90.$$

$$\begin{aligned}\therefore\ AB&=AE+EF+BF\\&\approx 6.72+12.51+7.90\\&\approx 27.1(\text{米}).\end{aligned}$$

答:路基下底的宽约为 27.1 米.

读一读

利用解直角三角形的知识解决实际问题的一般过程是:

(1) 将实际问题抽象为数学问题(画出平面图形,转化为解直角三角形的问题,也就是建立适当的数学模型);

(2) 根据条件的特点,适当选用锐角三角函数,运用直角三角形的有关性质,解直角三角形;

(3) 得到数学问题的答案;

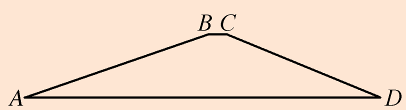
(4) 得到实际问题的答案.

练 习

如图,一水库大坝的横断面为梯形 $ABCD$,坝顶宽为 6.2 米,坝高为 23.5 米,斜坡 AB 的坡度 $i_1=1:3$, 斜坡 CD 的坡度 $i_2=1:2.5$. 求:

(1) 斜坡 AB 与坝底 AD 的长度(精确到 0.1 米);

(2) 斜坡 CD 的坡角 α(精确到 1°).



习题 24.4

1. 在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，由下列条件解直角三角形：

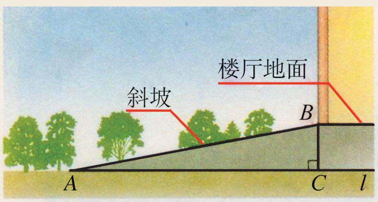
(1) 已知 $BC=6\sqrt{15}$，$AC=6\sqrt{5}$，求 AB；

(2) 已知 $BC=20$，$AB=20\sqrt{2}$，求 $\angle B$；

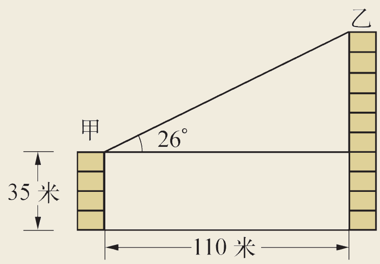
(3) 已知 $AB=30$，$\angle A=60°$，求 AC；

(4) 已知 $AC=15$，$\angle A=30°$，求 BC.

2. 一个公共房屋门前的台阶共高出地面 1.2 米. 台阶被拆除后，换成供轮椅行走的斜坡. 根据这个城市的规定，轮椅行走斜坡的倾斜角不得超过 9°. 从斜坡的起点至房屋门的最短的水平距离应该是多少？（精确到 0.1 米）



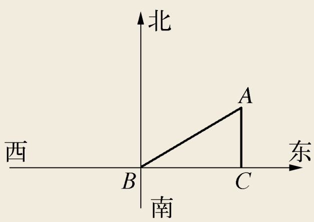
（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，两幢大楼相距 110 米，从甲楼顶部看乙楼顶部的仰角为 26°. 如果甲楼高 35 米，那么乙楼的高为多少米？（精确到 1 米）

4. 如图，一艘船向东航行，上午 8 时到达 B 处，看到有一灯塔在它的北偏东 59°方向，距离它 72 海里的 A 处；上午 10 时到达 C 处，看到灯塔在它的正北方向. 求这艘船航行的速度.（精确到 1 海里/时）



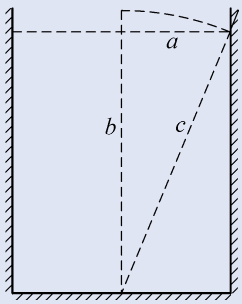
（第 4 题）

阅读材料

葭生池中

今有方池一丈，
葭生其中央，
出水一尺，
引葭赴岸，
适与岸齐.
问：水深、葭长各几何？

这是我国数学发展史上著名的“葭生池中”问题. 它的解法可以由下图获得.



中世纪，印度著名数学家婆什迦罗(Bhāskara, 1114－1185)在其著作中提出了与“葭生池中”相似的“荷花问题”：

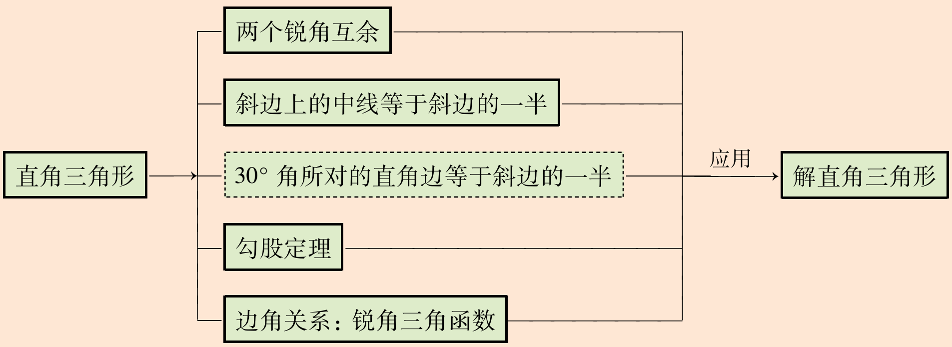
平平湖水清可鉴，荷花半尺出水面.
忽来一阵狂风急，吹倒荷花水中偃.
湖面之上不复见，入秋渔翁始发现.
残花离根二尺远，试问水深尺若干.

这类问题还有很多.

你看，关于直角三角形应用的丰富有趣的数学问题到处可见，你还能找到一些其他问题吗？

小结

一、知识结构



二、要点

1. 理解并掌握直角三角形中的边角之间的关系.

2. 能应用直角三角形的有关性质与边角关系解决有关的实际问题.

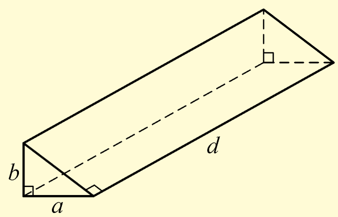
3. 在运用解直角三角形的知识解决实际问题时，找到或适当构造直角三角形（即建立与实际问题相吻合的数学模型）是前提，正确分析和把握直角三角形中的边角关系是关键.

4. 解直角三角形是解决任意三角形中计算问题的基础. 解直角三角形所需要的条件，可通过对判定直角三角形全等所需要的条件进行分析得到. 这样的思想方法，今后也可用于对解任意三角形的研究.

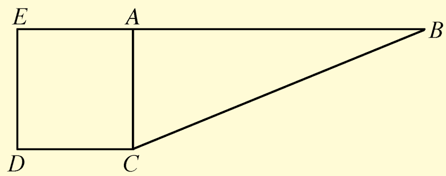
复习题

A 组

1. 如图，某菜农修建一个横截面为直角三角形的塑料大棚，棚宽 $a=4$ m，高 $b=3$ m，长 $d=35$ m. 求覆盖在顶上的塑料薄膜的面积.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，正方形 $ACDE$ 的面积为 25 cm^2，$AB=12$ cm，$BC=13$ cm. 问 E、A、B 三点在同一条直线上吗？为什么？

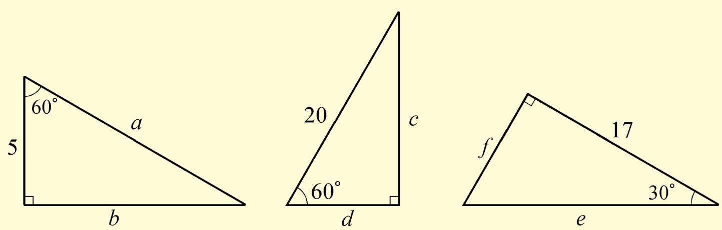
3. 已知直角三角形的两条直角边长分别为 6、8. 求斜边上的中线的长.

4. 求下列各式的值：

（1）$2\cos 30^\circ - 2\tan 45^\circ$；（2）$\sin^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ$；

（3）$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ + \dfrac{\tan^2 60^\circ}{\tan^2 30^\circ}$.

5. 分别求下列直角三角形中各字母表示的边长.



(1) (2) (3)

（第 5 题）

（第 6 题）

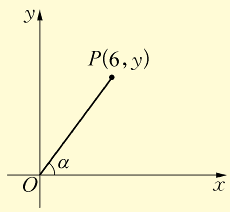
6. 小明放一个线长为 125 米的风筝，他的风筝线（近似地看作直线）与水平地面构成 39°角. 若小明身高 1.40 米，那么他的风筝有多高？（精确到 1 米）

7. 在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$\angle A=60°$，$\angle A$ 的平分线 AM 的长为 15 cm. 求直角边 AC 和斜边 AB 的长.（精确到 0.1 cm）

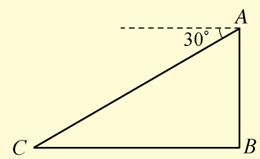
8. 在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，直角边 AC 是直角边 BC 的 2 倍. 求$\angle B$ 的三个三角函数值.

9. 如图，在所示的平面直角坐标系中，P 是第一象限的点，其坐标为$(6,\ y)$，且 OP 与 x 轴正半轴的夹角 α 的正切值为$\frac{4}{3}$. 求：

（1）y 的值；　　（2）角 α 的正弦值.



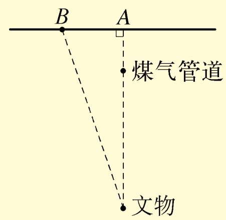
（第 9 题）



（第 10 题）

10. 如图，飞机 A 在地面目标 B 的正上方 1 000 米处，飞行员测得另一地面目标 C 的俯角为 30°. 求 B、C 之间的距离.（精确到 0.1 米）

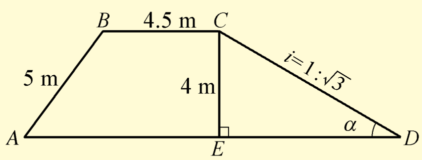
11. 如图，某古代文物被探明埋于点 A 地面下 24 米处. 由于点 A 地面下有煤气管道，考古人员不能垂直向下挖掘，他们被允许从与点 A 的距离为 8 米的点 B 处挖掘. 考古人员应以与地平面形成多大的角度进行挖掘才能沿最短路线挖到文物？他们需要挖多长的距离？（角度精确到 1′，距离精确到 0.1 米）



（第 11 题）

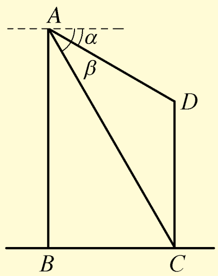
B 组

12. 如图，一段河坝的断面为梯形 $ABCD$，试根据图中数据，求出坡角 α 和坝底宽 AD.（结果保留根号）



（第 12 题）

13. 如图，两座建筑物 AB 和 DC 的水平距离 BC 为 24 米，从点 A 测得点 D 的俯角 $\alpha=30°$，测得点 C 的俯角 $\beta=60°$. 求这两座建筑物的高.（精确到 0.1 米）

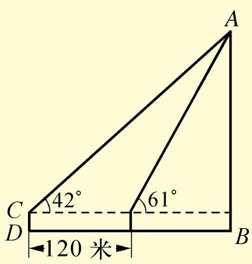


（第 13 题）

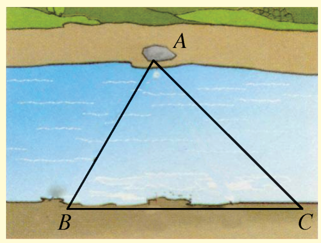
14. 在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AB=5$，$BC=3$，CE 是斜边 AB 上的中线，CD 是斜边 AB 上的高. 求 DE 的长.

C 组

15. 如图，为了测得电视塔的高度 AB，在 D 处用高为 1.2 米的测角仪 CD，测得电视塔顶端 A 的仰角为 42°，再向电视塔方向前进 120 米，又测得电视塔顶端 A 的仰角为 61°. 求这个电视塔的高度 AB.（精确到 1 米）



（第 15 题）



（第 16 题）

16. 如图，为了求某条河的宽度，在它的对岸岸边任意取一点 A，再在河的这边取两点 B、C，使得 $\angle ABC=60°$，$\angle ACB=45°$，量得 BC 的长为 30 米.

（1）求河的宽度（即求△ABC 中 BC 边上的高）（精确到 1 米）；

（2）请再设计两种测量河的宽度的方案.

17.“荡秋千”问题

我国明朝数学家程大位写过一本数学著作《直指算法统宗》，其中有一道与荡秋千有关的数学问题是使用《西江月》词牌写的：

平地秋千未起，踏板一尺离地.
送行二步与人齐，五尺人高曾记.
仕女佳人争蹴，终朝笑语欢嬉.
良工高士素好奇，算出索长有几？

（第 17 题）

词写得很优美，翻译成现代汉语的大意是：

有一架秋千，当它静止时，踏板离地 1 尺，将它往前推进 10 尺（5 尺为一步），秋千的踏板就和某人一样高，这个人的身高为 5 尺，如果秋千的绳索拉得很直，试问它有多长？

综合与实践

高度的测量

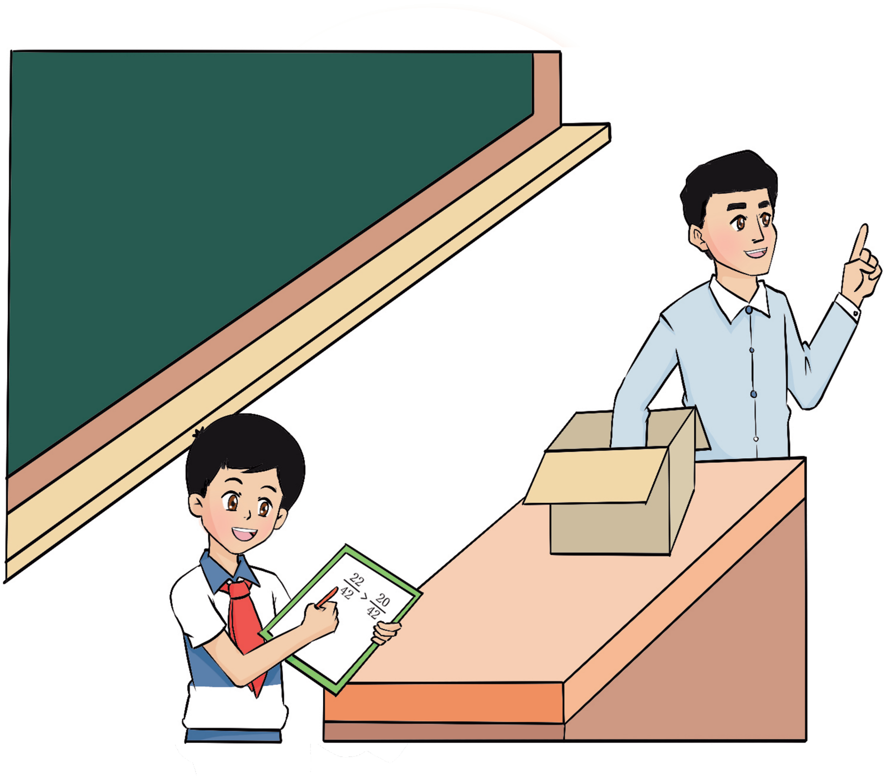
通过本章的学习，我们知道：物体的高度既可以利用相似三角形进行间接测量，也可以通过解直角三角形进行间接测量. 利用相似三角形进行间接测量时，我们可以通过按一定的相似比画相似三角形的方法构造出两个相似三角形，从而利用相似三角形的性质得到问题的答案；如果阳光明媚，则可以通过测量影子长度的方法间接求出待测物体的高度. 如果利用解直角三角形的方法进行间接测量，有时则需要除了刻度尺以外的一些特殊的测量工具，如角度测量仪等.

要正确得到测量结果，往往需要几个人一起合作才能完成. 现在请你在校园内选定某一个物体（如教学楼、旗杆、大树等），与你的同学一起讨论如何测量其高度，并确定如下问题：

1. 可以用什么测量方法？
2. 每种方法要用到哪些工具？
3. 应测量得到哪些有关的数据？
4. 如何计算最后的结果？

写出你们的计划，再实际做一做，看看最后的结果如何. 与其他小组比较一下，看谁的效果较好.

第25章　随机事件的概率



班级联欢会上举行抽奖活动：把写有每位同学名字的小纸条投入抽奖箱，其中男生22名，女生20名．老师从搅匀的小纸条中抽出 1 张，恰好抽到男同学名字的概率大，还是抽到女同学名字的概率大？

本章我们将学习如何通过重复试验与理论分析这两种方法，求随机事件发生的概率.

25.1 在重复试验中观察不确定现象

在“投掷正方体骰子”的游戏中，“掷得的点数小于7”这件事是必然发生的，每次都发生；“掷得的点数是7”这件事是不可能发生的，无论掷多少次，“点数7”都不会出现.

我们称那些无需通过试验就能够预先确定它们在每次试验中都一定会发生的事件为**必然事件**(certain event)，称那些在每次试验中都一定不会发生的事件为**不可能事件**(impossible event)，这两种事件在试验中是否发生都是我们能够预先确定的，所以统称为**确定事件**.

确定事件包括必然发生的事件和不可能发生的事件.

“可能”发生是指在相同的试验条件下有时会发生，有时不会发生，比如，“掷得的点数是2”就是可能发生的事件，它发生的机会在6万次中约有1万次；“掷得的点数是奇数”也是可能发生的事件，它发生的机会在6万次中约有3万次. 像这样无法预先确定在一次试验中会不会发生的事件，我们称它们为**随机事件**(random event).

随机事件是可能发生的事件.

做一做

准备三张大小一样的纸片，上面印有不同的图案(如照片、明信片、自己画的图片等)，把每张纸片都对折，剪成大小一样的两张(如图所示). 将这六张小纸片有图案的一面朝下，然后混合，让你的同伴随机抽出两张小纸片. 你认为抽出的那两张小纸片正好能成功拼成原图的机会大吗？猜一猜，大概平均几次里会有一次成功呢？

和你的同伴交流一下试验结果，看看大多数同学在20次尝试中成功了几次，你和你的同伴可能会有所发现.(在尝试之前请先设计一张数据记录表)

思考

在这个情境中，请你再举出随机事件两例.

在这个游戏中，你关注的是哪一个随机事件？在总的试验次数中，你观察到它成功的次数多还是失败的次数多？成功的机会是 50% 吗？你觉得这个观察结果合乎情理吗？

练　习

1. 下列事件中，哪些是必然事件？哪些是不可能事件？哪些是随机事件？为什么？
   (1) 打开电视机，它正在播广告；
   (2) 抛掷 10 枚硬币，结果是 3 个正面朝上与 8 个反面朝上；
   (3) 黑暗中，我从我的一大串钥匙中随便选中一把，用它打开了门；
   (4) 投掷一枚普通的正方体骰子，掷得的数不是奇数便是偶数；
   (5) 我将一粒种子埋在土里，给它阳光和水分，它会长出小苗.
2. 现实生活中，为了强调某件事是一定会发生的，我们可能会夸张地说“它百分之两百会发生”. 在数学里，有没有“发生的机会是百分之两百”这种说法？
3. 投掷一枚普通的正方体骰子，你同意以下说法吗？请说明理由：
   (1) “掷得的数是奇数”是不可能发生的，因为骰子上不全是奇数，还有偶数；
   (2) “掷得的数是奇数”是必然发生的，因为骰子上有奇数；
   (3) “掷得的数不会超过 7”是可能发生的，因为骰子上的数没有超过 7 的.

随机事件是否发生，没有人能够预测，这就叫做“随机性”，但是会不会在捉摸不定的背后，隐藏着某种规律呢？比如做拼图片活动时，全班同学基本上是成功少，失败多.

规律是指事物发展过程中的本质联系和必然趋势.

历史上一些著名的科学家已经认识到,在重复试验中观察不确定现象,可以发现它们隐含的规律. 表 25.1.1 记录了历史上抛掷硬币试验的若干结果.

出现正面的频率在 0.5 左右波动!

表 25.1.1　历史上抛掷硬币试验的若干结果

研　究　者	抛掷硬币次数(n)	出现正面次数(m)	出现正面频率($\frac{m}{n}$)
德・摩根(De Morgan)	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
费勒(Feller)	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊(Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

一位同学将自己在抛掷硬币时获得的数据填入了表 25.1.2,并绘制了如图 25.1.1 所示的折线图.

表 25.1.2　“出现正面”的频数、频率统计表

抛掷次数	50	100	150	200	250	300	350	400
出现正面的频数	26	53	72	94	116	142	169	193
出现正面的频率	52.0%	53.0%	48.0%	47.0%	46.4%	47.3%	48.3%	48.3%

抛掷次数	450	500	550	600	650	700	750	800
出现正面的频数	218	242	269	294	321	343	369	395
出现正面的频率	48.4%	48.4%	48.9%	49.0%	49.4%	49.0%	49.2%	49.4%

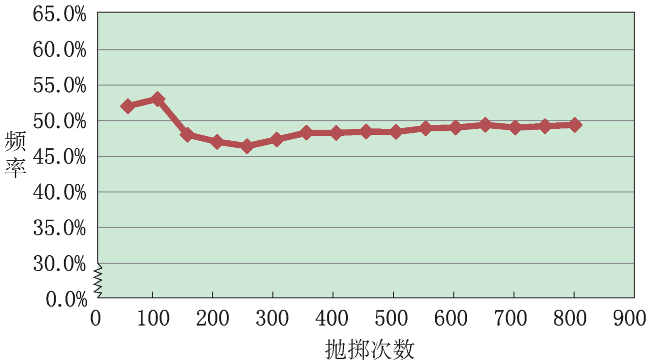


图 25.1.1　“出现正面”的频率随抛掷次数变化趋势图

你看到了什么？重新抛掷 800 次也能看到类似的情况吗？

思考

图 25.1.1 显示，当试验次数比较多的时候，“出现正面”的频率波动明显减小，表现为“风平浪静”，且“出现正面”的频率在 0.5 附近波动！

如果换成其他试验，是否也能发现类似的规律呢？

试验

与你的同伴合作，做一做抛掷两枚硬币的游戏，看看当抛掷次数很多以后，“出现两个正面”和“出现一正一反”这两个随机事件的频率是否也会变得稳定．游戏开始之前，全班先统一一下抛掷硬币的方法，每人各抛 20 次，一位同学抛的时候，另一位同学协助记录试验结果．汇集其他同学的记录，完成表 25.1.3 和图 25.1.2（建议用不同颜色画两条折线以示区别）．在试验过程中，尽可能地使试验的条件一致．

在硬币还未抛出以前，你能否预测每次抛出的结果？假如你已经抛掷了 1 000 次，你能否预测第 1 001 次抛掷的结果？

表 25.1.3　两个随机事件的频数、频率统计表

抛掷次数	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
出现两个正面的频数										
出现一正一反的频数										
出现两个正面的频率										
出现一正一反的频率										

抛掷次数	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400
出现两个正面的频数										
出现一正一反的频数										
出现两个正面的频率										
出现一正一反的频率										

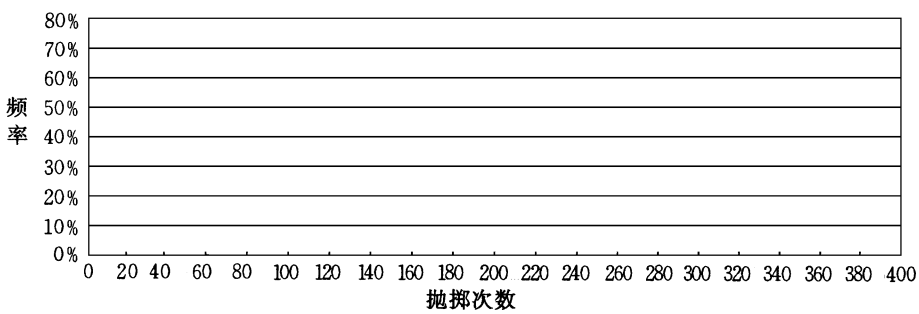


图 25.1.2　“出现两个正面”和“出现一正一反”的频率随抛掷次数变化趋势图

思考

1. 在试验中,“出现两个正面”的频率稳定在____%附近,“出现一正一反”的频率稳定在____%附近.

2. 如果将试验中的硬币换成瓶盖,你觉得频率也会逐渐稳定吗?如果是,那么稳定的数值会和第1问中的一致吗?

用试验检验你的猜想.

概括

在前面的试验中,我们可以发现,虽然每次试验的结果是随机的,无法预测,但随着试验次数的增加,隐含的规律逐渐显现,事件发生的频率会稳定到某一个数值附近. 正因为随机现象发生的频率有这样趋于稳定的特点,所以我们就可以用频率估计随机事件在每次试验时发生的机会的大小.

读一读

由此,我们可以体会到:开展重复试验活动(如同时抛掷两枚硬币)时,虽然每次收集到的数据(如出现哪两个面)可能会是不同的,但通过大量的重复试验,就可能从中发现规律(如出现两个正面的频率稳定在25%附近).

我们可以借助数据分析,认识随机事件发生的规律.

练　习

1. 下面是两位同学对抛掷硬币问题的不同说法，你认为有道理吗？为什么？

（1）抛掷一枚质量分布均匀的硬币，是“正”是“反”无法预测，全凭运气．因此，抛掷 1 000 次的话也许只有 200 次“正”，也许会有 700 次“正”，没有什么规律；

（2）抛掷一枚质量分布均匀的硬币，“出现正面”和“出现反面”的机会均等．因此，抛掷 1 000 次的话，一定会有 500 次“正”，500 次“反”．

2. 某彩票的中奖机会是 1%，买 1 张一定不会中奖吗？买 100 张一定会中奖吗？谈谈你的看法．

3. 收集第 126 页中拼图片的试验数据，检验恰好拼成原图的频率是否随试验次数的增加而趋于稳定．

习题 25.1

1. 某校九年级(1)班 40 位同学每 10 人一组，每人做 10 次抛掷两枚硬币的试验，想看看“出现两个正面”的频率是否会逐渐稳定下来，得到了下面 40 个试验结果．

第一组同学的学号	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
出现两个正面的次数	1	2	3	3	3	3	3	6	3	3
第二组同学的学号	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
出现两个正面的次数	1	1	3	2	3	4	2	3	3	3
第三组同学的学号	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
出现两个正面的次数	1	0	3	1	3	3	3	2	2	2
第四组同学的学号	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
出现两个正面的次数	2	2	1	4	2	4	3	2	3	3

（1）学号为 113 的同学在 10 次试验中，“出现两个正面”成功了几次？成功率是多少？他是他所在小组同学中成功率最高的人吗？

（2）学号为 116 和 136 的两位同学在 10 次试验中的成功率一样吗？如果他们两人再分别做 10 次试验，成功率还会出现类似的情况吗？

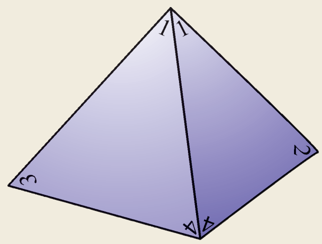
（3）如何计算一组同学的成功率？哪一组的成功率最高？

（4）累计所有同学的试验结果，完成下面的数据统计表，如果把这张表画成相应的折线图，你会看到什么？

抛掷次数	50	100	150	200	250	300	350	400
出现两个正面的频数								
出现两个正面的频率								

2. 如图所示是一枚正四面体的骰子，其四个顶点上分别标注了数字 1、2、3、4，骰子落地时朝上顶点所标注的数字表示投掷骰子所得的点数. 以下是投掷这枚骰子 200 次所得点数的记录（5 个数据为一组）：

12314，13231，32211，34223，12123，
24143，23211，13141，32324，43314，
34442，34112，11424，21123，22244，
32342，14434，33433，22141，21441，
33311，21421，31221，32244，44344，
41434，14231，24231，11124，41342，
22431，23442，33414，13114，12312，
11322，41123，42324，31144，11131.



（第 2 题）

（1）将数据整理后填入下表.

投掷次数	1	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
出现 1 点的频数												
出现 1 点的频率												
投掷次数	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
出现 1 点的频数												
出现 1 点的频率												

（2）根据表中所填数据绘制“出现 1 点的频率”随投掷次数变化趋势折线图.

（3）投掷 5 次和投掷 10 次后所得频率的差是多少？30 次和 40 次之间、90 次和 100 次之间、190 次和 200 次之间呢？从中你发现了什么规律？

（4）仿照上面的方法对其他点数出现的频率进行观察，你又发现了什么？

（5）你能根据以上数据对某一点数出现的机会大小进行估计吗？

3. 一副没有大小王的扑克，共 52 张，抽出一张恰为黑桃的机会有多大？你能预测吗？请用重复试验的方法检验你的猜想.

阅读材料

计算机帮我们画趋势图

在前面的活动中，我们常常要根据试验次数和某事件出现的频数计算该事件出现的频率，并绘制折线图. 当试验次数很多时，计算频率和手工绘图都相当繁琐. 此时，就可以请计算机来帮忙.

打开 Excel，并输入试验次数和某事件出现的频数（图 1）. 现在我们需要将“B3 单元格中的数据”除以“B2 单元格中的数据”所得的商填入 B4 单元格中. 先选中 B4 单元格，在对话框中输入“＝”；再单击 B3 单元格，键入“/”，单击 B2 单元格；最后按回车键，计算结果就出现在 B4 单元格中了（图 2）.

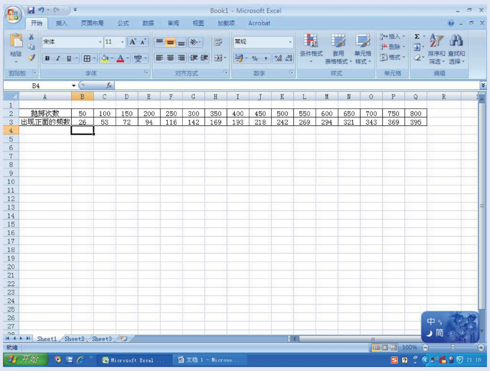


图 1

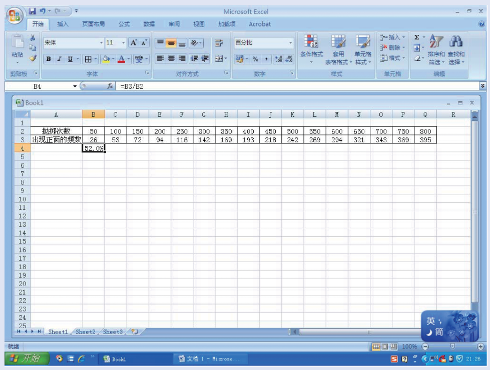


图 2

接下来就无需在每次计算时输入公式了，只需将鼠标指针指向 B4 单元格的右下角，其形状将变成黑色十字（＋），按住鼠标左键向右拖拽至 Q4，松开鼠标后，在选中的单元格中将出现我们希望得到的计算结果.

我们已经知道，选中数据，利用“图表向导”就能绘制统计图，但是如果你接下去选择了“折线图”，却往往得不到想要的统计图. 这是为什么呢？

因为在这个软件中，“折线图”的横坐标通常是事先按 1，2，3，…均匀地设定好的. 当我们想根据需要的横坐标、纵坐标画出相应的折线图时，可以在图表类型中选择“散点图”（图 3、图 4）.

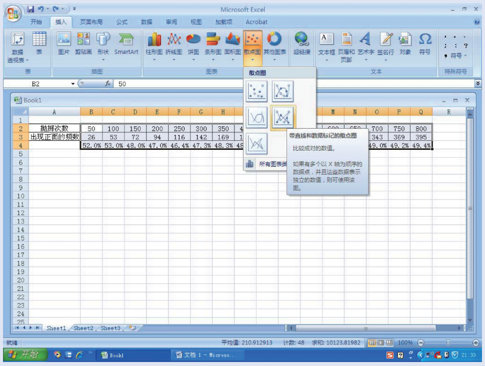


图 3

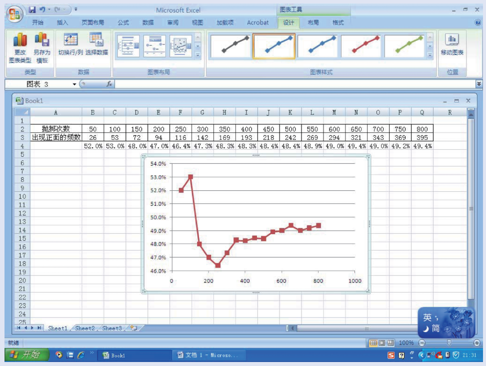


图 4

尝试一下,相信你会不断地发现计算机带给我们的便利.

搅匀对保证公平很重要

据高等教育出版社和施普林格出版社联合出版的《统计学》一书介绍,在越南战争中,美国政府为了准备足够的兵源,制定了一个“抓阄”的征兵计划. 该计划是将一年中的每一天按时间顺序编为 1～366 号,准备 366 个乒乓球,在每个乒乓球上标一个号码,代表一年中的一天.

抓阄的时候,工作人员将这些乒乓球全部倒入一个大箱子中. 从中随机取出第一个乒乓球,假设它是 30 号球,那么它代表 1 月 30 日,于是,所有年满 18 岁、生日是 1 月 30 日的合格青年都将成为第一批被征召的军人. 然后,再从大盒子中随机取出第二个乒乓球,所有年满 18 岁且生日与这个乒乓球所示号码吻合的合格青年都将成为第二批应征的军人. 依此规则,继续下去.

这种抓阄的方法按理说应该对每个人都公平,但是,当第二天公布了所有抓阄出来的号码时,统计学家对抓阄的公平性提出了质疑. 因为他们发现有 73 个号码位于上半年,有 110 个号码位于下半年,和大家期待的“大致各占一半”相距甚远!

虽然抓阄出来的结果是随机事件,可能不是上半年的号码和下半年的号码恰好各占一半,会有一些差异,但是,统计学家的计算表明“73 对 110”这样的差异实在太大了,有理由怀疑这次抓阄征兵过程的公平性. 后来才发现,原来这种不公平是由于在每次抓阄之前没有充分地将乒乓球搅匀造成的.

25.2 随机事件的概率

1. 概率及其意义

我们知道，抛掷一枚普通硬币仅有两种可能的结果："出现正面"或"出现反面"．还发现，当抛掷次数很多时，"出现正面"（或"出现反面"）的频率会逐渐稳定在 0.5 这个数值附近．实际上，因为硬币质地均匀，所以这两种结果发生的可能性相等，各占 50% 的机会．

一个事件发生的可能性就叫做该事件的**概率**（probability）．例如，抛掷一枚硬币，"出现反面"的概率为$\frac{1}{2}$，可记为 P(出现反面) $=\frac{1}{2}$．

在上一节的学习中，我们观察到大数次重复试验后，随机事件发生的频率会随试验次数增加而呈现出稳定的趋势，因此人们通常用频率来估计概率．这样做的优点是能够用很直观的方法解决许多我们目前还不会计算的概率问题，如拼图片问题．让我们一起回顾已经做过的几个游戏及其试验结果，并完成表 25.2.1．

表 25.2.1　做过的几个游戏及其试验结果

游　戏	关注的结果	频率稳定值	所有机会均等的结果	关注的结果发生的概率
抛掷一枚硬币	出现正面	0.5 左右	出现正面；出现反面	$\frac{1}{2}$
投掷一枚正四面体骰子	掷得"4"	0.25 左右	掷得数字："1"；"2"；"3"；"4"	$\frac{1}{4}$
投掷一枚正方体骰子	掷得"6"	0.17 左右		
从一副没有大小王的扑克牌中随机地抽一张	抽得黑桃	0.25 左右		

我们发现,原来这几个动手试验观察到的频率稳定值也可以开动脑筋分析出来,当然,最关键的有两点:

(1) 要清楚我们关注的是哪个或哪些结果;

(2) 要清楚所有机会均等的结果.

(1)、(2)两种结果的个数之比就是所关注的结果发生的概率,如在投掷一枚正方体骰子的游戏中,

$$P(\text{掷得“6”}) = \frac{1}{6}.$$

问题 1

掷得“6”的概率等于$\frac{1}{6}$表示什么意思?

有同学说:正方体骰子质地均匀,出现各面的结果是等可能的,而“6”是其中一面,所以出现“6”的概率是$\frac{1}{6}$.

也有同学说:它表示每 6 次就有 1 次掷得“6”.

你同意这些说法吗?

试一试

请你再做投掷正方体骰子的游戏,一旦掷得“6”,就算完成了 1 次试验,然后数一数你是投掷了几次才掷得“6”的. 重复这一试验,看看能否发现什么.

小明的试验结果如表 25.2.2 所示,在 10 次试验中,有时很迟才掷得“6”,有时很早就掷得“6”,平均一下的话,每 5.4 次掷得 1 次“6”. 你是平均几次掷得 1 次“6”的?

表 25.2.2　平均投掷骰子几次掷得 1 次“6”

试　验	每次掷得的点数															投掷次数
第 1 次试验	4	3	4	5	3	1	5	2	1	2	2	4	5	3	6	15 次
第 2 次试验	4	6														2 次
第 3 次试验	2	5	2	5	5	4	5	4	1	6						10 次
第 4 次试验	2	4	6													3 次
第 5 次试验	5	3	5	5	4	6										6 次
第 6 次试验	5	6														2 次
第 7 次试验	5	1	2	3	1	1	6									7 次
第 8 次试验	2	6														2 次
第 9 次试验	5	6														2 次
第 10 次试验	5	5	2	5	6											5 次
10 次试验的平均值	$(15+2+10+3+6+2+7+2+2+5)\div 10 = 5.4$															

从试验结果看，掷得“6”的概率等于$\frac{1}{6}$应该表示：如果掷很多很多次的话，那么平均每 6 次有 1 次掷得“6”.

思考

1. 已知掷得“6”的概率等于$\frac{1}{6}$，那么掷得的点数不是“6”（也就是 1～5）的概率等于多少呢？这个概率值又表示什么意思？

2. 我们知道，掷得“6”的概率等于$\frac{1}{6}$也表示：如果重复投掷骰子很多很多次的话，那么试验中掷得“6”的频率会逐渐稳定在$\frac{1}{6}$附近. 这与“平均每 6 次有 1 次掷得‘6’”一致吗？

练　习

一枚质地均匀的正八面体骰子的八个面上分别标有数字1、2、3、4、5、6、7、8. 投掷这枚骰子，以朝上一面所标的数字为掷得的结果.

(1) 掷得“7”的概率等于多少？这个数值表示什么意思？

(2) 掷得的数不是“7”的概率等于多少？这个数值表示什么意思？

(3) 掷得的数小于或等于“6”的概率等于多少？这个数值表示什么意思？

由此，我们可以看到，通过大数次重复试验，可以用观察到的频率来估计概率，但其估计值必须在试验之后才能得到，无法预测. 前面我们曾运用分析的方法得到过一些随机事件的概率，下面我们继续学习如何运用分析的方法在较为简单的问题情境下预测概率.

例 1 班级里有 20 位女同学和 22 位男同学，班上每位同学的名字都被分别写在一张小纸条上，放入一个盒中搅匀. 如果老师随机地从盒中取出 1 张纸条，那么抽到男同学名字的概率大还是抽到女同学名字的概率大？

分析 全班 42 位同学的名字被抽到的机会是均等的，因此所有机会均等的结果有 42 个，其中我们关注的结果“抽到男同学的名字”有 22 个，“抽到女同学的名字”有 20 个.

解 $P(\text{抽到男同学的名字}) = \dfrac{22}{20+22} = \dfrac{11}{21}$,

$P(\text{抽到女同学的名字}) = \dfrac{20}{20+22} = \dfrac{10}{21}$.

因为 $\dfrac{11}{21} > \dfrac{10}{21}$,

所以抽到男同学名字的概率大.

思考

1. 抽到男同学名字的概率是$\frac{11}{21}$表示什么意思？

2. P(抽到女同学的名字) + P(抽到男同学的名字) = 100% 吗？如果改变男女同学的人数，这个关系还成立吗？

3. 下面两种说法你同意吗？如果不同意，想一想可以采用哪些办法来说服这些同学：

(1) 有同学说：抽到男同学名字的概率应该是$\frac{1}{2}$，因为"抽到男同学的名字"与"抽到女同学的名字"这两个结果都有可能发生；

(2) 有同学说：虽然抽到男同学名字的概率略大，但是，只抽一张纸条的话，概率实际上还是一样大的.

将 P(取出黑球)与 P(取出红球)相加，你发现什么？想一想，这是为什么？

"取出红球"的概率还可以怎样计算？

例 2 一个布袋中放着 8 个红球和 16 个黑球，这两种球除了颜色以外没有任何其他区别. 布袋中的球已经搅匀. 从布袋中任取 1 个球，取出黑球与取出红球的概率分别是多少？

解 $P(\text{取出黑球}) = \frac{16}{8+16} = \frac{2}{3}$，

$P(\text{取出红球}) = \frac{8}{8+16} = \frac{1}{3}$，

所以，取出黑球的概率是$\frac{2}{3}$，取出红球的概率是$\frac{1}{3}$.

例 3 甲袋中放着 22 个红球和 8 个黑球，乙袋中放着 200 个红球、80 个黑球和 10 个白球. 三种球除了颜色以外没有任何其他区别. 两袋中的球都已经各自搅匀. 从袋中任取 1 个球，如果你想取出 1 个黑球，选哪个袋成功的机会大呢？

思考

小明认为选甲袋好，因为里面的球比较少，容易取到

黑球；小红认为选乙袋好，因为里面的球比较多，成功的机会也比较大；小丽则认为都一样，因为只摸 1 次，谁也无法预测会取出什么颜色的球.

你觉得他们说得有道理吗？

解 在甲袋中，P(取出黑球) $=\dfrac{8}{22+8}=\dfrac{4}{15}$，

在乙袋中，P(取出黑球) $=\dfrac{80}{200+80+10}=\dfrac{8}{29}$.

因为 $$\frac{8}{29}>\frac{4}{15},$$

所以，选乙袋成功的机会大.

练　习

袋中装有大小相同的 3 个绿球、3 个黑球和 6 个蓝球，从袋中任意摸出 1 个球，分别求以下各个事件发生的概率：

（1）摸出的球的颜色为绿色；

（2）摸出的球的颜色为白色；

（3）摸出的球的颜色为蓝色；

（4）摸出的球的颜色为黑色；

（5）摸出的球的颜色为黑色或绿色；

（6）摸出的球的颜色为蓝色、黑色或绿色.

2. 频率与概率

问题 2

在第 129 页的重复试验中，我们发现：抛掷两枚硬币，“出现两个正面”的频率稳定在 25% 附近. 怎样运用理论分析的方法求抛掷两枚硬币时出现两个正面的概率呢？

分析 从表 25.2.3 和图 25.2.1 中可以看出，抛掷两枚硬币共有 4 个机会均等的结果："出现两正"、"出现两反"、"出现一正一反"、"出现一反一正"，因此

$$P(\text{出现两个正面}) = \frac{1}{4}.$$

表 25.2.3

硬币 2 \ 硬币 1	正	反
正	正正	反正
反	正反	反反

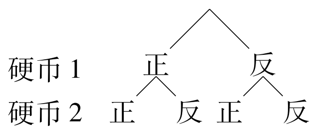
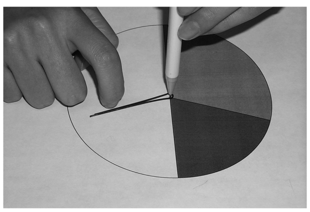


图 25.2.1

由此，我们可以看到：理论分析与重复试验得到的结论是一致的.

在图 25.2.1 中，从上至下每条路径就是一个可能的结果，我们把它称为**树状图**(tree diagram).



(自制转盘所需材料：发夹、笔、转盘面)

问题 3

用力旋转图 25.2.2 所示的转盘甲和转盘乙的指针，如果想让指针停在蓝色区域，那么选哪个转盘成功的概率比较大？

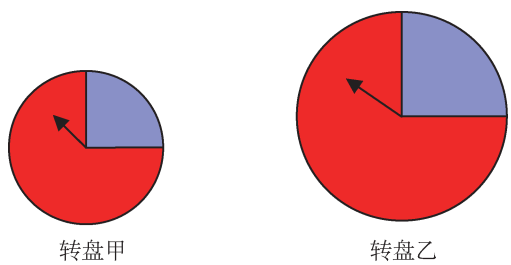


图 25.2.2

思考

1. 有同学说：转盘乙大，相应地，蓝色区域的面积也大，所以选转盘乙成功的概率比较大. 你同意吗？

2. 还有同学说：每个转盘只有两种颜色，指针不是停在红色区域就是停在蓝色区域，成功的概率都是50%，所以随便选哪个转盘都可以. 你同意吗？

如果随着试验次数的增加，两个转盘的指针停在蓝色区域的频率都逐渐稳定下来，那么就容易选择了.

请你和同学一起做重复试验，并将结果填入表25.2.4，在图25.2.3中用不同颜色的笔分别画出相应的两条折线.

表25.2.4　两个转盘指针停在蓝色区域的频数、频率统计表

旋转次数	50	100	150	200	250	300	350	400	450
小转盘指针停在蓝色区域的频数									
大转盘指针停在蓝色区域的频数									
小转盘指针停在蓝色区域的频率									
大转盘指针停在蓝色区域的频率									

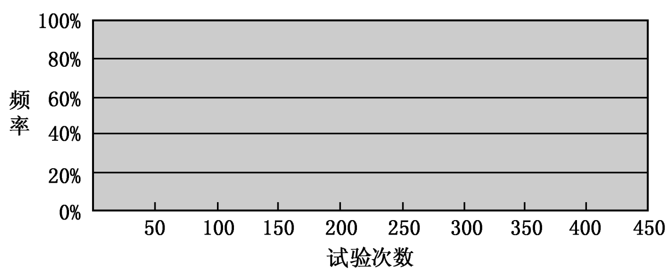


图25.2.3　两个转盘指针停在蓝色区域的频率随试验次数变化趋势图

分析 观察两个转盘,我们可以发现:转盘甲中的蓝色区域所对的圆心角为 90°,说明它占整个转盘的四分之一;转盘乙尽管大一些,但蓝色区域所对的圆心角仍为 90°,说明它还是占整个转盘的四分之一. 你能预测指针停在蓝色区域的概率吗?

结合重复试验与理论分析的结果,我们发现

P(小转盘指针停在蓝色区域) = ________,

P(大转盘指针停在蓝色区域) = ________.

思考

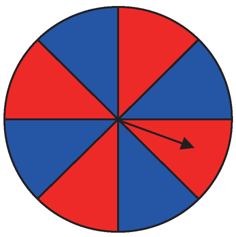


图 25.2.4

1. 从重复试验结果中你得出了哪些结论?

2. 如果不做试验,你能预言图 25.2.4 所示的转盘指针停在红色区域的概率吗?

对于这些问题,既可以通过分析用计算的方法预测概率,也可以通过重复试验用频率来估计概率.

下面让我们看另一类问题.

问题 4

将一枚图钉随意向上抛起,求图钉落定后钉尖触地的概率.

分析 虽然一枚图钉被抛起后落定的结果只有两种:"钉尖朝上"或"钉尖触地",但由于图钉的形状比较特殊,我们无法用分析的方法预测 P(钉尖朝上)与 P(钉尖触地)的数值. 因此,只能让重复试验来帮忙.

通过小组合作,分别记录抛掷 40 次、80 次、120 次、160 次、200 次、240 次、280 次、320 次、360 次、400 次、440 次、480 次后出现钉尖触地的频数和频率,列出统计表,绘制折线图.

请根据你们小组的试验结果估计一下钉尖触地的概率是多少？和同学进行交流，看看不同小组得出的结果是否很接近？为什么？

把几个小组的结果合起来，会怎么样呢？

思考

如果你和同伴使用的图钉形状分别是如图25.2.5所示的两种，那么这两种图钉钉尖触地的概率相同吗？能把你们两个人的试验数据合起来进行统计吗？

图 25.2.5

从上面的问题可以看出：

1. 通过重复试验用频率估计概率，必须**要求试验是在相同条件下进行的**，比如，以同样的方式抛掷同一种图钉；

2. 在相同条件下，试验次数越多，就越有可能得到较好的估计值，但不同小组试验所得的估计值也并不一定相同.

那么，总共要做多少次试验才能认为得出的结果比较可靠呢？

这与你试验的结果相同吗？为什么？

表25.2.5和图25.2.6是某班同学在抛掷某种图钉的重复试验后展示的统计表和折线图.

表 25.2.5　钉尖触地的频数、频率表

抛图钉的次数	40	80	120	160	200	240	280	320	360
频　　数	20	37	50	69	88	105	125	146	163
频　　率	50.0%	46.3%	41.7%	43.1%	44.0%	43.8%	44.6%	45.6%	45.3%
抛图钉的次数	400	440	480	520	560	600	640	680	720
频　　数	183	196	219	228	248	269	285	305	328
频　　率	45.8%	44.5%	45.6%	43.8%	44.3%	44.8%	44.5%	44.9%	45.6%
抛图钉的次数	760	800	840	880	920	960	1 000	1 040	
频　　数	347	366	383	401	421	445	463	481	
频　　率	45.7%	45.8%	45.6%	45.6%	45.8%	46.4%	46.3%	46.3%	

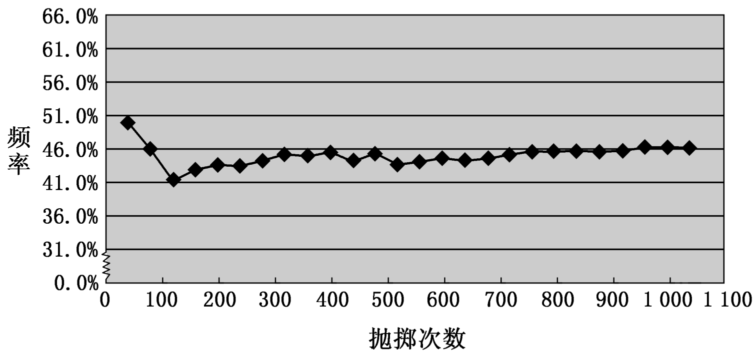


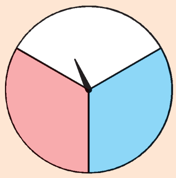
图 25.2.6　钉尖触地的频率随抛掷次数变化趋势图

可以看出，当试验进行到 720 次以后，所得频率值就在 46% 上下浮动，且浮动的幅度不超过 0.5%，我们可以取 46% 作为这个事件发生概率的估计值，即 P(钉尖触地)≈46%. 当我们只需粗略地知道该事件发生的概率时，就可以在试验 200 次后，得到“概率大约是百分之四十几”的粗略估计.

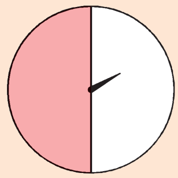
为了节省时间，我们可以把小组内 10 个成员的试验数据累加起来，每人做 50 次，一共做了 500 次，频率就已经比较稳定了.

练　习

用力旋转如图所示的转盘甲和转盘乙的指针，试用理论分析和重复试验这两种方法，求两个指针都停在白色区域的概率.



转盘甲



转盘乙

阅读材料

电脑键盘上的字母为何不按字母顺序排列

电脑在今天已走进了千家万户，大大提高了人们学习与工作的效率. 当你的指尖敲打着电脑键盘的时候，不知是否想过：键盘上的字母为什么不按字母顺序排列？

我们不妨一起来做一项统计：先选取一篇文章(比如附文)，然后统计所用的字母总数、每个字母出现的频数及频率(见统计附表)，可以发现电脑键盘上灵活手指管辖的区域中字母出现的频率一般较高，这样就体现出了不按字母顺序排列的优越性.

有兴趣的话，你不妨尝试一下，多选几篇类型不同的文章，看看是否有新的发现？

我们的经验是：重复试验次数越多，就越有可能得到与概率真实值更接近的估计值. 这里也一样，多选一些文章试试吧.

附文：

An old man died and left his son a lot of money. But the son was a foolish young man, and he quickly spent all the money, so that soon he had nothing left. Of course, when that happened, all his friends left him. When he was quite poor and alone, he went to see Nasreddin, who was a kind, clever old man and often helped people when they had troubles. "My money has finished and my friends have gone," said the young man. "What will happen to me now?" "Don't worry, young man," answered Nasreddin. "Everything will soon be all right again. Wait, and you will soon feel much happier." The young man was very glad. "Am I going to get rich again then?" he asked Nasreddin. "No, I didn't mean that," said the old man. "I meant that you would soon get used to being poor and to having no friends."

统计附表：

字母总数	597													
食指管辖的字母	左	R	T	F	G	V	B	右	Y	U	H	J	N	M
出现频数		19	40	12	17	5	4		16	14	40	0	66	18
出现频率		3.2%	6.7%	2.0%	2.8%	0.8%	0.7%		2.7%	2.3%	6.7%	0%	11.1%	3.0%
中指管辖的字母	左	E	D	C				右	I	K				
出现频数		66	37	5					36	3				
出现频率		11.1%	6.2%	0.8%					6.0%	0.5%				
无名指管辖的字母	左	W	S	X				右	O	L				
出现频数		18	31	0					52	29				
出现频率		3.0%	5.2%	0%					8.7%	4.9%				
小指管辖的字母	左	Q	A	Z				右	P					
出现频数		2	55	0					12					
出现频率		0.3%	9.2%	0%					2.0%					

3. 列举所有机会均等的结果

例 4 抛掷一枚普通硬币 3 次. 有人说“连续掷出三个正面”和“先掷出两个正面，再掷出一个反面”的概率是一样的. 你同意吗？

分析 对于第 1 次抛掷，可能出现的结果是正面或反面；对于第 2、3 次抛掷来说也是这样. 而且每次硬币出现正面或反面的概率都相等. 由此，我们可以画出树状图，如图 25. 2. 7 所示.

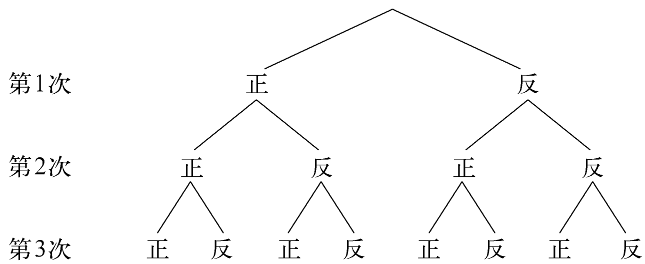


图 25. 2. 7

在图 25. 2. 7 中，从上至下每一条路径就是一种可能的结果，而且每种结果发生的概率相等.

解 抛掷一枚普通硬币 3 次，共有以下 8 种机会均等的结果：

正正正，正正反，正反正，正反反，
反正正，反正反，反反正，反反反.

$$P(\text{正正正}) = P(\text{正正反}) = \frac{1}{8},$$

所以，例题中的说法正确.

“先两个正面，再一个反面”就是“两个正面，一个反面”吗？

该树状图从上到下，列举了所有机会均等的结果，可以帮助我们分析问题，而且可以避免重复和遗漏，既直观又条理分明.

思考

有的同学认为：抛掷三枚普通硬币，硬币落地后只可能出现 4 种结果：

（1）全是正面；　　　　（2）两正一反；

（3）两反一正；　　　　（4）全是反面.

因此这四个事件出现的概率相等. 你同意这种说法吗？为什么？

本章最后一个阅读材料介绍了如何用计算器进行模拟试验，有兴趣的话也可以试一试.

问题 5

口袋中装有 1 个红球和 2 个白球，搅匀后从中摸出 1 个球，放回搅匀，再摸出第 2 个球，两次摸球就可能出现 3 种结果：

（1）都是红球；（2）都是白球；（3）一红一白.

这三个事件发生的概率相等吗？

思考

一位同学画出如图 25.2.8 所示的树状图.

摸出红球与摸出白球的概率相等吗？

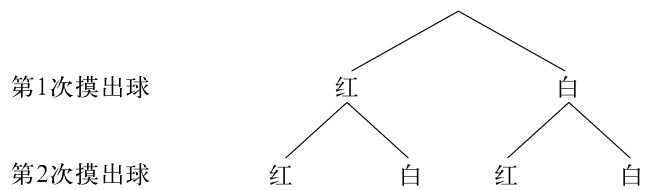


图 25.2.8

从而得到，“摸出两个红球”和“摸出两个白球”的概率相等，“摸出一红一白”的概率最大.

他的分析有道理吗？为什么？

分析 把两个白球分别记作白$_1$和白$_2$. 如图 25.2.9，用画树状图的方法看看有哪些等可能的结果：

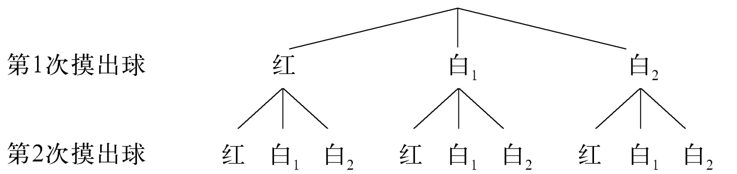


图 25.2.9

从中可以看出，一共有 9 种等可能的结果. 在“摸出两红”、“摸出两白”、“摸出一红一白”这三个事件中，“摸出________”的概率最小，等于________，“摸出________”和“摸出________”的概率相等，都是________.

问题 6

投掷两枚普通的正方体骰子，掷得的点数之积有多少种可能？点数之积为多少的概率最大，其概率是多少？

我们用表 25.2.6 来列举所有可能得到的点数之积.

> 这一问题的树状图不如列表的结果简明.

表 25.2.6　可能得到的点数之积情况

积 第 1 枚 / 第 2 枚	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

表中每个单元格里的乘积出现的概率相等，从中可以看出积为________的概率最大，其概率等于________.

问题 7

“石头、剪刀、布”是一个广为流传的游戏，游戏时，甲乙双方每次做“石头”、“剪刀”、“布”三种手势中的一种，规定：“石头”胜“剪刀”，“剪刀”胜“布”，“布”胜“石头”，同种手势不分胜负.

假定甲乙两人每次都是等可能地做这三种手势，那么一次比赛时两人做同种手势（即不分胜负）的概率是多少？

分析 如图 25.2.10，画出树状图：

甲	乙	结　果
石头	石头	（石头，石头）
	剪刀	（石头，剪刀）
	布	（石头，布）
剪刀	石头	（剪刀，石头）
	剪刀	（剪刀，剪刀）
	布	（剪刀，布）
布	石头	（布，石头）
	剪刀	（布，剪刀）
	布	（布，布）

图 25.2.10

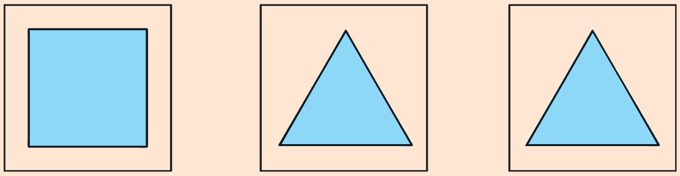
所有机会均等的结果有 9 种，其中的 3 种——（石头，石头）、（剪刀，剪刀）、（布，布）是我们关注的结果，所以 P（同种手势）$=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

试一试

请用列表法分析问题 7，看看所得结论是否一致.

练　习

1. 如图，在完全相同的三张白纸片上分别画出边长相等的正方形和正三角形，然后放在盒子里搅匀，闭上眼睛任取两张，看纸片上的图案能拼成菱形还是能拼成房子. 预测一下拼成房子的概率有多大.



（第 1 题）

2. 同时投掷两枚普通的正四面体骰子，求下列事件的概率：
（1）所得点数之和恰为偶数；
（2）所得点数之和恰为奇数；
（3）所得点数之和恰为质数.

3. 在九九乘法表的 45 个运算结果中随意抽取 1 个，将下列事件的概率从小到大排序：
（1）恰为偶数；
（2）恰为奇数；
（3）小于 10；
（4）大于 100；
（5）个位数是 0；
（6）3 的倍数.

习题 25. 2

1. 你同意以下说法吗？请说明理由：
（1）“从布袋中取出 1 个红球的概率是 99%”，这句话的意思就是：肯定会取出 1 个红球，因为概率已经很大了；
（2）“从布袋中取出 1 个红球的概率是 0”，这句话的意思就是：取出 1 个红球的可能性很小；

（3）布袋中有红、白、黑三种颜色的球，这些球除了颜色以外没有任何其他区别，因为我对取出 1 个红球没有把握，所以我认为从布袋中取出 1 个红球的概率是 50%；

（4）“从布袋中取出 1 个红球的概率只有 0.1%”，这句话的意思就是：一定取不到红球.

2. 班级里有 15 位女同学和 27 位男同学，每位同学的名字都被分别写在一张小纸条上，放入一个盒中搅匀.

（1）如果班长闭上眼睛从盒中任意抽出 1 张纸条，那么每位同学的名字被抽中的概率是多少？男同学名字被抽中的概率是多少？女同学名字被抽中的概率是多少？

（2）如果班长已经抽出了 6 张纸条——写有 2 位女同学名字的纸条和 4 位男同学名字的纸条，他把这 6 张纸条放在桌上，闭上眼睛在盒中余下的纸条中再抽第 7 张纸条，那么这时余下的每位同学的名字被抽中的概率是多少？男同学名字被抽中的概率是多少？女同学名字被抽中的概率是多少？

3. 在一个布袋里装着白、红、黑三种颜色的小球，它们除了颜色以外没有任何其他区别，其中有白球 5 个、红球 3 个、黑球 1 个. 袋中的球已经被搅匀.

（1）闭上眼睛随机地从袋中取出 1 个球，分别求取出的球是白球、红球、黑球的概率；

（2）若取出的第 1 个球是红球，将它放在桌上，闭上眼睛从袋中余下的球中再随机地取出 1 个球，这时，取出白球、红球、黑球的概率分别是多少？

（3）若取出的第 1 个球是黑球，将它放在桌上，闭上眼睛从袋中余下的球中再随机地取出 1 个球，这时，取出白球、红球、黑球的概率又分别是多少？

4. 在分别写有数字 1 到 20 的 20 张小卡片中，随机地抽出 1 张卡片. 试求以下事件发生的概率：

（1）该卡片上的数字是 5 的倍数；

（2）该卡片上的数字不是 5 的倍数；

（3）该卡片上的数字是质数；

（4）该卡片上的数字不是质数.

5. 如果连续抛掷四枚普通硬币，那么所有机会均等的结果有几种？第 1 枚“出现正面”的概率有多大？

6. 有人说：“投掷两枚普通的正方体骰子，掷得两个 6 的概率应是 $\frac{1}{6}$ 的一半，也就是 $\frac{1}{12}$.”请用画树状图或列表的方法说明为什么这一说法是错误的.

7. 取三枚硬币：在第 1 枚的正面贴上红色标签，反面贴上蓝色标签；在第 2 枚的正面贴上蓝色标签，反面贴上黄色标签；在第 3 枚的正面贴上黄色标签，反面贴上红色标签. 同时抛掷这 3 枚硬币，求硬币落地后出现下列颜色的各个事件的概率：

（1）颜色各不相同；（2）两黄一红；（3）都是红色；

（4）两红一蓝；（5）两黄一蓝.

8. 有人在一个不透明的口袋中放入 3 个小球，其中有黑球也有白球，但具体情况不详. 你能通过重复摸球试验（每次搅匀后摸出 1 个，放回后再摸第 2 个，次数可以不限），推断这 3 个小球的颜色吗？说说你的想法，并尝试一下，看看最后的结果是否与你的推断一致.

9. 自制一个转盘，像扇形统计图那样将它的各部分分别涂上不同的颜色. 用理论分析和重复试验这两种方法，求用力旋转指针后指针正好指向你最喜欢的颜色区域的概率.

阅读材料

The Birthday Problem

Ignoring the complication of leap-days there are 365 days on which a birthday can occur. A moment of thought tells us that if there are 366 people in a room then it is certain (probability = 1) that at least one pair of them must share a birthday. If the number of people were reduced to 365 or 364, then while it is not certain that at least one pair share a birthday, our intuition tells us that the probability of this must be very close to 1. If the number of people were reduced further then, clearly, the probability would reduce but would still remain high down to 200 people or so.

Let us now start at the other end with two people in a room. The probability that they have the same birthday is low and is easy to calculate. One way of thinking about it is to consider that one of them tells you his birthday. Then you ask the other one for his birthday. There are 365 possible answers he can give but only one of them will match the birthday given by the first person. Hence the probability of the birthdays being the same is $\frac{1}{365}=1-\frac{364}{365}\approx 0.002\,740$.

If there are three or four people in a room, it is easy to calculate the probability that at least two of them would share a birthday is respectively $1-\frac{365\times364\times363}{365\times365\times365}\approx 0.008\,204$ and $1-\frac{365\times364\times363\times362}{365\times365\times365\times365}\approx 0.016\,356$.

In the following table, we give the probability of having at least two people in a group of n with the same birthday with increasing n. We see that the probability just exceeds 0.5 when 23 individuals are present — a result that most people find surprisingly low.

Table The probability that two or more people have the same birthday with *n* people present.

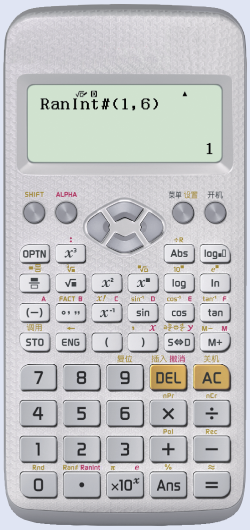
n	Probability	n	Probability	n	Probability
2	0.002 740	3	0.008 204	4	0.016 356
5	0.027 136	6	0.040 462	7	0.056 236
8	0.074 335	9	0.094 624	10	0.116 948
11	0.141 141	12	0.167 025	13	0.194 410
14	0.223 013	15	0.252 901	16	0.283 604
17	0.315 008	18	0.346 911	19	0.379 119
20	0.411 438	21	0.443 688	22	0.475 695
23	0.507 297	24	0.538 344	25	0.568 700

For someone teaching a class of 30 students the probability that two or more will share a birthday is 0.706 316, for 40 students 0.891 232, and for 50 students 0.970 374!

(摘自 M. Woolfson: *Everyday Probability and Statistics*, Imperial College Press,有删改)

模拟试验

之前，我们都是用实物做试验的，如抛硬币、摸小球等等. 其实，当我们理解了做试验的原理，认识到可以用稳定后的频率来估计概率时，也可以“偷懒”一下，借用计算器或计算机产生随机数的功能，模拟实物试验. 比如，对于抛掷硬币的试验，我们可以用随机产生的“0”、“1”来模拟得到“正面”、“反面”的结果；对于投掷一枚正方体骰子的试验，我们可以用随机产生的“1”、“2”、……、“6”来模拟掷得的结果. 模拟试验的最大好处是节省时间，而且容易自动化.



下面以某计算器模拟投掷骰子为例，说明如何让计算器产生随机数“1”、“2”、……、“6”. 在默认的数学模式下，按键步骤如下：

（1）按$\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\cdot}$（RanInt）$\boxed{1}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{)}$（,）$\boxed{6}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$，即可产生一个 1～6 之间的随机整数（最后的半个括号键$\boxed{)}$也可以不按）；

（2）接下来每按一次$\boxed{=}$键，计算器就产生 1～6 之间的一个随机整数.

下面请你试一试，用产生随机数的模拟试验方法，解决一个较难分析预测的中奖概率问题：

某彩票的游戏规则是，你从 1～35 中选出 7 个号码组成一组投注号码，中奖号码只有一个，只要你选的 7 个号码中有一个与中奖号码相同即可获奖，问中奖的概率是多少？

我们只需将上面步骤（3）中的“6”改成“35”，即可在 1～35 的范围内任意产生一个随机整数，作为“第一期”的中奖号码，与你事先写好的号码比较一下，看是否中奖，如果中奖，就在“中奖”下面做一记号，否则在“没中奖”下面做一记号. 然后，你重新写好一组号码，让计算器再在 1～35 的范围内任意产生一个随机整数，作为“第二期”的中奖号码，你依然在“中奖”或“没中奖”下面做一记号. 这样一直重复下去，你就可以凭借模拟试验“中奖”的频率去估计中奖的概率了，如果你希望估得准一些，可以进行大数次重复试验，直至你觉得频率已经稳定为止.

小结

一、知识结构

- 概率
  - 理论分析预测概率
    - 画树状图
    - 列表
  - 重复试验，用频率估计概率

二、要点

1. 在日常生活中，人们通常会定性地描述一个事件发生的概率．实际上，我们还可以用百分数、小数或分数定量地描述概率，概率的大小能够反映该事件发生的频繁程度．

2. 通过重复试验，我们对随机现象有了初步的感受：一方面，随机事件的发生与否具有随机性，所以每次收集到的数据可能不同；另一方面，只要有足够的数据就可能从中发现规律．即我们可以通过数据分析来认识随机事件发生的规律．

3. 我们可以通过理论分析，用计算的办法预测概率．预测概率的一个基本功就是要能够分清所有机会均等的结果，并指出其中我们所关注的结果．画树状图和列表都是运用分析方法预测概率的有效手段．有些事件发生的概率无法用分析的方法预测或分析起来比较困难，这时可以用重复试验的办法估计概率．

复习题

A 组

1. 下列说法正确吗？请说明理由：

（1）可能性很大的事情是必然发生的；

（2）可能性很小的事情是不可能发生的；

（3）投掷一枚普通的正方体骰子，结果恰好是“3”是不可能发生的；

（4）小明的幸运数字是“2”，所以他在投掷正方体骰子时掷出“2”的机会比他掷出其他数字的机会大；

（5）爸爸买彩票又没中奖，我劝他要坚持，因为他从未中过奖，所以他现在中奖的机会比以前大了.

2. 投掷一枚普通的正方体骰子，将下列事件按照概率从小到大排序：

（1）点数大于 2；（2）点数大于 5；（3）点数小于 7；

（4）点数大于 6；（5）点数为 5 或 3.

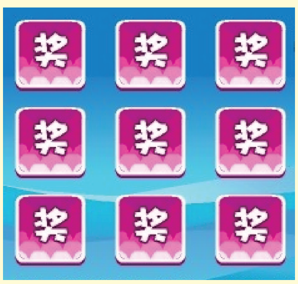
3. 班级里开展知识竞赛活动，必答题共有 5 组：A、B、C、D、E. 它们被分别写在信封内的卡片上，请你随机抽取 1 张进行回答. 用理论分析和重复试验这两种方法求恰好抽中 C 组题的概率.

4. 一次抽奖活动设置了如图所示的翻奖牌，如果你只能在 9 块翻奖牌中选中 1 块翻牌，试求以下事件的概率：

（1）得到一架显微镜；（2）得到两张球票；

（3）得到书籍；（4）什么奖励也没有得到；

（5）得到奖励.



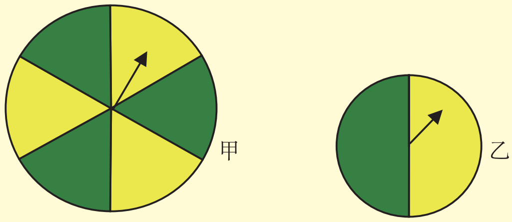
翻奖牌正面

一架显微镜	一套丛书	谢谢参与
一张唱片	两张球票	一本小说
一个随身听	一副球拍	一套文具

翻奖牌反面

（第 4 题）

5. 用力旋转如图所示的甲、乙两个转盘的指针，想一想，哪个转盘的指针停下后指向绿色的概率比较大？再用重复试验的方法检验一下自己的想法是否正确.



（第 5 题）

B 组

6. 假如你做两组抛掷硬币的试验，每组抛掷 10 次，你认为两组试验的结果是不可能一模一样，还是有可能一模一样，还是必然会一模一样？为什么？

7. 有的随机事件（如中大奖）**很少**发生，有的随机事件（如不中奖）则**经常**发生，请再举出几个可以用来表示随机事件这种不同发生频率的词汇，来定性地描述机会的大小.

8. 在一个不透明的布袋中装着大小和外形等一模一样的 5 个红球、3 个蓝球和 2 个白球，它们已经在布袋中被搅匀了. 请判断下列事件中哪些是不可能事件，哪些是必然事件，哪些是随机事件，并说明理由.

（1）从布袋中任意取出 1 个球，是一个白球；

（2）从布袋中一次任意取出 5 个球，全是蓝球；

（3）从布袋中一次任意取出 5 个球，只有蓝球和白球，没有红球；

（4）从布袋中一次任意取出 6 个球，恰好红、蓝、白三种颜色的球都齐了；

（5）从布袋中一次任意取出 9 个球，恰好红、蓝、白三种颜色的球都齐了.

9. 在一副洗好的 52 张扑克牌中（没有大小王），随机地抽出 1 张牌，分别求下列事件的概率：

（1）抽出的是 10；　（2）抽出的是方块 10；

（3）抽出的是红桃；　（4）抽出的是黑色的（黑桃或梅花）.

10. 盒子里装有 2 个红球和 2 个黑球，搅匀后从中取出 1 个球，放回搅匀再取出第 2 个球，分别求下列事件的概率：

（1）取出两个黑球；　（2）取出两个红球；

（3）取出一红一黑；　（4）取出一红一白.

C 组

11. 按现行标准,垃圾分为“可回收物”、“厨余垃圾”、“有害垃圾”与“其他垃圾”四类. 为了有效地保护环境,要分类投放垃圾. 某天,假设小明把垃圾分装在 4 个袋中随机投放,求他在投放时每袋垃圾都放对位置的概率.

(第 11 题)

12. 下列问题中,所分成的一些事件发生的机会均等吗? 若不均等,请你设法将它们重新分类,使之变成发生机会均等的事件.

(1) 抛掷两枚普通硬币时,分成“没有出现正面”、“出现一个正面”和“出现两个正面”这三个事件;

(2) 投掷两枚普通的正四面体骰子时,分成“掷得的两数之积为奇数”和“掷得的两数之积为偶数”这两个事件.

13. 在第 126 页 25.1 节的“做一做”拼图片活动中,我们通过重复试验发现,正好拼成原图的频率稳定在 0.2 左右. 请运用理论分析的方法解释为什么频率会稳定在 0.2 附近.

14. 小明有红色、白色、黄色、黑色四件衬衫,又有米色、蓝色两条长裤. 如果他最喜欢的搭配是白色衬衫配蓝色长裤,那么黑暗中他随机拿出衬衫 1 件、长裤 1 条,正是他最喜欢的搭配的概率是多少? 如果他最不喜欢红色衬衫配蓝色长裤或者黑色衬衫配蓝色长裤,那么,黑暗中他随机拿出的衬衫与长裤正是他最不喜欢的搭配的概率又是多少?

综合与实践

骰子与概率

从小到大，我们玩过的许多游戏都会用到骰子，其中常用的是普通的正方体骰子. 你会制作这种骰子吗？其实，只要在平面上画出正方体的一种表面展开图，然后在每个正方形格子里标明点数（如图 1），最后粘贴起来就行了. 要注意的是，在裁剪的时候别忘了留出粘贴的位置. 和同伴交流一下，可以画出多少种不同的展开图？怎样设计粘贴部位比较合理？

根据我们所学的知识，如果骰子的质量分布是均匀的，那么，抛掷以后每个点数出现的概率相等，都是$\frac{1}{6}$. 现在请你自己动手，做一个质量分布不均匀的骰子，例如在点数“6”的内侧粘上一粒小石子（如图 2）. 此时，各点数出现的概率会有怎样的变化？

请你的同伴猜一猜，你制作的骰子哪个点数出现的概率最大？

用重复试验来检验你的推断和同伴的猜测.

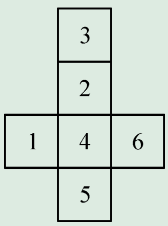


图 1

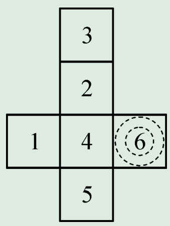
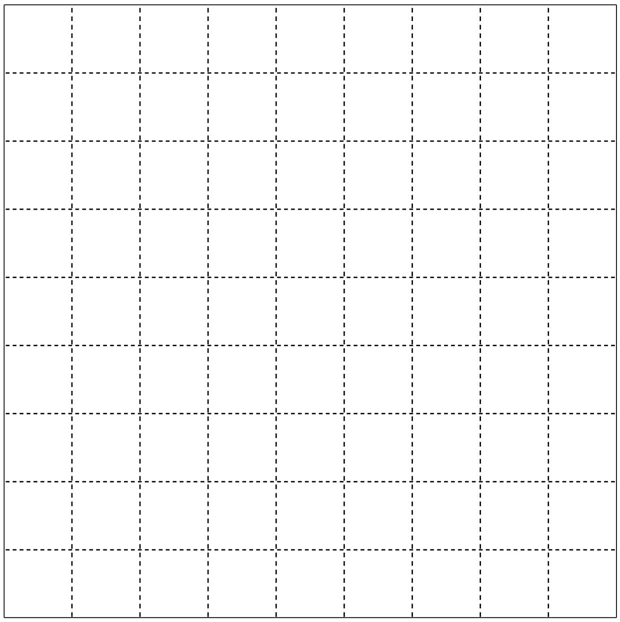
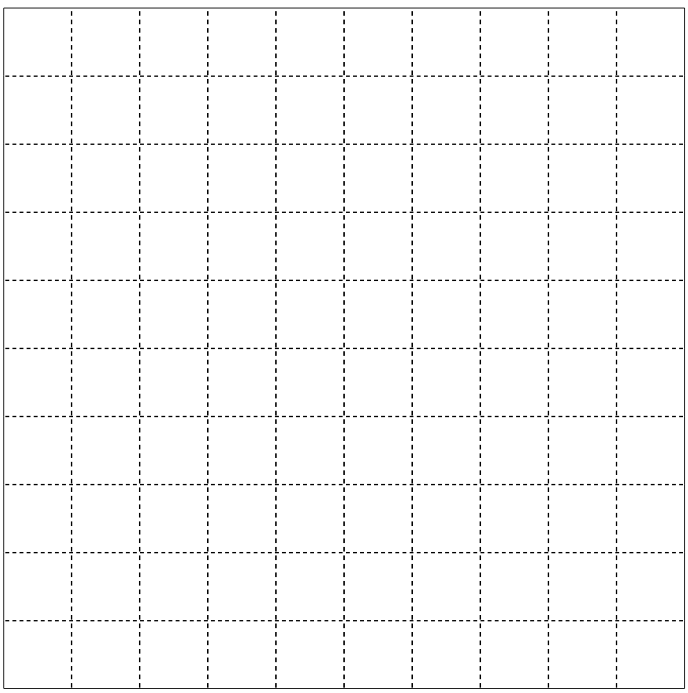


图 2

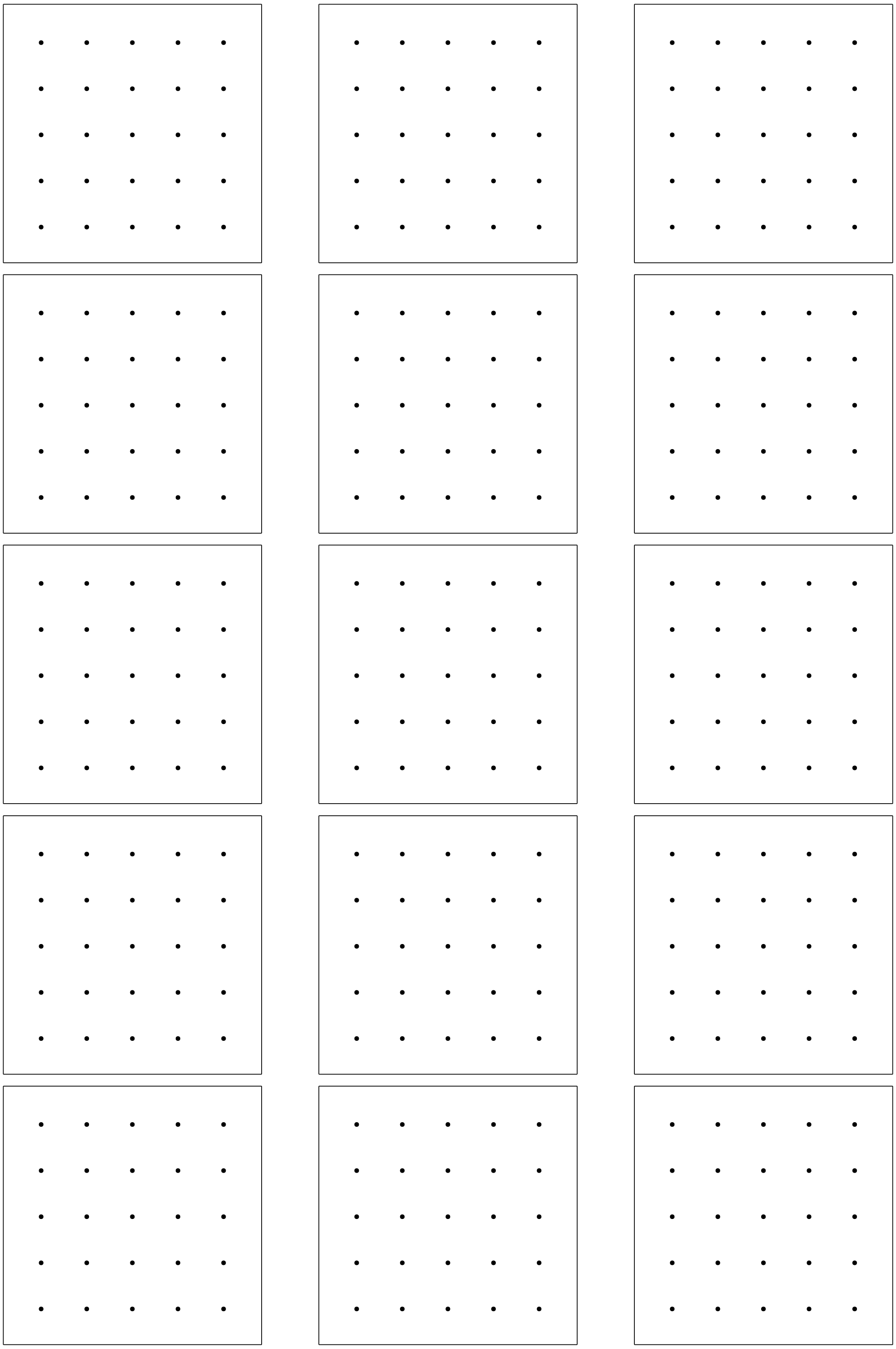
数学实验附图

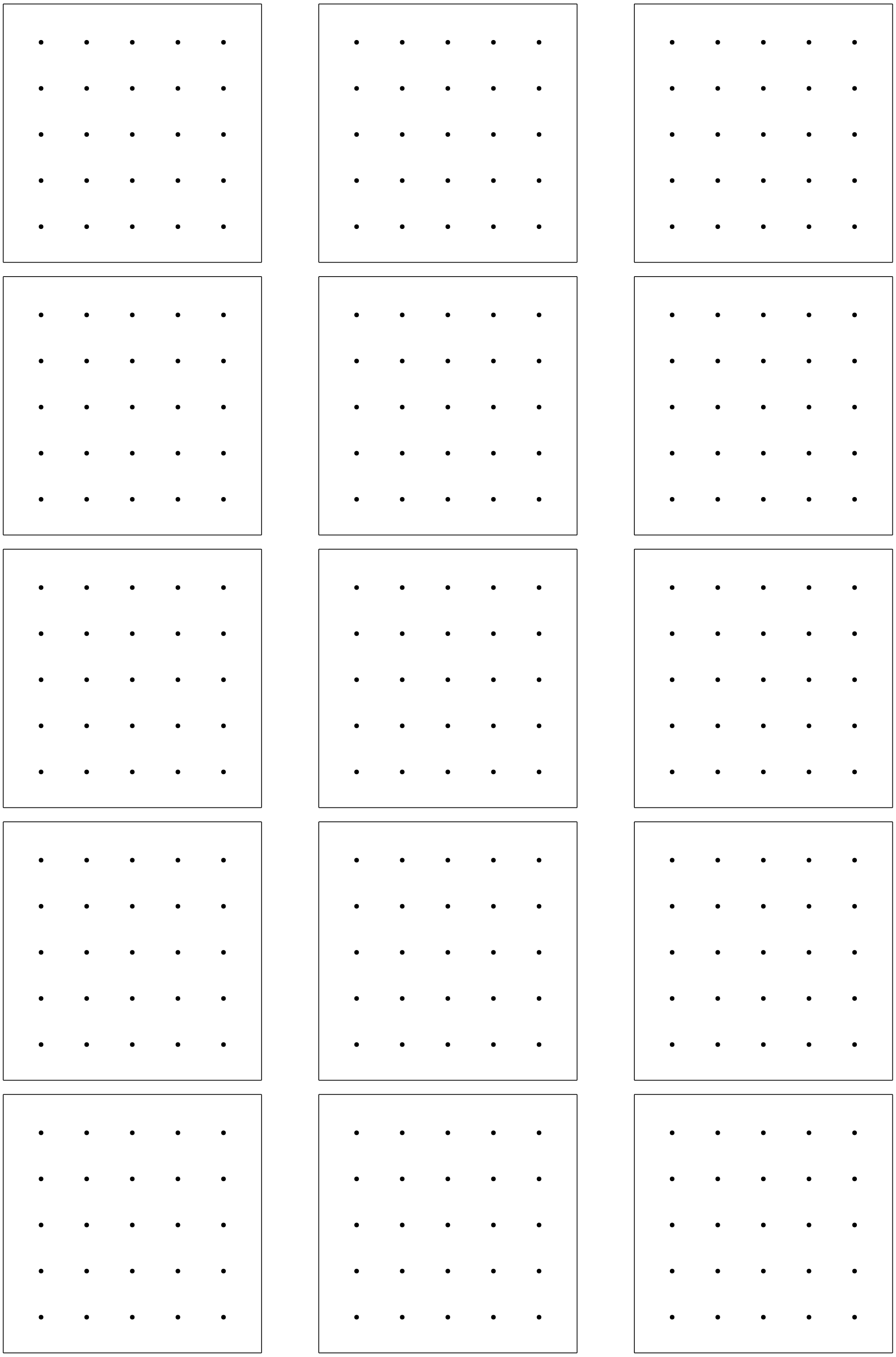
方格图

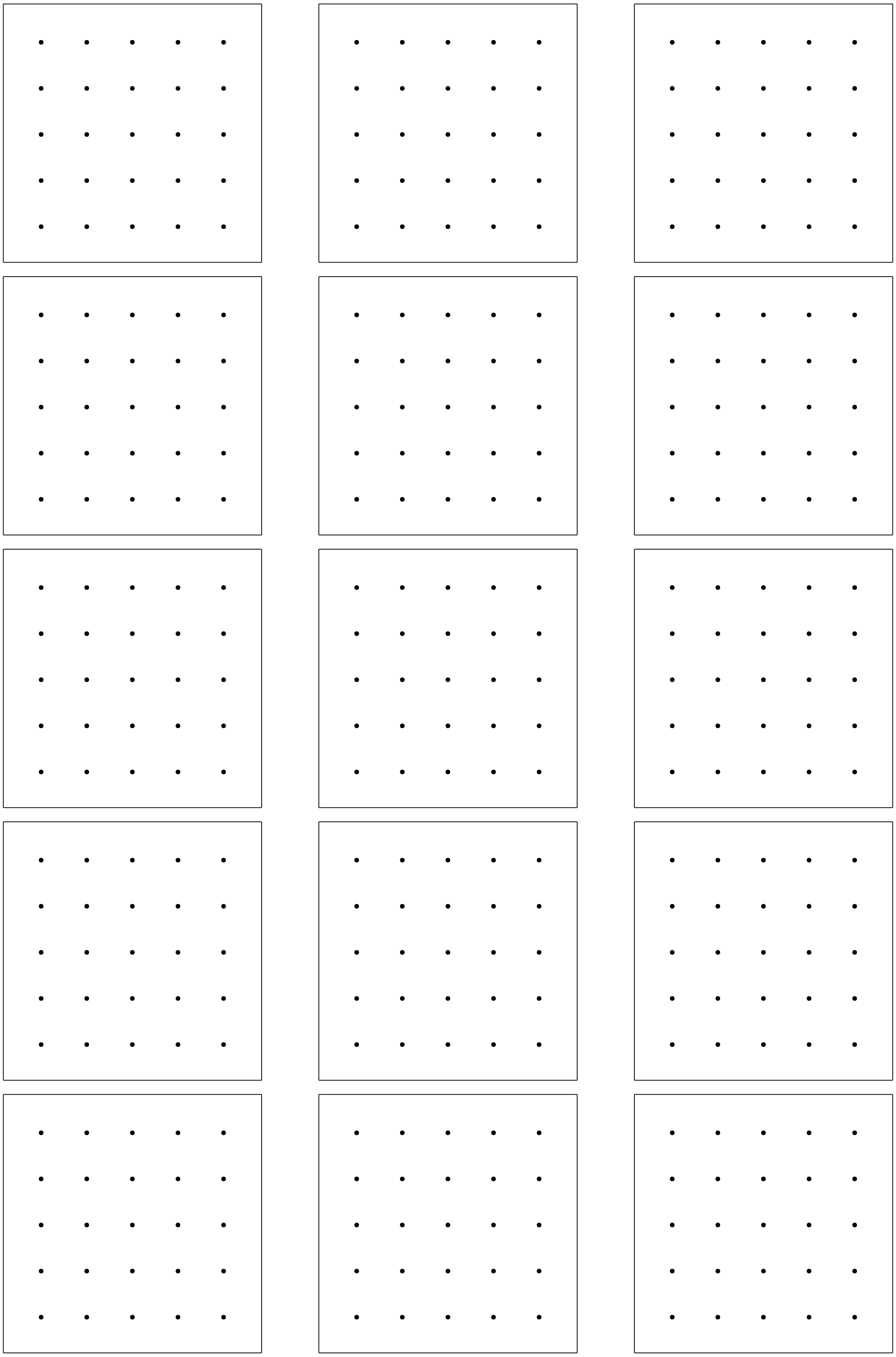




格点图







后　　记

华东师大版初中数学教材是最早通过教育部审查的新课标初中数学教材之一. 自 2001 年秋季在 7 个国家级实验区投入实验以来,已有分布在 26 个省、市、自治区的地市选用过或正在选用本套教材. 10 多年来,实验区的广大师生对本套教材寄予了厚爱,为它的不断完善提出了许多宝贵意见. 根据这些意见,在实验期间,我们对教材进行了多次修改. 在此,我们对多年来给予本套教材关心的各级领导、广大实验区师生和各位同仁表示衷心感谢.

根据教育部的统一部署,在 2012 年前要完成义务教育阶段所有新课标教材的修订工作. 为了确保本套教材修订工作的顺利进行,在 2011 年 4 月至 7 月间,我们就本套教材的修订广泛征求了一线教师的意见. 2011 年 9 月在南京召开了"华东师大版初中数学教材修订研讨会",来自实验区的 120 多名教研员和骨干教师以及全体编写人员参加了会议. 会议期间就本套教材修订的整体框架达成了广泛共识. 本套教材的修订稿完成后,我们又特邀有关专家和来自教学一线的教师进行了审稿. 参与本册教材审稿的有冯国卫、郭奕津等专家和教师.

尽管我们对修订工作倾注了心血,但现在呈现在广大师生面前的修订教材肯定还存在有待进一步完善的地方. 我们真诚希望广大师生继续关心我们的教材,对我们的教材不断提出新的宝贵意见.

本册教材修订的撰稿人如下(以姓氏笔画为序):

王继延、李俊、李文革、吴中才、沈加、胡耀华、唐复苏、程靖.