国家教材委员会专家委员会审核通过 2024

义务教育教科书

数学

七年级

下册

华东师范大学出版社

义务教育教科书

数学

七年级
下册

华东师范大学出版社
·上海·

主　编：王建磐
副主编：王继延
本册编写人员：唐复苏　李文革　吴中才　忻重义
沈　加　孙孝武　胡同祥

义务教育教科书
数　学
七年级　下册

责任编辑　平　萍　周　鸿
责任校对　时东明
装帧设计　刘怡霖　卢晓红
插图绘制　上海翔绘网络科技有限公司

出　　版　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电　　话　021－60821666　行政传真 021－62572105
客服电话　021－62865537

印 刷 者　上海新华印刷有限公司
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张　11.75
字　　数　194 千字
版　　次　2024 年 8 月第 1 版
印　　次　2024 年 8 月第 1 次
书　　号　ISBN 978－7－5760－5084－4
定　　价　11.67 元

出 版 人　王　焰

致亲爱的同学

欢迎你，我们的小伙伴.

通过七年级上册展示的数学世界，你对数学的印象如何？你一定喜欢上它了，并且希望天天陪伴它！那么继续学习七年级下册吧.

这本书继续从你所熟悉的情境入手，为你提供最基本的、丰富多彩的数学内容，并穿插一些阅读材料，还设置了一些让你思考和实践的小栏目，给你创造了众多自主探索的好机会. 书中习题的难易程度不一，探索性问题、数学活动及项目学习都在向你招手，你的聪明才智必定能得到进一步的发挥.

现在，请你打开这本书，与我们一起继续在奇妙的数学世界里漫游，进一步探索数学的奥秘.

你在生活中会遇到各种各样的问题，比如要租用多少辆车才能使大家都能坐车去春游，又比如要花多少时间才能完成任务，等等. 本书的前两章“**一元一次方程**”和“**一次方程组**”展现给你的就是解决这些问题的方法，有了它们，你将成为解决实际问题的小能手.

生活中存在许多相等或不等的数量关系. 儿童乐园里的跷跷板、做实验用的天平等都给我们一种等式或不等式的直观形象. “**一元一次不等式**”将能够帮助你解决一些具有不等关系的问题，找到适合某些不等关系的数值，你会发现许多问题中隐含着不少数学道理.

我们还要到图形世界去遨游. 你会看到各种各样的图形，如等腰三角形、等边三角形、多边形等，一个个独特的形状都显示着它们各自的风貌. 春节晚会上悬挂着的一条条花边，其中有不少图形就是我们在“**三角形**”和“**轴对称、平移与旋转**”里将要认识的新朋友，那独特的形式会给你带来不少启示，学完它们你自己就可以剪出更多、更漂亮的花边了.

“**项目学习**”将继续以问题解决为导向，引导你整合数学与其他学科的知识和思想方法，从数学的角度观察与分析、思考与表达、解决与阐释实际生活中的问题.

让我们一起走进更奇妙的数学世界吧！

目录

第 5 章　一元一次方程

学校运动队沿校园周边的步道晨跑，甲、乙两队员同时出发，跑完一圈乙比甲多用 1 min．已知甲、乙队员跑步的平均速度分别是 4 m/s、3.5 m/s．这一圈步道有多长？

设步道一圈的长为 x m，可列出方程：

$$\frac{x}{3.5}=\frac{x}{4}+60.$$

★　本章将学习一元一次方程的解法，并学习应用一元一次方程解决一些实际问题，从中感受方程的作用．

5.1 从实际问题到方程

问题1 课外活动中，张老师组织同学们进行“猜年龄”游戏，她首先提出如下问题：

同学们今年的年龄是 13 岁，我今年的年龄是 45 岁，经过几年我的年龄正好是你们年龄的 3 倍？

问题一经提出，同学们饶有兴趣，开展了热烈的讨论，各抒己见，提出了各种各样的解答．比较典型的有下面两种解法：

解法1 （尝试—检验）

“3 年！”小敏首先发现了答案．她是这样算的：

经过 1 年，同学们的年龄是 14 岁，老师的年龄是 46 岁，不是同学们年龄的 3 倍；

经过 2 年，同学们的年龄是 15 岁，老师的年龄是 47 岁，不是同学们年龄的 3 倍；

经过 3 年，同学们的年龄是 16 岁，老师的年龄是 48 岁，恰好是同学们年龄的 3 倍．

解法2 （分析—列算式）

不管过了多少年，张老师与同学们的年龄差是不变的，根据他们现在的年龄可知，这个年龄差为 $45-13=32$(岁)．当张老师的年龄是同学们年龄的 3 倍时，他们的年龄差应该是同学们年龄的 2 倍，这时同学们的年龄是 $(45-13)\div 2=32\div 2=16$(岁)，所以要求的年数是 $16-13=3$，和解法 1 的答案相同．

探索 张老师肯定了同学们的两种解法，并鼓励同学们继续探索：

我们学习了“用字母表示数”，在这个问题中，如果用字母(例如 x)表示未知的年数，你能发现什么？

经过 x 年，老师的年龄是 $(45+x)$ 岁，同学们的年龄是 $(13+x)$ 岁，这时老师的年龄是同学们年龄的 3 倍，即

$$老师的年龄=3\times(同学们的年龄)，$$

于是有

$$45+x=3(13+x). \qquad ①$$

试一试

同学们今年的年龄是 13 岁，班主任李老师今年的年龄是 55 岁，经过几年李老师的年龄是同学们年龄的 3 倍？

让我们回到本章开头提出的问题：

问题 2　学校运动队沿校园周边的步道晨跑，甲、乙两队员同时出发，跑完一圈乙比甲多用 1 min．已知甲、乙队员跑步的平均速度分别是 4 m/s、3.5 m/s．这一圈步道有多长？

你能解这个问题吗？

我们顺着问题 1“探索”中的思路，设步道一圈的长为 x m，对问题 2 作一些探索．

探索　由题意，跑完一圈乙比甲多用 1 min(60 s)，即跑完一圈

$$乙所用时间=甲所用时间+60,$$

而这时，乙所用时间为$\frac{x}{3.5}$ s，甲所用时间为$\frac{x}{4}$ s，所以

$$\frac{x}{3.5}=\frac{x}{4}+60. \qquad ②$$

以上问题 1 和问题 2，用字母 x 表示未知数，由问题中已知的有关量的相等关系(等量关系)，分别列出两个含有未知数的等式①和②．问题就转化为求未知数 x 的值，使等式成立(等式左、右两边的值相等)．下面我们将顺着这个思路，研究这样的等式，进一步寻求解决问题的方法．

概括 上面两个问题中，“探索”得到了两个含有未知数的等式①和②. 像这样，含有未知数的等式叫做**方程**(equation).

能使方程左、右两边的值相等的未知数的值，叫做方程的**解**(solution). 例如 $x=3$ 是方程①的解，它能使得方程①左、右两边的值相等(都等于48). 当方程中只有一个未知数时，方程的解也叫做方程的**根**(root).

求方程的解的过程，叫做**解方程**(solving equation).

读一读

尝试检验法(trial test method)

问题1的解法1，是通过尝试、检验，寻求问题的答案，这种思想方法来自人们的生活经验，有时也可以用来解方程. 用尝试检验法解方程，其基本方法是这样的：先选取未知数的一些可能值，逐一代入方程的左边和右边，分别求值，看(检验)两边的值是否相等. 如果相等，相应的 x 的值就是方程的解；否则，就不是方程的解.

例如解方程 $45+x=3(13+x)$，可得方程的解是 $x=3$，解答过程如下表：

x	左边 $45+x$	右边 $3(13+x)$	左、右两边的值 是否相等
1	46	42	不相等
2	47	45	不相等
3	48	48	相等
4	49	51	不相等
…	…	…	…

练习

根据题意列出方程(不必求解)：

(1) 某班原分成两个小组进行课外体育活动，第一组26人，第二组22人．现根据学校活动器材的数量，要将第一组的人数调整为第二组的一半，应从第一组调多少人到第二组去?

(2) 加工某种零件，师傅平均每小时做5个，徒弟平均每小时做4个，加工一盒零件，师傅比徒弟少用2 h．问：一盒零件有多少个?

习题5.1

A 组

1. 检验下列方程后面大括号内所列各数是否为相应方程的解：

(1) $\frac{5x+1}{8}=x-1$， $\{-5,\ 3\}$；

(2) $2(y-2)-9(1-y)=3(4y-1)$， $\{-10,\ 10\}$．

2. 小明去商店买练习本，回来后问同学："店主告诉我，如果多买一些就给我打八折．于是，我就买了20本，结果便宜了4.80元．原来每本的价格是多少?"你能列出方程吗?

3. 根据班级内男、女同学的人数编一道应用题，和同学交流一下．

B 组

4. 根据题意列出方程(不必求解)：

(1) 某班到离校30 km的国家森林公园春游．先坐车，速度为36 km/h，下车后以6 km/h的速度步行到达目的地，共花了1 h．问：他们步行了多少时间?

(2) 某车间接到一批小家电组装任务，原计划每天组装36台，预计若干天完成．在组装了任务的三分之一后，调整工序，改进操作技术，工效提高了1倍，结果提前2天完成任务．求这次组装小家电的总台数．

5.2 解一元一次方程

1. 等式的性质与方程的简单变形

我们在小学阶段学过等式的性质，你还记得吗？

如图 5.2.1，天平处于平衡状态，它表示左、右两个盘内物体的质量 a、b 是相等的．如图 5.2.2，若在平衡天平两边的盘内都添上(或都拿去)质量相等的物体，则天平仍然平衡．如图 5.2.3，若把平衡天平两边盘内物体的质量都扩大相同的倍数或都缩小到原来的几分之一，则天平仍然平衡．

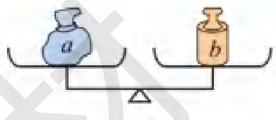


图5.2.1

图5.2.2

图5.2.3

这个事实反映了等式的基本性质：

1. 等式两边都加上(或都减去)同一个数或同一个整式，所得结果仍是等式．

如果 $a=b$，那么 $a+c=b+c$，$a-c=b-c$．

2. 等式两边都乘以(或都除以)同一个数(除数不能为 0)，所得结果仍是等式．

如果 $a=b$，那么 $ac=bc$，$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c}\ (c\neq 0)$．

练习

1. 回答下列问题，并说明理由：

（1）由 $a=b$ 能不能得到 $a-2=b-2$？

（2）由 $m=n$ 能不能得到 $-\frac{m}{3}=-\frac{n}{3}$？

（3）由 $2a=6b$ 能不能得到 $a=3b$？

（4）由 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$ 能不能得到 $3x=2y$？

2. 填空，使所得结果仍是等式，并说明是根据哪一条等式性质得到的：

（1）如果 $x-2=5$，那么 $x=5+$ ______；

（2）如果 $3x=10-2x$，那么 $3x+$ ______ $=10$；

（3）如果 $2x=7$，那么 $x=$ ______；

（4）如果 $\frac{x-1}{2}=3$，那么 $x-1=$ ______.

由等式的基本性质，可以得到**方程的变形规则**：

1. 方程两边都加上（或都减去）同一个数或同一个整式，方程的解不变；
2. 方程两边都乘以（或都除以）同一个不等于0的数，方程的解不变.

根据这些规则，我们可以对方程进行适当的变形，求得方程的解.

例1 解下列方程：

（1）$x-5=7$；

（2）$4x=3x-4$.

解 （1）　$x-5=7$，

两边都加上5，得　$x=7+5$，

即　$x=12$.

(2) $$4x = 3x - 4,$$

两边都减去 $3x$，得 $$4x - 3x = -4.$$

合并同类项，得 $$x = -4.$$

在解这两个方程时，进行了怎样的变形？有什么共同点？

以上两个方程的解法，都依据了方程的变形规则 1. 这里的变形，相当于将方程中的某些项改变符号后，从方程的一边移到另一边. 像这样的变形叫做**移项**(transposition).

▶ **例 2** 解下列方程：

(1) $-5x = 2$；

(2) $\frac{3}{2}x = \frac{1}{3}$.

解 (1) 方程两边都除以 -5，得

$$x = -\frac{2}{5}.$$

(2) 方程两边都除以 $\frac{3}{2}$，得

$$x = \frac{1}{3} \div \frac{3}{2},$$

即 $$x = \frac{2}{9}.$$

在解这两个方程时，进行了怎样的变形？有什么共同点？

这两个方程的解法，都依据了方程的变形规则 2，将方程的两边都除以未知数的系数. 像这样的变形通常称作“将未知数的系数化为 1”.

概括 以上例 1 和例 2 解方程的过程，都是将方程进行适当的变形，得到 $x = a$ 的形式.

练习

1. 下列方程的变形是否正确？如果不正确，说明错在哪里．

(1) 由 $3+x=5$，得 $x=5+3$；　(2) 由 $7x=-4$，得 $x=-\frac{7}{4}$；

(3) 由 $\frac{1}{2}y=0$，得 $y=2$；　(4) 由 $3=x-2$，得 $x=-2-3$．

2. 解下列方程：

(1) $x-6=6$；　(2) $7x=6x-4$；

(3) $-5x=60$；　(4) $\frac{1}{4}y=\frac{1}{2}$．

做一做

利用方程的变形，求方程 $2x+3=1$ 的解，并和同学交流．

例3 解下列方程：

(1) $8x=2x-7$；

(2) $6=8+2x$；

(3) $2y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}y-3$．

解 (1) 移项，得

$$8x-2x=-7.$$

合并同类项，得 $6x=-7$.

将未知数的系数化为1，得

$$x=-\frac{7}{6}.$$

（2）原方程即

$$8+2x=6.$$

移项，得

$$2x=-2.$$

将未知数的系数化为1，得

$$x=-1.$$

（3）移项，得

$$2y-\frac{1}{2}y=-3+\frac{1}{2}.$$

合并同类项，得

$$\frac{3}{2}y=-\frac{5}{2}.$$

将未知数的系数化为1，得

$$y=-\frac{5}{3}.$$

练习

1. 解下列方程：

（1）$3x+4=0$；

（2）$7y+6=-6y$；

（3）$5x+2=7x+8$；

（4）$3y-2=y+1+6y$；

（5）$\frac{2}{5}x-8=\frac{1}{4}-0.2x$；

（6）$1-\frac{1}{2}x=x+\frac{1}{3}$.

2. 试解5.1节中问题1所列出的方程.

习题5.2.1

A 组

1. 解下列方程：

(1) $18=5-x$；　　(2) $2x-1=5x+7$；

(3) $3x-7+4x=6x-2$；　　(4) $2y+3=11-6y$；

(5) $x-1=5+2x$；　　(6) $10y+5=11y-5-2y$.

2. 解下列方程：

(1) $\frac{3}{4}x+2=3-\frac{1}{4}x$；　　(2) $\frac{1}{3}x-1-2x=-1$；

(3) $\frac{1}{2}x-3=5x+\frac{1}{4}$；　　(4) $0.3x+1.2-2x=1.2-2.7x$.

B 组

3. 已知 $A=3x+2$，$B=4-x$，解答下列问题：

(1) 当 x 取何值时，$A=B$？

(2) 当 x 取何值时，A 比 B 大4？

2. 解一元一次方程

前面我们遇到的一些方程，例如

$$45+x=3(13+x),$$

$$\frac{x}{3.5}=\frac{x}{4}+60,$$

这两个方程有什么共同特征？

像这样，只含有一个未知数、左右两边都是整式，并且含未知数的项的次数都是1的方程叫做**一元一次方程**(linear equation with one unknown).

我们再一起来解几个一元一次方程.

▶ **例 4** 解方程：$3(x-2)+1=x-(2x-1)$.

解 去括号，得

$$3x-6+1=x-2x+1.$$

合并同类项，得 $3x-5=-x+1$.

移项，得

$$3x+x=1+5.$$

合并同类项，得 $4x=6$.

将未知数的系数化为 1，得

$$x=\frac{3}{2}.$$

练习

1. 解下列方程：

(1) $5(x+2)=2(5x-1)$；

(2) $(x+1)-2(x-1)=1-3x$；

(3) $2(x-2)-(4x-1)=3(1-x)$.

2. 列方程求解：

(1) 当 x 取何值时，代数式 $3(2-x)$ 和 $2(3+x)$ 的值相等？

(2) 当 y 取何值时，代数式 $2(3y+4)$ 的值比 $5(2y-7)$ 的值大 3？

3. 试解 5.1 节中问题 2 所列出的方程.

▶ **例 5** 解方程：$\frac{x-3}{2}-\frac{2x+1}{3}=1$.

分析 这个方程中的系数出现了分数，通常可以将方程的两边都乘以同一个数(这里是都乘以 6)，去掉方程中的分母. 像这样的变形通常称为"去分母".

解 去分母，得

$$3(x-3)-2(2x+1)=6.$$

这里为什么要添上括号？

去括号，得

$$3x-9-4x-2=6.$$

移项，得

$$3x-4x=6+9+2.$$

合并同类项，得

$$-x=17.$$

将未知数的系数化为1，得

$$x=-17.$$

思考 回顾以上各例题的解答过程，总结一下：解一元一次方程通常有哪些步骤？各步骤进行的是怎样的变形？如何根据方程的特点灵活运用方程的变形规则？

练习

1. 指出下列方程求解过程中的错误，并予以改正：

（1）解方程：$\frac{3x-1}{2}=\frac{4x+2}{5}-1$.

解 $15x-5=8x+4-1$,

$15x-8x=4-1+5$,

$7x=8$,

$x=\frac{7}{8}$.

（2）解方程：$\frac{x-1}{3}-\frac{x+2}{6}=\frac{4-x}{2}$.

解 $2x-2-x+2=12-3x$,

$2x-x+3x=12+2+2$,

$4x=16$,

$x=4$.

2. 解下列方程：

（1）$\frac{5x-1}{8}=\frac{7}{4}$;

（2）$\frac{4-x}{3}=\frac{x-3}{5}-1$.

▶ **例 6**　如图 5.2.4，天平的两个盘中分别盛有 51 g 和 45 g 盐．问：应从 A 盘中拿出多少盐放到 B 盘中，才能使天平平衡？

图5.2.4

分析　从 A 盘中拿出一些盐放到 B 盘中，使两盘中所盛盐的质量相等，于是有这样的等量关系：

A 盘中现有盐的质量 = B 盘中现有盐的质量．

列方程解决问题的关键是弄清题意，找出等量关系．

设应从 A 盘中拿出 x g 盐放到 B 盘中，我们来计算两盘中现有盐的质量，可列出表 5.2.1．

表5.2.1

	A 盘	B 盘
原有盐/g	51	45
现有盐/g		

解　设应从 A 盘中拿出 x g 盐放到 B 盘中，则根据题意，得

$$51 - x = 45 + x.$$

解这个方程，得

$$x = 3.$$

经检验，符合题意．

答：应从 A 盘中拿出 3 g 盐放到 B 盘中，才能使天平平衡．

▶ **例 7** 新学期开学，学校团委组织八年级 65 位新团员将教科书从仓库搬到七年级新生教室．女同学每人每次搬 3 包，男同学每人每次搬 4 包．每位同学搬了 2 次，共搬了 450 包．问：这些新团员中有多少位男同学？

分析 题目告诉了我们好几个等量关系，其中有这样的等量关系：

读题，找找看，题目告诉了我们哪些等量关系？

男同学搬书包数 + 女同学搬书包数 = 搬书总包数．

设新团员中有 x 位男同学，那么立即可知女同学的人数，从而容易分别算出男同学和女同学共搬书的包数，可列出表 5.2.2．由上述等量关系即可列出方程．

表5.2.2

	男同学	女同学	总数
搬书的人数	x		65
每人搬书的包数		3×2	
共搬书的包数			450

解 设这些新团员中有 x 位男同学，根据题意，得

$$8x + 6(65 - x) = 450.$$

解这个方程，得

$$x = 30.$$

经检验，符合题意．

答：这些新团员中有 30 位男同学．

练习

1. 学校田径队的小刚同学在 400 m 跑测试时，先以 6 m/s 的平均速度跑了大部分路程，再以 8 m/s 的速度冲刺到达终点，成绩为 1 min 5 s．问：小刚同学在冲刺阶段花了多少时间？
2. 在第 1 题中，若问“小刚同学在离终点多远处开始冲刺”，该如何求解？

概括 列一元一次方程解决实际问题，关键在于抓住问题中的等量关系，列出方程．求得方程的解后，经过检验，得到实际问题的解答．

这一过程也可以简单地表述为：

$$\text{问题}\xrightarrow[\text{抽象}]{\text{分析}}\text{方程}\xrightarrow[\text{检验}]{\text{求解}}\text{解答}$$

其中分析和抽象的过程通常包括：

（1）弄清题意和其中的数量关系，用字母表示适当的未知数（设元）；

（2）找出问题中所给出的等量关系，它反映了未知量与已知量之间的关系；

（3）对这个等量关系中涉及的量，列出相关的代数式，根据等量关系，列出方程．

在设未知数和作出解答时，应注意量的单位．

试一试

解答下面两个问题，注意比较这两个问题中的数量关系：

（1）小亮和老师一起整理了一篇教学材料，准备录入成电子稿．按篇幅估计，老师单独录入需 4 h 完成，小亮单独录入需 6 h 完成．小亮先录入了 1 h 后，老师开始一起录入，问：还需要多少小时完成？

（2）甲、乙两车分别从相距360 km的两地相向开出，已知甲车的速度为60 km/h，乙车的速度为90 km/h．若甲车先开1 h，问：乙车开出多少小时后两车相遇？

阅读材料

丢番图的墓志铭与方程

古希腊数学家丢番图(Diophantus，约246—330)，以研究一类方程(不定方程)著称于世．在他的墓碑上，刻着这样一段墓志铭：

坟中安葬着丢番图，
多么令人惊讶，
这里忠实地记录下他所经历的道路．
上帝给予的童年占六分之一，
又过十二分之一，两颊长胡，
再过七分之一，点燃起结婚的蜡烛．
五年之后天赐贵子，
可怜迟到的宁馨儿，
享年仅及其父之半，便进入冰冷的墓．
悲伤只有用数论的研究去弥补，
又过四年，他也走完了人生的旅途．

试列出方程，算一算丢番图去世时的年龄．

在我国，“方程”一词最早出现于东汉初年的数学经典著作《九章算术》的第八章(《方程》篇)．到唐、宋时期，对方程的研究达到了我国古代的鼎盛阶段．那时用所创立的“天元术”解题，从设未知数到列方程都和现代数学教科书中的叙述十分相似．也就是在那段时期，方程的知识从中国传入日本．

习题5.2.2

A 组

1. 解下列方程：

(1) $3 = 1 - 2(4 + x)$；

(2) $3(2x + 5) = 2(4x + 3) + 1$.

2. 解下列方程：

(1) $\frac{5 - 3x}{2} = \frac{3 - 5x}{3}$；

(2) $1 - \frac{1}{2}x = 3 - \frac{1}{6}x$；

(3) $\frac{y + 2}{4} - \frac{2y - 1}{6} = 1$.

3. (1) 在等式 $S = \frac{n(a + b)}{2}$ 中，已知 $S = 279$，$b = 7$，$n = 18$，求 a 的值；

(2) 已知梯形的上底 $a = 3$，高 $h = 5$，面积 $S = 20$，根据梯形的面积公式 $S = \frac{1}{2}(a + b)h$，求梯形的下底 b 的长.

B 组

4. 如图，足球的表面是由一些呈多边形的黑、白皮块缝合而成的，共计有 32 块. 已知黑色皮块数比白色皮块数的一半多 2，问：两种颜色的皮块各有多少？

(第 4 题)

5. 小莉和同学在“五一”假期去森林公园玩，在溪流边的 A 码头租了一艘小艇，逆流而上，行进速度约为 4 km/h. 到 B 地后沿原路返回，行进速度增加了 50%，回到 A 码头比去时少花了 20 min. 求 A、B 两地之间的路程.

5.3 实践与探索

问题1 用一根长 60 cm 的铁丝围成一个长方形.

（1）如果长方形的宽是长的$\frac{2}{3}$，求这个长方形的长和宽；

（2）如果长方形的宽比长少 4 cm，求这个长方形的面积；

（3）比较小题(1)(2)所得的两个长方形面积的大小，还能围出面积更大的长方形吗？

讨论 每小题中如何设未知数？在小题(2)中，能不能直接设长方形的面积为 x cm^2？若不能，该怎么办？

探索 将小题(2)中的宽比长少 4 cm 改为少 3 cm、2 cm、1 cm、0 cm(即变为正方形)，长方形的面积有什么变化？

读一读

在问题 1 中，通过探索我们发现，在周长一定的情况下，长方形的长和宽越接近，面积就越大．实际上，当长和宽相等，即成为正方形时，面积最大．通过以后的学习，我们就会知道其中的道理.

有趣的是：若把这根铁丝围成任意封闭的平面图形(包括随意凹凸的不规则图形)，面积最大的是圆．这其中的道理涉及更深层次的数学知识，你有兴趣去认识它们吗？

练习

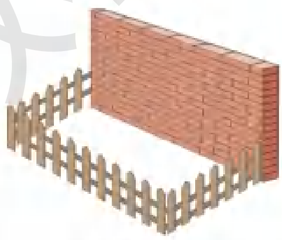
1. 一块长、宽、高分别为 4 cm、3 cm、2 cm 的长方体橡皮泥，要用它来捏一个底面半径为 1.5 cm 的圆柱，圆柱的高是多少？（精确到 0.1 cm，π 取 3.14）

2. 在一个底面直径 5 cm、高 18 cm 的圆柱形瓶内装满水，再将瓶内的水倒入一个底面直径 6 cm、高 10 cm 的圆柱形玻璃杯中，能否完全装下？若装不下，那么瓶内水面还有多高？若未能装满，求杯内水面离杯口的距离.

习题5.3.1

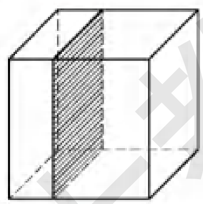
A 组

1. 学校建花坛余下 24 m 长的漂亮小围栏，经总务处同意，七年级(1)班同学准备在自己教室后的空地上一边靠墙、三边利用这些小围栏，建一个长方形的小花圃. 已知墙面长 10 m，若要使花圃的长比宽多 3 m，求花圃的面积.（提示：注意题目中的条件“已知墙面长 10 m”的用意，应考虑有两种情形）



（第 1 题）

2. 课外活动时，小兵用超轻黏土切割刀竖直切割一块用超轻黏土塑成的棱长为 6 cm 的正方体，正好将其分成两个长方体，如图所示. 若这两个长方体的体积之比是 1 : 2，试求被切割的棱的两部分的长度.



（第 2 题）

B 组

3. 若将 A 组第 2 题中的条件“体积之比”改为“表面展开图的面积之比”，则结论如何？你还能提出一个新的问题吗？

问题 2 新学年开始，某校三个年级为地震灾区捐款. 经统计，七年级捐款数占全校三个年级捐款总数的$\frac{2}{5}$，八年级捐款数是全校三个年级捐款数的平均数，九年级捐款数为 1 964 元. 求七、八年级的捐款数.

讨论 在解决问题 2 时，你是怎样设元的？还有没有其他的设元方法？比较一下，哪种设元方法比较容易列出方程？说说你的道理.

练习

1. 填空：

(1) 学校图书馆原有图书 a 册，最近增加了 20%，现在有图书______册；

(2) 某煤矿预计今年比去年增产 15%，达到年产煤 60 万吨，设去年产煤 x 万吨，则可列方程____________________；

(3) 某商品按定价的八折出售，售价为 14.80 元，则原定价是________元.

2. 为实现乡村振兴战略，解决山区老百姓优质土特产销售问题，某地政府帮助小强家开通了网络商店(简称“网店”)，将红枣、小米等土特产迅速销往全国. 已知相关的销售信息如下：

	红枣	小米
规格/(kg/袋)	1	2
成本/(元/袋)	40	38
售价/(元/袋)	60	54

今年前 5 个月，该网店销售了红枣和小米共 3 000 kg，获得利润 4.2 万元. 问：这 5 个月该网店销售红枣和小米各多少袋？

习题5.3.2

A 组

1. 一个角的余角比这个角的补角的一半小 40°，求这个角的度数.

2. 某市去年年底人均居住面积为 33 m^2，计划在今年年底增加到人均 42 m^2 . 求该市今年人均住房面积的年增长率.（精确到 0.1%）

3. 一年期定期储蓄年利率为2.25%，免缴利息税. 已知某储户的一笔一年期定期储蓄到期后所得本利和为20450元，问：该储户存入了多少本金？

B 组

4. 解答下列问题：
(1) 师徒两人检修一条长180 m的自来水管道，师傅每小时检修15 m，徒弟每小时检修10 m. 现两人合作，多少时间可以完成整条管道的检修？
(2) 师徒两人检修一条煤气管道，师傅单独完成需要10 h，徒弟单独完成需要15 h. 现两人合作，需要多少小时完成？

5. 学校准备添置一批课桌椅，原订购60套，每套200元. 店方表示：如果多购买，可以优惠. 结果校方购买了72套，每套减价6元，而商店获得同样多的利润. 求每套课桌椅的成本.

问题3 课外活动时李老师来教室布置作业，有一道题目只写了“某工厂需制作一块广告牌，请来两名工人. 已知师傅单独完成需4天，徒弟单独完成需6天”就停住了. 片刻后，同学们带着疑惑的目光，窃窃私语：“这道题目不完整呀！”“要求什么呢？”……

李老师开口了：“同学们的疑问是有道理的. 今天我就是要请同学们自己来提出问题. 请发挥你们的想象力，把这道题目补充完整.”

小明抢先说：“让我试一试.”于是，上去添了：“两人合作需要几天完成？”

有同学反对：“这太简单了！”但也引起了大家的兴趣，于是各自试了起来：有考虑一人先做几天再让另一人做的，有考虑两人先合作再一人离开的，也有考虑两人合作完成后的报酬问题的……

李老师选了两位同学的问题，综合后，在黑板上写出：现由徒弟先做1天，再两人合作，完成后共得到报酬900元. 如果按各人完成的工作量计算报酬，那么该如何分配？

试解答这一问题，并和同学交流各自的做法.

习题5.3.3

A 组

1. 小慧阅读一本科普图书，原来每天阅读 20 页，读完 120 页后，抽出一定的时间练毛笔字，每天的阅读量降为原来的一半，结果多花了 5 天才读完．求这本科普图书的总页数．
2. 某航空公司规定：乘坐飞机经济舱的旅客每人最多可免费托运 20 kg 行李，超过部分每千克按飞机票价的 1.5%购买行李票．一位乘坐经济舱的旅客托运了 35 kg 行李，机票连同行李费共付了 1 323 元，求这位旅客的机票价．
3. 为庆祝学校运动会开幕，七年级(2)班同学接受了制作小旗的任务，原计划一半同学参加制作，每天制作 40 面．完成了三分之一以后，全班同学一起参加了制作，结果比原计划提前一天半完成任务．假设每人的制作效率相同，问：共制作小旗多少面？

B 组

4. 一辆汽车从 A 地驶往 B 地，前三分之一路段为普通公路，其余路段为高速公路．已知汽车在普通公路上行驶的速度为60 km/h，在高速公路上行驶的速度为 100 km/h，汽车从 A 地到 B 地一共行驶了2.2 h．请你根据以上信息，就该汽车行驶的“路程”或“时间”，提出一个问题，并给出解答．
5. 小亮每天去体育场晨练，会见到一位田径队的叔叔也在锻炼．两人沿 400 m 环形跑道跑步，每次总是小亮跑完 2 圈时，叔叔跑完 3 圈．
   (1) 一天，两人同时同地出发，反向而跑，小亮看了一下计时表，发现隔了 32 s 两人第一次相遇，求两人的速度．
   (2) 第二天小亮打算和叔叔同时同地出发，沿跑道同向而跑，看叔叔隔多少时间与他第一次相遇．你能先给小亮预测一下吗？

数学活动

自己动手做一根杆秤

杆秤是中国独立发明的度量物体质量的衡器，如图 1 所示．它是我国古代劳动人民的智慧结晶．使用时，将被测物挂在秤钩上，一手提起秤纽，一手移动秤砣，使秤杆平衡，观察秤星，就可以读出物体的质量数．当有两个秤纽时，靠近秤钩的一个是称量较重物体时使用的．

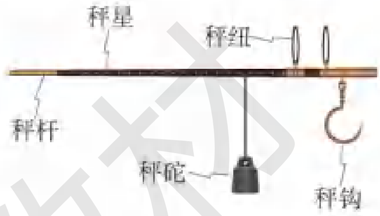


图 1

1．准备一根稍长一些、两端粗细相同的筷子（或者硬的细塑料管）和 4 个相同质量的砝码．在筷子正中间点 A 处，拴细绳将筷子悬挂起来，发现筷子保持水平位置．分别在筷子两端 B、C 处（必须和点 A 等距离）各挂上一个砝码，如图 2 所示，此时筷子依然保持水平．

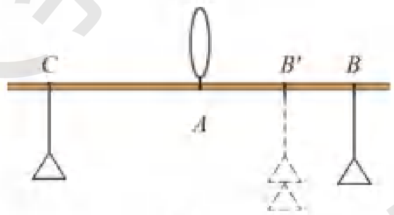


图 2

2．若在点 B 处挂上两个砝码，筷子还保持水平吗？若不能保持水平，扶住筷子，尝试移动点 B 处的砝码到图 2 中的点 B'处，设法让筷子重新保持水平．分别测量点 C、B'与点 A 的距离，它们有什么关系？若在点 B'处再添上一个砝码呢？

3．将上面的成果稍加改动，就可以制作一个简易的杆秤：将拴细绳的点 A 移动到距离点 B 10 mm 处，在点 B 处加上秤钩并固定，如图 3 所示．设点 C 处可移动的砝码（秤砣）为 20 g，秤杆质量不计，分别就以下情形说一说你打算怎样设制秤杆上的秤星，使之可以测量一定范围内物体的质量：

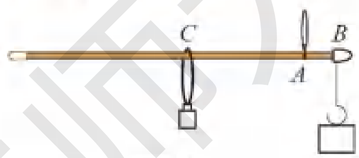


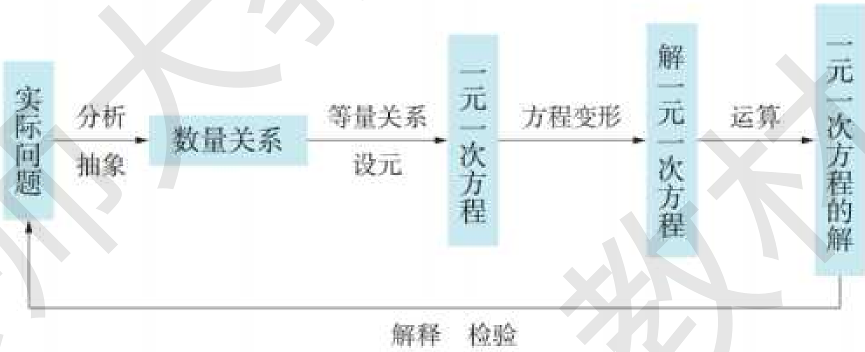
图 3

（1）若细绳和秤钩的质量都不计；

（2）若细绳的质量不计，秤钩的质量为 5 g．

小结

一、知识结构



二、要点

1. 对一元一次方程的认识，要联系生活实际，在解决实际问题的过程中体会：方程是反映现实世界数量相等关系的数学模型.

2. 解一元一次方程时，既要注意合理地对方程进行变形，也要注意根据方程的特点灵活运用方程的变形规则.

3. 在应用一元一次方程解决实际问题时，要学会分析问题的本领．能根据题意，将实际问题转化为数学问题，特别是要能够寻求主要的等量关系，列出方程．求得方程的解后，要注意检验所得结果是否符合实际问题的要求.

复习题

A 组

1. 解下列方程：

(1) $\frac{2}{3}x-1=\frac{1}{2}x+3$；　　(2) $5(x-5)+2(x-12)=0$；

(3) $4x+3=2(x-1)+1$；　　(4) $y+\frac{1}{2}=\frac{2-y}{3}$；

(5) $\frac{2}{7}(3x+7)=2-\frac{3}{2}x$；　　(6) $\frac{2x+5}{6}-\frac{3x-2}{8}=1$.

2. (1) x 取何值时，代数式 $4x-5$ 与 $3x-6$ 的值互为相反数？

(2) k 取何值时，代数式 $\frac{k+1}{3}$ 的值比 $\frac{3k+1}{2}$ 的值小 1？

3. 课外活动中一些学生分组参加活动，原来每组 8 人，后来重新编组，每组 12 人，这样就比原来减少 2 组．问：这些学生共有多少人？

4. 一种药品现在售价为每盒 56.10 元，比原来降低了 15%．问：原售价为多少元？

5. 用一根直径为 12 cm 的圆柱形铅柱，铸造 10 只直径为 12 cm 的铅球．问：应截取多长的铅柱？（球的体积公式为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$）

6. 一个三位数，百位数字比十位数字大 1，个位数字比十位数字的 3 倍少 2．若将三个数字的顺序颠倒后，所得的三位数与原三位数的和是 1 171．求这个三位数．

7. 七年级 3 个班为希望小学捐赠图书．七(1)班捐了 152 册，七(2)班捐书数是 3 个班捐书数的平均数，七(3)班捐书数是 3 个班捐书总数的 40%． 3 个班共捐了多少册？

B 组

8. 解下列方程：

(1) $\frac{3}{2}\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}\right]=5x$；　(2) $2-\frac{3x-7}{4}=-\frac{x+17}{5}$；

(3) $2.4-\frac{x-4}{2}=\frac{3}{5}x$；　(4) $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}x-1\right)-2-x=2$.

9. 已知 $x=\frac{2}{3}$ 是方程 $3\left(m-\frac{3}{4}x\right)+\frac{3}{2}x=5m$ 的解，求 m 的值.

10. 当 k 取何值时，关于 x 的方程 $2(2x-3)=1-2x$ 和 $8-k=2(x+1)$ 的解相同？

11. 学校在植树活动中种了杨树和杉树两类树木，已知种植杨树的棵数比总数的一半多 56 棵，种植杉树的棵数比总数的三分之一少 14 棵. 两类树木各种了多少棵？

12. 从甲地到乙地，长途汽车原需行驶 7 h，开通高速公路后，路程缩短了 30 km，车速平均每小时增加了 30 km，结果只需 4 h 即可到达. 求甲、乙两地之间高速公路的路程.

C 组

13. 当 $x=2$ 时，代数式 $2x^2+(3-c)x+c$ 的值是 10，求当 $x=-3$ 时这个代数式的值.

14. 解下列方程：

(1) $|x-3|=2$；　(2) $\frac{1}{5}|2x+1|=1$.

15. 小明为班级购买笔记本用作晚会上的奖品. 回来时向生活委员小亮交账说："一共买了 36 本，有两种规格，单价分别为 1.80 元和 2.60 元. 去时我领了 100 元，现在找回 27.60 元." 小亮算了一下，说："你肯定搞错了." 小明一想，发觉的确不对，因为他把自己口袋里原有的 2 元钱一起当作找回的钱款给了小亮. 请你算一算：两种笔记本各买了多少？想一想有没有可能找回 27.60 元，试应用方程的知识予以解释.

16. 七年级(5)班有 46 位同学，安排值日生时要考虑：周一至周五每天除打扫教室外，还要打扫学校包干区；包干区面积不大，平时人数可少些，周五大扫除时要和打扫教室的人数差不多；周一早晨需安排 1 位或 2 位同学打扫教室；每位同学每周轮到一次值日. 请你代理劳动委员，安排值日人数.

第 6 章　一次方程组

“我们的小世界杯”足球赛规定：胜一场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分．勇士队赛了 9 场，共得 17 分．已知这个队负了 2 场，那么这个队胜了几场？平了几场呢？

设勇士队胜了 x 场，平了 y 场，可列出方程组：

$$\begin{cases} x+y=9-2, \\ 3x+y=17. \end{cases}$$

这就要研究含有两个未知数的方程组了！

★　本章将研究一次方程组的解法，并应用一次方程组解决一些实际问题，从中体会消元的思想方法．

6.1 二元一次方程组和它的解

问题 1 暑假里，某地组织了“我们的小世界杯”足球邀请赛．比赛规定：胜一场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分．勇士队在第一轮比赛中赛了 9 场，负了 2 场，共得 17 分．那么这个队胜了几场？平了几场呢？

你会解决这个问题吗？

思考 问题 1 中告诉了我们哪些等量关系？问题 1 中有两个未知数，如果分别设为 x、y，又会怎样呢？

探索 在下表的空格中填入数字或式子．

	胜	平	合 计
场　　数	x	y	
得　　分			

设勇士队胜了 x 场，平了 y 场，那么根据题意，得

$$x+y=9-2 \qquad ①$$

和

$$3x+y=17. \qquad ②$$

这两个方程有什么共同特点？

像这样，有两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是 1 的方程，叫做**二元一次方程**.

这个问题中，两个未知量(比赛场数)要满足两个等量关系．相应地，两个未知数 x、y 必须同时满足①②两个方程．因此，把这两个方程合在一起，并写成

$$\begin{cases} x+y=7, & ① \\ 3x+y=17. & ② \end{cases}$$

像这样，两个二元一次方程合在一起，就组成了一个**二元一次方程组**(system of linear equations with two unknowns).

用尝试检验、列算式或者通过列一元一次方程都可以求得勇士队胜了 5 场，平了 2 场，即 $x=5$，$y=2$.

这里的 $x=5$ 与 $y=2$ 既满足方程①，即

$$5+2=7;$$

又满足方程②，即

$$3\times5+2=17,$$

我们就说 $x=5$ 与 $y=2$ 是二元一次方程组

$$\begin{cases} x+y=7, \\ 3x+y=17 \end{cases}$$

的解，并记作

$$\begin{cases} x=5, \\ y=2. \end{cases}$$

一般地，使二元一次方程组中两个方程的左、右两边的值都相等的一对未知数的值，叫做**二元一次方程组的解**.

问题2　某校现有校舍 $20000\,m^2$，计划拆除部分旧校舍，改建新校舍，使校舍总面积增加30%．若新建校舍的面积为被拆除的旧校舍面积的4倍，则应拆除多少旧校舍，建造多少新校舍？

试一试

若设应拆除 $x\ m^2$ 旧校舍，建造 $y\ m^2$ 新校舍，请你根据题意列出方程组.

习题6.1

A 组

1. 设适当的未知数，列出二元一次方程组：

（1）甲、乙两数的和为14，甲数的 $\frac{1}{3}$ 比乙数的2倍少7，求这两个数；

（2）摩托车的速度是货车速度的 $\frac{3}{2}$ 倍，两车从相距75 km的两地同时出发，相向而行，45 min后相遇，求摩托车和货车的速度；

（3）某种时装的单价是某种皮装单价的1.4倍，5件皮装比3件时装贵700元，求时装和皮装的单价.

2. 已知三对数值：$\begin{cases} x=-8, \\ y=10; \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ y=-6; \end{cases}$ $\begin{cases} x=10, \\ y=-1. \end{cases}$

（1）哪几对数值能使方程 $\frac{1}{2}x-y=6$ 的左、右两边的值相等？

（2）哪几对数值是方程组 $\begin{cases} \frac{1}{2}x-y=6, \\ 2x+31y=-11 \end{cases}$ 的解？

B 组

3. 根据题意设未知数，并列出方程或方程组(不必求解)：

(1) 刘老师在暑假开始时，给全班 50 名学生每人发了一封举办夏令营活动通知的信件，共需邮资 43.60 元. 已知本市邮资为每封 0.80 元，外地邮资为每封 1.20 元. 问：班级中有多少名学生家住本市，多少名学生家住外地？

(2) 某校课外阅读小组组员订甲、乙两份杂志，其中甲杂志是月刊，每月一期定价为 6.2 元；乙杂志是双月刊，两个月一期定价为 6.6 元. 每位组员都是其中一份杂志订半年，另一份杂志订全年. 经统计，甲杂志订费为 2418 元，乙杂志订费为 1089 元. 求这个课外阅读小组的人数.（解答这个问题应该如何设未知数？和同学讨论，说一下你的想法）

6.2 二元一次方程组的解法

在 6.1 节的问题 2 中，设应拆除 x m^2 旧校舍，建造 y m^2 新校舍，那么根据题意，可列出方程组

$$\begin{cases} y - x = 20000 \times 30\%, & ① \\ y = 4x. & ② \end{cases}$$

怎样求这个二元一次方程组的解呢？

探索 方程②表明，y 与 $4x$ 的值是相等的，因此，方程①中的 y 可以看成 $4x$，即将②代入①：

$$y = \boxed{4x}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{y} - x = 20000 \times 30\%,$$

可得 $$4x - x = 20000 \times 30\%.$$

通过“代入”，“消去”了 y，得到了一元一次方程，就可以解了！

解 把②代入①，得

$$4x - x = 20\,000 \times 30\%,$$
$$3x = 6\,000,$$
$$x = 2\,000.$$

把 $x = 2\,000$ 代入②，得

$$y = 8\,000.$$

所以
$$\begin{cases} x = 2\,000, \\ y = 8\,000. \end{cases}$$

答：应拆除 $2\,000\ \mathrm{m}^2$ 旧校舍，建造 $8\,000\ \mathrm{m}^2$ 新校舍.

在这个解法中，通过将②代入①，能消去未知数 y，得到一个关于 x 的一元一次方程，求出它的解，进而由②求出 y 的值.

用同样的方法可以解 6.1 节问题 1 中的二元一次方程组.

▶ **例 1** 解方程组：

$$\begin{cases} x + y = 7, & ① \\ 3x + y = 17. & ② \end{cases}$$

这里没有一个方程是一个未知数用另一个未知数表示的形式，怎么办呢？

解 由①，得

$$y = 7 - x. \quad ③$$

把③代入②，得

$$3x + 7 - x = 17,$$

解得
$$x = 5.$$

把 $x = 5$ 代入③，得

$$y = 2.$$

所以
$$\begin{cases} x = 5, \\ y = 2. \end{cases}$$

思考 回顾并概括上面的解答过程，并想一想，怎样解方程组：

$$\begin{cases}3x-5y=6,\\x+4y=-15.\end{cases}$$

练习

解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x=3y+2,\\x+3y=8;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}4x-3y=17,\\y=7-5x;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x-y=-5,\\3x+2y=10;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}2x-7y=8,\\y-2x=-3.2.\end{cases}$

例 2 解方程组：

$$\begin{cases}2x-7y=8, & ①\\3x-8y-10=0. & ②\end{cases}$$

分析 能不能将其中一个方程适当变形，用一个未知数来表示另一个未知数呢？

解 由①，得

$$x=4+\frac{7}{2}y. \quad ③$$

这里是先消去 x，得到关于 y 的一元一次方程．可以先消去 y 吗？试一试．

把③代入②，得

$$3\left(4+\frac{7}{2}y\right)-8y-10=0,$$

解得

$$y=-0.8.$$

把 $y=-0.8$ 代入③，得

$$x=4+\frac{7}{2}\times(-0.8),$$

即 $$x=1.2.$$

所以 $$\begin{cases}x=1.2,\\y=-0.8.\end{cases}$$

练习

1. 把下列各方程变形为用一个未知数的代数式表示另一个未知数的形式：

(1) $4x-y=-1$；

(2) $5x-10y+15=0$.

2. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}2x-4y=6,\\3x+2y=17;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3y=x+4,\\2x+5y=-19;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x+3y=7,\\3x-5y=1;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}3x+5y=5,\\3x-4y=23.\end{cases}$

例3 解方程组：

$$\begin{cases}3x+5y=5,&①\\3x-4y=23.&②\end{cases}$$

探索 注意到这个方程组的未知数 x 的系数相同(都是3)．把这两个方程的左、右两边分别相减，能得到什么结果?

把这两个方程的左、右两边分别相减，就消去了 x，得到

$$9y=-18,$$

即 $$y=-2.$$

把 $y=-2$ 代入①，得

$$3x+5\times(-2)=5,$$

解得 $$x=5.$$

这样，我们求得了一对 x、y 的值．显然，$\begin{cases}x=5,\\y=-2\end{cases}$ 是原方程组的解．

思考 从上面的解答过程中，你发现了二元一次方程组的新解法吗？

▶ **例 4** 解方程组：

$$\begin{cases}3x+7y=9, & ①\\4x-7y=5. & ②\end{cases}$$

怎样消去一个未知数？先消去哪一个比较简便？

解 ①＋②，得

$$7x=14,$$

即

$$x=2.$$

将 $x=2$ 代入①，得

$$6+7y=9,$$

解得

$$y=\frac{3}{7}.$$

所以

$$\begin{cases}x=2,\\y=\frac{3}{7}.\end{cases}$$

概括 在解例 1、例 2 时，我们是通过“代入”消去一个未知数，将方程组转化为一元一次方程来解的．这种解法叫做**代入消元法**，简称**代入法**．

在解例 3、例 4 时，我们是通过将两个方程的两边分别相加(或相减)消去一个未知数，将方程组转化为一元一次方程来解的．这种解法叫做**加减消元法**，简称**加减法**．

“代入”也好，“加减”也罢，基本思想是通过“消元”和“转化”，将新问题“化归”为老问题来解决．

练习

解下列方程组：

(1) $\begin{cases}5x+y=7,\\3x-y=1;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}4x-3y=5,\\4x+6y=14;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}6x+7y=5,\\6x-7y=19;\end{cases}$　(4) $\begin{cases}0.5x-3y=-1,\\-\dfrac{1}{2}x+5y=3.\end{cases}$

例 5 解方程组：

$$\begin{cases}3x-4y=10, & ①\\5x+6y=42. & ②\end{cases}$$

直接相加减不能消去一个未知数，怎么办呢？

思考 例 3 和例 4 的方程组有一个共同特点，即两个方程中有一个未知数的系数的绝对值相等，所以可以直接通过加(或减)消元．这个方程组能不能通过变形，转化成例 3 或例 4 的形式呢？

解 ①×3，②×2，得

$$\begin{cases}9x-12y=30, & ③\\10x+12y=84. & ④\end{cases}$$

③+④，得
$$19x=114,$$
即
$$x=6.$$

把 $x=6$ 代入②，得
$$30+6y=42,$$
解得
$$y=2.$$

所以
$$\begin{cases}x=6,\\y=2.\end{cases}$$

想一想，能否先消去 x 再求解？怎么做？

试一试

在解本节例 2 的方程组

$$\begin{cases}2x-7y=8,\\3x-8y-10=0\end{cases}$$

时，用了什么方法？现在你不妨用加减法试一试，看哪种方法比较简便．

练习

解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x-2y=6,\\2x+3y=17;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}4x-2y=14,\\5x+y=7;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x-3y=-20,\\3x+7y=100;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}2x-3y=8,\\5y-7x=5.\end{cases}$

▶ **例 6**　某蔬菜公司收购到某种蔬菜 140 t，准备加工后上市销售．该公司的加工能力是：每天可以粗加工 16 t 或者精加工 6 t．现计划用 15 天完成加工任务，该公司应安排几天粗加工，几天精加工？如果每吨蔬菜粗加工后的利润为 1 000 元，精加工后的利润为 2 000 元，那么照此安排，该公司出售这些加工后的蔬菜共可获利多少元？

分析　本题的关键是解答第一个问题，即先求出安排粗加工和精加工的天数．从题目的信息中我们可以得到这样的等量关系：

（1）粗加工天数 + 精加工天数 = 15；

（2）粗加工任务 + 精加工任务 = 140.

设粗加工和精加工的天数分别为 x、y，将两个等量关系直接“翻译”就可列出方程组.

解 设应安排 x 天粗加工，y 天精加工．根据题意，得

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ 16x + 6y = 140. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x = 5, \\ y = 10. \end{cases}$$

出售这些加工后的蔬菜共可获利

$$1\,000 \times 16 \times 5 + 2\,000 \times 6 \times 10 = 200\,000(\text{元}).$$

答：应安排 5 天粗加工，10 天精加工．加工后出售共可获利 200 000 元.

概括 在第 5 章中，我们通过列一元一次方程解决了一些简单的实际问题．在这里，又通过列二元一次方程组解决了另一些实际问题．实际上，有很多问题都存在着一些等量关系，我们可以通过列方程或方程组的方法来处理．列方程(或方程组)解决实际问题的过程可以概括为：

$$\boxed{\text{问题} \xrightarrow[\text{抽象}]{\text{分析}} \text{方程(组)} \xrightarrow[\text{检验}]{\text{求解}} \text{解答}}$$

要注意的是，解决实际问题的方法往往是多种多样的，应该根据具体问题灵活选用.

练习

1. 22 名工人按定额完成了 3 400 件产品，其中熟练工每人定额 200 件，学徒工每人定额 150 件．问：这 22 名工人中熟练工和学徒工各有多少名？
2. 为了改善富春河的周围环境，践行“绿水青山就是金山银山”理念，县政府决定，将该河上游 A 地的一部分牧场改为林场．改变后，预计林场和牧场共有 162 hm^2，牧场面积是林场面积的 20%．请你算一算：改变后林场和牧场的面积各为多少公顷？
3. 某船的载重为 200 t，容积为 500 m^3．现有甲、乙两种货物要运，其中甲种货物每吨体积为 4 m^3，乙种货物每吨体积为 1.5 m^3．若要充分利用这艘船的载重与容积，则甲、乙两种货物应各装多少吨？（设装运货物时不留空隙）

习题6.2

A 组

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x-3y=2, \\ 2x+y=18; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2a+b=0, \\ 4a+3b=6; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x-2y+20=0, \\ 2x+15y-3=0; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2y-8=-x, \\ 4x+3y=7. \end{cases}$

2. 第一小组的同学分铅笔若干支，若每人各得 5 支，则还剩 4 支；若有 1 人只得 2 支，则其余每人恰好各得 6 支．问：第一小组同学有多少人？铅笔有多少支？
3. 甲、乙两人要加工 400 个机器零件，若甲先做 1 天，然后两人再共做 2 天，则还有 60 个无法完成；若两人合作 3 天，则可超产 20 个．问：甲、乙两人每天各加工多少个零件？

B 组

4. 某厂第二车间的人数比第一车间人数的 $\frac{4}{5}$ 少 30 人．如果从第一车间调 10 人到第二车间，那么第二车间的人数就是第一车间人数的 $\frac{3}{4}$．问：这两个车间原来各有多少人？

5. 两块试验田去年共产花生 470 kg．改用良种后，今年共产花生 523 kg．已知第一块试验田的产量比去年增产 16%，第二块试验田的产量比去年增产 10%．求改用良种后每块试验田的产量．

（第 5 题）

*6.3 三元一次方程组及其解法

问题 在 6.1 节中，我们应用二元一次方程组，求出了勇士队在“我们的小世界杯”足球赛第一轮比赛中胜与平的场数．

在第二轮比赛中，勇士队参加了 10 场比赛，按同样的计分规则，共得 18 分．已知勇士队在比赛中胜的场数正好等于平与负的场数之和，那么勇士队在第二轮比赛中胜、平、负的场数各是多少？

这个问题可以通过列出一元一次方程或二元一次方程组来解决．

小明同学提出了一个新的思路：

问题中有三个未知数，如果设勇士队在第二轮比赛中胜、平、负的场数分别为 x、y、z，又将怎样呢？

分别将已知条件直接“翻译”，列出方程，并将它们写成方程组的形式，得

$$\begin{cases} x+y+z=10, & ① \\ 3x+y=18, & ② \\ x=y+z. & ③ \end{cases}$$

> 回忆一下二元一次方程组的解法，从中能得到什么启示？

像这样的方程组称为三元一次方程组．

怎样解三元一次方程组呢？

我们知道，解二元一次方程组的基本思想是“消元”：消去一个未知数，将方程组转化为一元一次方程求解．方法有代入消元法和加减消元法．

对于三元一次方程组，同样可以先消去某一个(或两个)未知数，转化为二元一次方程组(或一元一次方程)求解.

注意到方程③中，x 是用含 y 和 z 的代数式来表示的，把它分别代入方程①②，就可消去 x，得到

$$\begin{cases} 2y + 2z = 10, & ④ \\ 4y + 3z = 18. & ⑤ \end{cases}$$

化归思想在这里进一步得到体现，你体会到了吗？

这是一个关于 y、z 的二元一次方程组，解得

$$\begin{cases} y = 3, \\ z = 2. \end{cases}$$

把 $y = 3$，$z = 2$ 代入方程③，可以得到 $x = 5$.

所以这个三元一次方程组的解是

$$\begin{cases} x = 5, \\ y = 3, \\ z = 2. \end{cases}$$

▶ **例 1** 解方程组：

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 3, & ① \\ 3x - 2y + z = 7, & ② \\ x + 2y - 3z = 1. & ③ \end{cases}$$

解 由方程②，得

$$z = 7 - 3x + 2y. \quad ④$$

把④分别代入方程①和③，得

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4(7 - 3x + 2y) = 3, \\ x + 2y - 3(7 - 3x + 2y) = 1. \end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases} -2x + y = -5, \\ 5x - 2y = 11. \end{cases}$$

解这个二元一次方程组，得

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -3. \end{cases}$$

代入④，得

$$z = 7 - 3 - 6 = -2.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -3, \\ z = -2. \end{cases}$$

能否先消去 x（或 y）？怎么做？比较一下，哪个更简便？

这里，我们用的是代入消元法：先由方程②，用含有 x、y 的代数式表示 z，再分别代入方程①和③，消去未知数 z，转化为只含有 x、y 的二元一次方程组求解.

练习

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 3x - y + 2z = 12, \\ x - y - 3z = -4; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ y - 5z = -11, \\ 3z - 4x = 2. \end{cases}$

2. 试用加减消元法解例 1 中的方程组.

例 2 解方程组：

$$\begin{cases} 3x + 4y - 3z = 3, & ① \\ 2x - 3y - 2z = 2, & ② \\ 5x - 3y + 4z = -22. & ③ \end{cases}$$

分析 三个方程中未知数的系数都不是 1 或 −1，用代入消元法比较麻烦，可考虑用加减消元法求解.

解 ③ - ②，得

$$3x+6z=-24,$$

即
$$x+2z=-8.$$

①×3 + ②×4，得

$$17x-17z=17,$$

即
$$x-z=1.$$

得方程组

$$\begin{cases}x+2z=-8,\\x-z=1,\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}x=-2,\\z=-3.\end{cases}$$

把 $x=-2$，$z=-3$ 代入方程②，得 $y=0$.

所以原方程组的解是

$$\begin{cases}x=-2,\\y=0,\\z=-3.\end{cases}$$

能否先消去 z（或 x）？怎么做？比较一下，哪个更简便？

上述例1和例2的解答分别应用了代入消元法和加减消元法，先消去某一个未知数，将三元一次方程组转化为二元一次方程组，然后解所得的二元一次方程组，得到两个未知数的值，进而求出第三个未知数的值，从而得到原方程组的解.

练习

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x+y-z=2,\\4x-2y+3z+8=0,\\x+3y-2z-6=0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2},\\\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5},\\x+y+z=60.\end{cases}$

2. 已知 $y=ax^2+bx+c$，当 $x=-2$ 时，$y=9$；当 $x=0$ 时，$y=3$；当 $x=2$ 时，$y=5$. 求 a、b、c 的值.

习题6.3

A 组

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x-y+3z=2, \\ x-4y-2z+6=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x+y=6, \\ x+2y-z=5, \\ 5x-3y+2z=4; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y+z=-1, \\ 4x-2y+3z=5, \\ y-z=8-2x; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ 3y-4z=3, \\ 4z+5x=7. \end{cases}$

2. 某初级中学共有学生673人，已知八年级学生人数比其他两个年级人数的平均数多25人，九年级学生人数比七年级学生人数少8人．问：3个年级各有多少人？

B 组

3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x+y=8, \\ y+z=-4, \\ z+x=2; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{3}=z, \\ x+y+z=63. \end{cases}$

6.4 实践与探索

问题1 要用20张白卡纸做长方体的包装盒，准备把这些白卡纸分成两部分，一部分做侧面，另一部分做底面．已知每张白卡纸可以做2个侧面，或者做3个底面．如果1个侧面和2个底面可以做成一个包装盒，那么如何分才能使做成的侧面和底面正好配套？

请你设计一种分法．

想一想，如果可以将一张白卡纸裁出一个侧面和一个底面，那么，该如何分这些白卡纸，才既能使做出的侧面和底面配套，又能充分利用白卡纸？

问题 2 小明在拼图时，发现 8 个大小一样的长方形，恰好可以拼成如图 6.4.1 所示的一个大长方形.

小红看见了，说："我来试一试."结果小红七拼八凑，拼成如图 6.4.2 所示的正方形. 咳，怎么中间还留下了一个洞，恰好是边长为 2 mm 的小正方形！

你能求出这些长方形的长和宽吗？

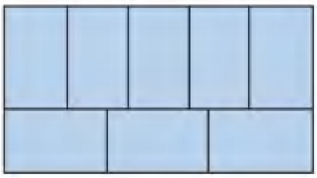


图6.4.1

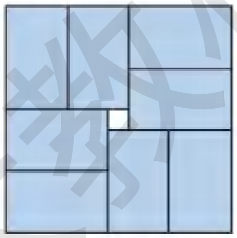


图6.4.2

探索 设长方形的长和宽分别为 x mm、y mm. 图 6.4.2 给我们提供了一个信息：

$$S_{大正方形} - 8 \times S_{长方形} = 2^2,$$

即
$$(x+2y)^2 - 8xy = 4.$$

但这是我们还没有研究过的方程！你有其他办法来解决这个问题吗？

做一做

从 5.3 节提出的问题中选出一个，用本章的方法来处理，并比较一下两种方法，谈谈你的感受.

阅读材料

鸡兔同笼

今有雉兔同笼，上有三十五头，

下有九十四足，问雉兔各几何？

这是出自我国《孙子算经》中著名的“雉(鸡)兔同笼”问题，可以认为是我国鸡兔同笼问题的始祖．对这一问题，《孙子算经》给出了简捷而又巧妙的解法：“上置头，下置足．半其足，以头除足，以足除头，即得．”（此处“除”意为“减”）

即先设金鸡独立，玉兔双足(即“半其足”)，这时共有足数为：$94 \div 2 = 47$.

在这 47 只足中，每数一只足应该有一只鸡，而每数两只足才有一只兔，也就是说，鸡的头、足数相等，而每只兔的头数却比足数少一，所以兔数为

$$47 - 35 = 12,$$

鸡数为

$$35 - 12 = 23.$$

一般情况下，如果设 x 为鸡数，y 为兔数，A 为鸡和兔的总只数，B 为鸡和兔的总足数，则

$$\begin{cases} x + y = A, \\ 2x + 4y = B, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = A - y = A - \left(\dfrac{B}{2} - A\right), \\ y = \dfrac{B}{2} - A. \end{cases}$$

这就是说，兔数恰好为足数的二分之一(半其足)与总头数之差(以头除足).

在古代朱世杰(生卒年不详)的《算学启蒙》(1299 年)、《永乐大典》中的《丁巨算法》、严恭(生卒年不详)的《通原算法》中，也有鸡兔同笼问题的记载．朱世杰的解法与《孙子算经》不同，而与现在算术解法则几乎完全一样．

习题6.4

A 组

1. 为了更有效地利用用水资源，鼓励居民节约用水，某市规定，居民生活用水按三档分段计价．第一段：每户每月用水不超过 $A\ m^3$，水价为 2.91 元/m^3；第二段：每户每月用水超过 $A\ m^3$ 但不超过 $B\ m^3$，超过部分水价按 3.71 元/m^3 计算；第三段：每户每月用水超过 $B\ m^3$，超过部分水价按 6.11 元/m^3 计算．
已知小红家上月用水 20 m^3，并没有超过 $B\ m^3$，缴纳水费 59.80 元．问：该市规定的用水标准 A 是多少？小红家按第二段超量部分计费的用水量是多少？
2. 某山区盛产一种野果，极具市场前景．一家经销公司一次收购 23 t．经市场预测，若直接销售，则每吨可获利 500 元；若经过粗加工并包装，则每吨可获利 2 500 元；若制成罐头出售，则每吨可获利 4 000 元．该公司每天可粗加工并包装 4 t 或制罐头 1.5 t．同一天两种加工方式不能同时进行，且全部原料必须不超过 7 天全部销售或加工完毕．为此，公司研究了三种方案：
(1) 全部进行粗加工并包装；
(2) 尽可能多地制作罐头，余下的直接销售；
(3) 部分制作罐头，其余进行粗加工并包装，且正好 7 天完成．
请你探究一下，为公司做决策．

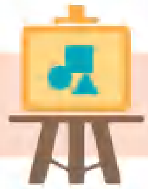
B 组

3. 长风乐园的门票价格如下表所示：

购票人数/人	1～50	51～100	100 以上
门票价/(元/人)	13	11	9

某校七年级(1)(2)两个班共 104 人去游长风乐园，其中(1)班人数较少，不到 50 人，(2)班人数较多，有 50 多人．经估算，如果两个班都以班为单位分别购票，那么一共应付 1 240 元；如果两个班联合起来，作为一个团体购票，那么可以节省不少钱．问：两个班各有多少人？
4. 在第 3 题中，如果不知道两个班的总人数，其他条件不变，你能求出各班的人数吗？

数学活动



试一下升级版的消元法

小红、小莉去花店买花．小红买了3枝玫瑰、7枝康乃馨、1枝百合，花了28元；小莉买了4枝玫瑰、10枝康乃馨、1枝百合，花了32元．小莹看到后表示自己准备三种花各买2枝，则她要付多少钱？

分析与解　设三种花的单价分别为x元、y元、z元，不难列出方程组：

$$\begin{cases}3x+7y+z=28, & ①\\4x+10y+z=32. & ②\end{cases}$$

消去z，得

$$x+3y=4.\quad ③$$

显然无法求出确定的解．但注意到问题要求的是$2x+2y+2z$整体的值，我们可以在上式中“分离”出$x+y+z$，即

$$\begin{cases}2(x+3y)+(x+y+z)=28, & ④\\3(x+3y)+(x+y+z)=32. & ⑤\end{cases}$$

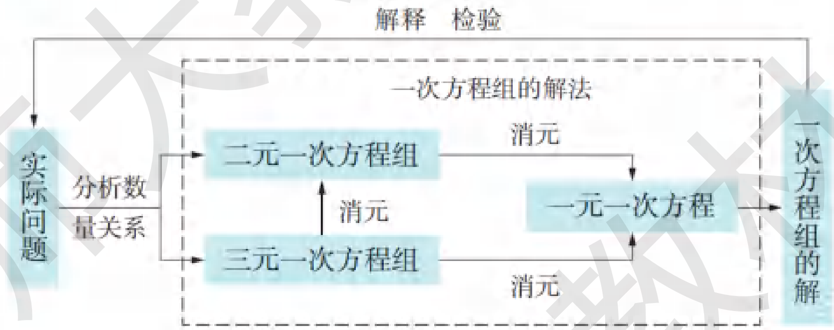
可将④×3－⑤×2，消去“多余部分”，即$x+3y$，得到$x+y+z=20$．问题解决了！用到的依然是多元方程的消元、转化的思想方法，消去的是不需要的代数式$x+3y$；也可以把③代入④⑤两式中的任意一式，得到结果．这里消去的是一个代数式整体．

试解决下面的问题：

某校举办法治常识竞赛，确定前60名参赛者获奖．原定一等奖5人，二等奖15人，三等奖40人．最后调整为一等奖10人，二等奖20人，三等奖30人．调整后一等奖平均分降低3分，二等奖平均分降低2分，三等奖平均分降低1分．已知原定二等奖的平均分比三等奖的高7分，问：调整后一等奖的平均分比二等奖的高多少？

小结

一、知识结构



二、要点

1. 在实际问题中，经常会遇到有多个未知量的问题．与一元一次方程一样，二元(或三元)一次方程组也是反映现实世界数量相等关系的数学模型．要学会将实际问题转化为数学问题，列出二元(或三元)一次方程组，最终求得符合实际问题的解．

2. 解一次方程组的基本思想是消元、转化：通过消元，把三元一次方程组转化为二元一次方程组，把二元一次方程组转化为一元一次方程．最常见的消元方法有代入法和加减法．一个方程组用什么方法来逐步消元，应根据它的特点灵活选择．

3. 通过列方程组来解实际问题时，应注意检验和正确作答．检验不仅要检查求得的解是否满足所列方程组中的每一个方程，而且要检验所得的结果是否符合实际问题的要求．

复习题

A 组

1. 填空：

（1）在 $y=\frac{2}{3}x-4$ 中，如果 $x=1.5$，那么 $y=$________；如果 $y=0$，那么 $x=$________.

（2）由 $3x-2y=5$，得到用 x 表示 y 的式子为 $y=$________.

2. 解下列方程组：

（1）$\begin{cases}3x-13y=-16,\\x+3y=2;\end{cases}$

（2）$\begin{cases}x+2y+2=0,\\7x-4y=-41;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}3t-4s=14,\\5t+4s=2;\end{cases}$

（4）$\begin{cases}5x+6y=15.2,\\3x-2y=-0.4;\end{cases}$

（5）$\begin{cases}2m+9n=4.8,\\3m-5n=-15;\end{cases}$

（6）$\begin{cases}\frac{1}{2}x+3y=\frac{2}{3},\\x-\frac{3}{4}y=-\frac{29}{12}.\end{cases}$

3. 解下列方程组：

（1）$\begin{cases}3x-2y=8,\\2y+3z=1,\\x+5y-z=-4;\end{cases}$

（2）$\begin{cases}2x-3y-z=-4,\\x+2y+2z=6,\\3x+2y+z=11.\end{cases}$

4. 在等式 $y=kx+b$ 中，当 $x=1$ 时，$y=-2$；当 $x=-1$ 时，$y=-4$. 求 k、b 的值.

5. 小明与爸爸一起做“投篮球”游戏. 两人商定规则为：小明投中 1 个得 3 分，爸爸投中 1 个得 1 分. 结果两人一共投中了 20 个，经计算，发现两人的得分恰好相等. 你能知道他们两人各投中几个吗？

6. 今年，小亮的年龄是爷爷年龄的$\frac{1}{5}$. 小亮发现，12 年之后，他的年龄将变成爷爷年龄的$\frac{1}{3}$. 试求出小亮今年的年龄.

7. 某检测站计划在规定时间内检测一批仪器，如果每天检测 30 台，那么在规定时间内只能检测计划数的$\frac{4}{5}$. 现在每天实际检测 40 台，结果不但比原计划提前了一天完成任务，还多检测了 25 台. 问：规定时间是多少天？原计划检测多少台？

B 组

8. 解下列方程组：

(1) $\frac{x+y}{2}=\frac{2x-y}{3}=x+2$;

(2) $\begin{cases}\frac{2x-1}{5}+\frac{3y-2}{4}=2,\\ \frac{3x+1}{5}-\frac{3y+2}{4}=0.\end{cases}$

9. A、B 两地相距 3 km. 甲从 A 地出发步行到 B 地，乙从 B 地出发步行到 A 地. 两人同时出发，20 min 后相遇，又经过 10 min 后，甲所余路程为乙所余路程的 2 倍. 求两人的速度.

10. 甲、乙两人同时加工一批零件，前 3 小时两人共加工 126 件，后 5 小时中甲先花了 1 小时修理工具，之后甲每小时比以前多加工 10 件，结果在后 5 小时内，甲比乙多加工了 10 件. 甲、乙两人原来每小时各加工多少件？

11. 已知三角形的周长为 18 cm，其中两条边长之和等于第三条边长的 2 倍，而它们的差等于第三条边长的$\frac{1}{3}$. 求这个三角形三边的长.

12. 二果问价（源自我国古代算书《四元玉鉴》）：

九百九十九文钱　甜果苦果买一千　甜果九个十一文
苦果七个四文钱　试问甜苦果几个　又问各该几个钱

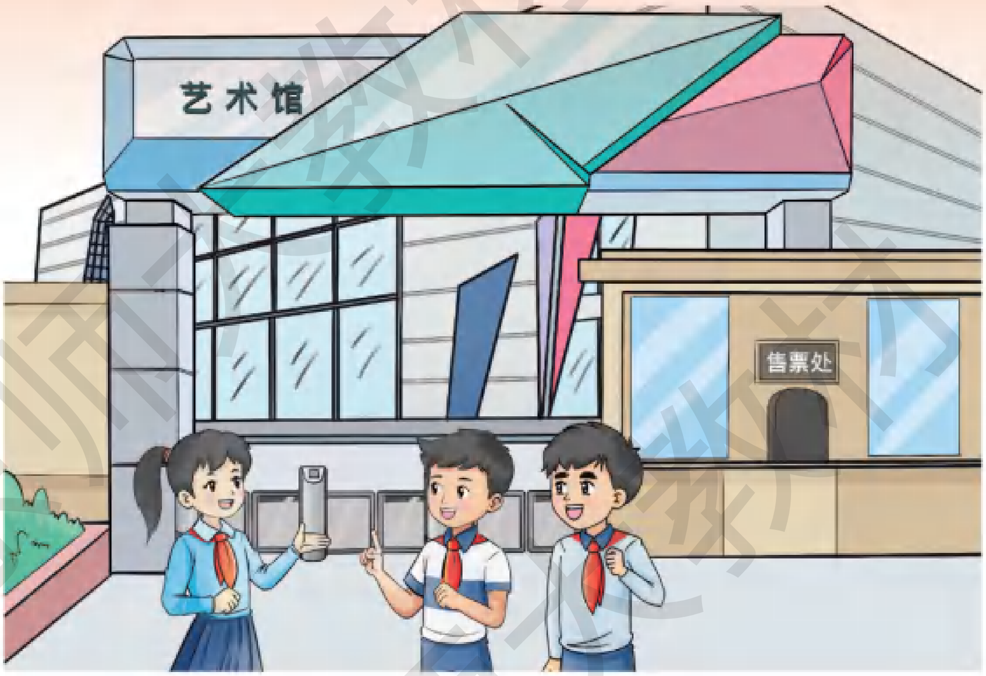
C 组

13. 一张方桌由 1 个桌面、4 条桌腿组成．如果 1 m^3 木料可以做方桌的桌面 50 个或做桌腿 300 条，现有 5 m^3 木料，那么用多少立方米木料做桌面、多少立方米木料做桌腿，做出的桌面和桌腿能恰好配成方桌？能配成多少张方桌？

14. 李老师去一家文具店给美术小组的 30 名同学买铅笔和橡皮．到了商店后发现，按商店规定，如果给全组每人都买 2 支铅笔和 1 块橡皮，那么按零售价计算，共需付 150 元；如果给全组每人都买 3 支铅笔和 2 块橡皮，那么可以按批发价计算，共需付 202.50 元．已知每支铅笔的批发价比零售价低 0.25 元，每块橡皮的批发价比零售价低 0.50 元．问：这家文具店每支铅笔和每块橡皮的批发价各是多少元？

15. 客车和货车分别在两条平行的铁轨上行驶，客车长 450 m，货车长 600 m．如果两车相向而行，那么从两车车头相遇到车尾离开共需 21 s；如果客车从后面追货车，那么从客车车头追上货车车尾到客车车尾离开货车车头共需 1 min 45 s．求两车的速度．

第 7 章　一元一次不等式



某班 27 名学生去参观艺术展，票价每张 50 元；一次购票满 30 张，每张票可优惠 10 元.

方案一：购买 27 张票；

方案二：购买 30 张票.

怎么买票划算？

这里涉及数学上的不等式！

★ 本章将类比一元一次方程，研究一元一次不等式的解法，并应用这些知识解决一些实际问题，感受不等式在研究不等关系问题中的重要作用.

7.1 认识不等式

1. 不等式

问题 艺术展的票价是每张 50 元，一次购票满 30 张，每张票可优惠 10 元. 某班有 27 名学生去参观艺术展. 当领队小华准备到售票处买 27 张票时，爱动脑筋的小敏喊住了小华，提议买 30 张票. 但有的同学不明白，明明我们只有 27 个人，买 30 张票，岂不是“浪费”吗？

那么，究竟小敏的提议对不对？是不是真的“浪费”呢？

解决这个问题的关键是比较两种方式所付款的多少.

我们不妨一起来算一算：

买 27 张票，要付款

$$50 \times 27 = 1\,350(\text{元}).$$

买 30 张票，按优惠价每张 40 元，要付款

$$40 \times 30 = 1\,200(\text{元}).$$

显然 $$1\,200 < 1\,350.$$

这就是说，买 30 张票比买 27 张票付款要少，表面上看是“浪费”了 3 张票，实际上反而节省了.

当然，如果去参观艺术展的人数较少(例如 10 人)，显然不值得去买 30 张票，还是按实际人数买票为好. 现在的问题是：少于 30 人时，有多少人去参观艺术展，买 30 张票反而划算呢？

探索 我们一起来分析上面提出的问题：

设有 x 人要去参观艺术展. 如果 $x < 30$，那么按实际人数买票 x 张，要付款 $50x$ 元；买 30 张票，要付款 $40 \times 30 = 1\,200$ 元.

如果买 30 张票划算，那么应有

$$1\,200 < 50x,$$

即 $50x > 1\,200$.

$a < b$ 就是 $b > a$，它们是一样的.

现在的问题就是：x 取哪些数值时，上式成立？

前面已经算过，当 $x = 27$ 时，上式成立. 让我们再取一些值试一试，将结果填入下表：

x	$50x$	比较 $50x$ 与 1 200 的大小	$50x > 1\,200$ 是否成立
21	1 050	$50x < 1\,200$	不成立
22			
23			
24			
25			
26			
27	1 350	$50x > 1\,200$	成立
28			
29			

由上表可见，当 $x =$ ________________ 时，$50x > 1\,200$ 成立. 也就是说，少于 30 人时，至少要有________人参观艺术展，买 30 张票反而划算.

概括 像上面出现的 $1\,200 < 1\,350$，$x < 30$，$50x < 1\,200$，$50x > 1\,200$ 那样，用不等号"<""\>"或"≤""≥"表示不等关系的式子，叫做**不等式**(inequality).

"≤"读作"小于或等于"，即"不大于"；"≥"读作"大于或等于"，即"不小于".

本章一开始提出的问题，引出的不等式 $50x > 1\,200$，它含有未知数 x. 我们感兴趣的是，未知数 x 取怎样

的值，能使不等式成立．能使不等式成立的未知数的值，叫做**不等式的解**(solution of inequality).

如上面的问题中，由上表可以看出，$x=25$，26，27，…都是不等式$50x>1200$的解，而$x=24$、23、22、21等都不是它的解．

▶ **例** 用不等式表示下列关系，并分别写出两个满足不等式的值：

(1) x的一半小于-1；

(2) y与4的和大于0.5；

(3) a是负数；

(4) b是非负数．

解 (1) $\frac{1}{2}x<-1$．如$x=-3$、-4．

(2) $y+4>0.5$．如$y=0$、1．

(3) $a<0$．如$a=-3$、-4．

(4) b是非负数，即b不是负数，所以$b\geqslant 0$(即$b>0$或$b=0$)．如$b=0$、2．

> $b>0$或$b=0$，通常可表示成$b\geqslant 0$．

2. 不等式的解集

在上面的例题中，满足各个不等式的数有许多个．例如，满足$\frac{1}{2}x<-1$的数，除了-3、-4之外，还有-5，-6，-7，…它们都是不等式$\frac{1}{2}x<-1$的解．

实际上，小于-2的每一个数都是不等式$\frac{1}{2}x<-1$的解，而不小于-2的每一个数都不是不等式$\frac{1}{2}x<-1$的解．不等式$\frac{1}{2}x<-1$的解有无数个，它们组成一个集合，称为不等式$\frac{1}{2}x<-1$的解集．

> 你知道上面例题中其他不等式的解集是由哪些数组成的吗？

概括 一个不等式的所有解，组成这个不等式的解的集合，简称为这个不等式的**解集**(solution set).

研究不等式的一个重要任务，就是求出不等式的解集．求不等式的解集的过程，叫做**解不等式**.

例如，由上面的讨论可知，不等式 $\frac{1}{2}x<-1$ 的解集为 $x<-2$，可以在数轴上直观地表示出来，如图 7.1.1 所示.

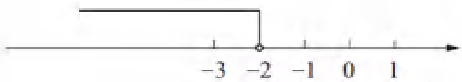


图7.1.1

再如，不等式 $x+2\geqslant5$ 的解集为 $x\geqslant3$，它也可以在数轴上直观地表示出来，如图 7.1.2 所示.

> 比较图 7.1.1 与图 7.1.2，它们有什么区别?

图7.1.2

在数轴上，解集 $x\leqslant a$，表示数 a 的点左边的部分，包括表示数 a 的点在内，这一点画成实心圆点；而解集 $x<a$，则表示数 a 的点左边的部分，但不包括表示数 a 的点，这一点画成空心圆圈．对于解集 $x\geqslant a$ 和 $x>a$ 在数轴上的表示，与此相仿.

练习

1. 用不等式表示：

(1) x 的 3 倍大于 5；

(2) y 与 2 的差小于 -1；

(3) x 的 2 倍大于 x；

(4) y 的 $\frac{1}{2}$ 与 3 的差是负数；

(5) a 是正数；

(6) b 不是正数.

2. 下列各数中，哪些是不等式 $x+2>5$ 的解？哪些不是？

$$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1.5,\ 2.5,\ 3,\ 3.5,\ 5,\ 7.$$

3. 根据“当 x 为任何正数时，都能使不等式 $x+3>2$ 成立”，能不能说“不等式 $x+3>2$ 的解集是 $x>0$”？为什么？

4. 两个不等式的解集分别为 $x<2$ 和 $x\leqslant 2$，它们有什么不同？在数轴上怎样表示它们的区别？

习题7.1

A组

（第 1 题）

1. 如图是一部电梯的载重标准，设该电梯的载重量为 x（单位：kg），则 x 满足的不等式为__________.

2. 用不等式表示：

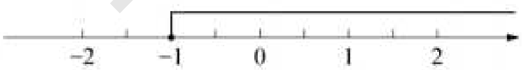
（1）x 的 $\frac{1}{2}$ 与 3 的差大于 2；（2）$2x$ 与 1 的和小于零；

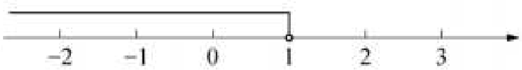
（3）a 的 2 倍与 4 的差是正数；（4）b 的 $\frac{1}{2}$ 与 c 的和是负数；

（5）a 与 b 的差是非负数；（6）x 的绝对值与 1 的和大于 1.

3. 写出不等式 $|3-2x|<1$ 的两个不同的解.

4. 写出下列各图所表示的不等式的解集：

（1）

（2）

5. 两个不等式的解集分别为 $x<1$ 和 $x\geqslant 1$，分别在数轴上将它们表示出来.

B 组

6. 若关于 x 的不等式 $x < a$ 有且只有一个正整数解，求 a 的取值范围.

7. 已知 2 和 3 都是关于 x 的不等式 $x + a > 1$ 的解，写出 a 的一个可能取值.

7.2　不等式的基本性质

在解一元一次方程时，我们根据等式的基本性质对方程进行变形. 在研究解不等式时，我们需要认识不等式的基本性质.

等式有哪些基本性质?

探索　如图 7.2.1 所示，一个倾斜的天平两边分别放有重物，其质量分别为 a 和 b，且 $a > b$. 如果在两边盘中分别加上等质量的砝码 c，那么盘子仍然像原来那样倾斜，即有 $a + c > b + c$.

图7.2.1

概括　**不等式的基本性质 1　如果 $a > b$，那么**

$$a + c > b + c,\quad a - c > b - c.$$

这就是说，不等式的两边都加上(或都减去)同一个数，不等号的方向不变.

思考　不等式的两边都乘以(或都除以)同一个不为 0 的数，不等号的方向是否也不变呢?

试一试

将不等式 $7>4$ 的两边都乘以同一个数，例如 3、2、1、0、-1、-2、-3，比较所得结果的大小，用“<”“>”或“=”填空：

$$7\times3\ \_\_\_\_\ 4\times3,$$
$$7\times2\ \_\_\_\_\ 4\times2,$$
$$7\times1\ \_\_\_\_\ 4\times1,$$
$$7\times0\ \_\_\_\_\ 4\times0,$$
$$7\times(-1)\ \_\_\_\_\ 4\times(-1),$$
$$7\times(-2)\ \_\_\_\_\ 4\times(-2),$$
$$7\times(-3)\ \_\_\_\_\ 4\times(-3),$$
$$\cdots\cdots$$

从中你能发现什么？

概括　**不等式的基本性质 2　如果 $a>b$，并且 $c>0$，那么**

$$ac>bc,\quad \frac{a}{c}>\frac{b}{c}.$$

不等式的基本性质 3　如果 $a>b$，并且 $c<0$，那么

$$ac<bc,\quad \frac{a}{c}<\frac{b}{c}.$$

这就是说，不等式的两边都乘以(或都除以)同一个正数，不等号的方向不变；不等式的两边都乘以(或都除以)同一个负数，不等号的方向改变.

不等式的基本性质可以作为推理的依据.

例 1 说明下列结论的正确性：

（1）如果 $a-b>0$，那么 $a>b$；

（2）如果 $a-b<0$，那么 $a<b$.

解 （1）因为 $a-b>0$，将不等式的两边都加上 b，由不等式的基本性质 1，可得

$$a-b+b>0+b,$$

所以 $$a>b.$$

（2）因为 $a-b<0$，将不等式的两边都加上 b，由不等式的基本性质 1，可得

$$a-b+b<0+b,$$

所以 $$a<b.$$

交换例 1 中两道小题的条件和结论，其正确性不变，即有

如果 $a>b$，那么 $a-b>0$；

如果 $a<b$，那么 $a-b<0$.

由此可见，$a>b$ 与 $a-b>0$、$a<b$ 与 $a-b<0$ 可以相互转化. 因此，要比较 a 与 b 的大小，只需要比较 $a-b$ 与 0 的大小.

试说明这两个结论的正确性.

例 2 利用不等式的基本性质说明下列结论的正确性：

（1）如果 $a>b$，$c>d$，那么 $a+c>b+d$；

（2）如果 a、b、c、d 都是正数，且 $a>b$，$c>d$，那么 $ac>bd$.

解 （1）因为 $a>b$，所以

$$a+c>b+c. \quad ①$$

又因为 $c>d$，所以

$$b+c>b+d. \quad ②$$

由①②，可得

$$a+c>b+d.$$

由数的大小比较可知，不等关系具有传递性，即如果 $a>b$ 且 $b>c$，那么 $a>c$. 它也可以作为推理的依据.

(2) 因为 $a > b$， c 是正数，所以

$$ac > bc. \quad ①$$

又因为 $c > d$， b 是正数，所以

$$bc > bd. \quad ②$$

由①②，可得

$$ac > bd.$$

练习

1. 说出下列不等式变形的依据：

(1) 由 $x - 2 > 0$，得 $x > 2$；

(2) 由 $1 - 2x \leqslant 0$，得 $x \geqslant \frac{1}{2}$.

2. 利用不等式的基本性质说明下列结论的正确性：

(1) 一个数加上一个正数比这个数大；

(2) 一个数加上一个负数比这个数小.

3. 一个正数乘以一个数，一定比这个正数大吗？为什么？

习题7.2

A 组

1. 已知 $a > b$，判断下列不等式是否正确：

(1) $a - 1 > b - 1$；　　(2) $2 - a > 2 - b$；

(3) $a + b > 2b$；　　(4) $2 - a < 1 - b$.

2. 下列变形是否正确？请说明理由.

(1) 由 $3 - 2a > 1$ 得到 $a < 1$；

(2) 由 $3b - 2a \leqslant 3a - 2b$ 得到 $a \leqslant b$.

3. 比较下列各组数的大小：

(1) $|a|$ 与 $|a|+1$；

(2) $|a|$ 与 $2|a|$.

B 组

4. 如果 a 和 b 均为正数，那么 $\frac{b}{a}$ 一定比 $\frac{b+1}{a+1}$ 小吗？请说明理由.

5. 判断下列说法是否正确，并说明理由：

(1) 如果 $a>b>c$，那么 $a+b>c$；

(2) 如果 $a>b>c>0$，那么 $ab>ac>bc$.

6. 如果 a、b、c、d 都是负数，且 $a>b$，$c>d$，那么 ac 与 bd 的大小关系如何？请说明你的结论的正确性.

7.3 解一元一次不等式

在前面我们遇到过一些含有未知数的不等式，例如

$$5x>1200,\quad x+2>5,\quad \frac{1}{2}x<-1$$

这些不等式有什么共同特点？

等. 像这样，只含有一个未知数、左右两边都是整式，并且未知数的次数都是1的不等式，叫做**一元一次不等式**(linear inequality with one unknown).

与解方程类似，解不等式的过程，就是利用不等式的基本性质，将不等式进行适当的变形，得到 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式.

▶ **例1** 解不等式：

(1) $x-7<8$；

(2) $3x<2x-3$.

解 （1）不等式的两边都加上 7，不等号的方向不变，所以

$$x - 7 + 7 < 8 + 7,$$

得

$$x < 15.$$

（2）不等式的两边都减去 $2x$（即都加上 $-2x$），不等号的方向不变，所以

$$3x - 2x < 2x - 3 - 2x,$$

得

$$x < -3.$$

这两道小题中不等式的变形与方程的什么变形类似？

这里的变形，与方程变形中的移项类似．试总结一下：怎样进行不等式的“移项”？

▶ **例 2** 解不等式：

（1）$\frac{1}{2}x > -3$；

（2）$-2x < 6$.

解 （1）不等式的两边都乘以 2，不等号的方向不变，所以

$$\frac{1}{2}x \times 2 > (-3) \times 2,$$

得

$$x > -6.$$

（2）不等式的两边都除以 $-2$$\left(即都乘以 -\frac{1}{2}\right)$，不等号的方向改变，所以

$$-2x \times \left(-\frac{1}{2}\right) > 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right),$$

得

$$x > -3.$$

这两小题中不等式的变形与方程的什么变形类似？有什么不同？

这里的变形，与方程变形中的“将未知数的系数化为 1”类似，它依据的是不等式的基本性质 2 或不等式的基本性质 3．要注意不等式的两边都乘以（或都除以）的数是正数还是负数，从而确定变形时不等号的方向是否需要改变．

▶ **例 3** 解下列不等式，并将解集在数轴上表示出来：

(1) $2x-1<4x+13$；

(2) $2(5x+3)\leqslant x-3(1-2x)$.

解 (1) 移项，得

$$2x-4x<13+1.$$

合并同类项，得

$$-2x<14.$$

两边都除以 -2，得

$$x>-7.$$

它在数轴上的表示如图 7.3.1 所示.

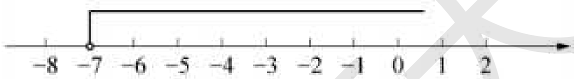


图7.3.1

一元一次不等式与一元一次方程的解法有哪些类似之处？有什么不同？

(2) 去括号，得

$$10x+6\leqslant x-3+6x.$$

移项、合并同类项，得

$$3x\leqslant-9.$$

两边都除以 3，得

$$x\leqslant-3.$$

它在数轴上的表示如图 7.3.2 所示.

图7.3.2

▶ **例 4** 当 x 取何值时，代数式 $\frac{x+4}{3}$ 与 $\frac{3x-1}{2}$ 的差大于 1？

解 根据题意，得

$$\frac{x+4}{3}-\frac{3x-1}{2}>1.$$

去分母，得

$$2(x+4)-3(3x-1)>6.$$

去括号，得

$$2x+8-9x+3>6.$$

移项、合并同类项，得

$$-7x>-5.$$

两边都除以 -7，得

$$x<\frac{5}{7}.$$

所以，当 x 取小于 $\frac{5}{7}$ 的任何数时，代数式 $\frac{x+4}{3}$ 与 $\frac{3x-1}{2}$ 的差大于 1.

回顾例 3 和例 4 的解答过程，总结一下解一元一次不等式的基本步骤，与你的同伴讨论和交流.

练习

1. 解下列不等式，并把解集在数轴上表示出来：

(1) $2x+1>3$；　　(2) $2-x\leqslant 1$；

(3) $2(x+1)<3x$；　　(4) $3(x+2)\geqslant 4(x-1)+7$.

2. 解不等式：$\frac{2x-3}{3}>\frac{3x-2}{2}$.

▶ **例 5** 一个工程队原定在 10 天内至少要挖土 600 m^3，前两天一共完成了 120 m^3，由于整个工程调整工期，要求提前两天完成挖土任务. 问：后 6 天内平均每天至少要挖土多少立方米?

解 设后 6 天内平均每天要挖土 x m^3 . 根据题意，得

$$120 + 6x \geqslant 600,$$

解得

$$x \geqslant 80.$$

答：后 6 天内平均每天至少要挖土 80 m^3.

问题 在“科学与艺术”知识竞赛的预选赛中共有 20 道题，对于每一道题，答对得 10 分，答错或不答扣 5 分，总得分不少于 80 分者能通过预选赛. 育才中学有 25 名学生通过了预选赛，通过者至少应答对多少道题? 有哪些可能情形?

思考 （1）试解决这个问题. 你是用什么方法解决的? 有没有其他方法? 与你的同伴讨论和交流一下.

（2）如果你是利用不等式的知识解决这个问题的，那么在得到不等式的解集后，如何给出原问题的答案? 应该如何表述?

练习

1. 求下列不等式的所有正整数解：

（1）$-4x \geqslant -12$；

（2）$3x - 11 < 0$.

2. 一次智力测验，有 20 道选择题. 评分标准为：对 1 题给 5 分，错 1 题扣 2 分，不答题不给分也不扣分. 小明有 2 道题未答，则他至少要答对几道题，总分才不会低于 60 分?

习题7.3

A 组

1. 解下列不等式：

(1) $x-5<0$；

(2) $3x\geqslant 2x-6$；

(3) $2x<-3$；

(4) $-2x>\dfrac{1}{3}$.

2. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $3x\geqslant -3$；

(2) $-3x+3<0$；

(3) $2x+2\leqslant 3x+3$；

(4) $5x-1>8x+3$.

3. 求不等式 $1-2x<6$ 的所有负整数解.

4. a 分别取什么值时，代数式 $4a+2$ 的值满足下列要求？

(1) 大于1；　　(2) 等于1；　　(3) 小于1.

5. 解下列不等式：

(1) $\dfrac{x}{2}+1>x$；

(2) $3(x+3)<5(x-1)+7$；

(3) $\dfrac{1}{2}(x-3)<\dfrac{1}{3}-2x$；

(4) $\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x+4}{2}>-2$.

B 组

*6. 解关于 x 的不等式：$ax>1-x$.

7. 某高速公路工地需要实施爆破，操作人员点燃导火线后，要在炸药爆炸前跑到400 m以外的安全区域. 已知导火线的燃烧速度是0.8 cm/s，人跑步的速度是5 m/s. 问：导火线必须超过多长，才能保证操作人员的安全？

7.4 解一元一次不等式组

问题 用每分钟可抽 30 t 水的抽水机来抽污水管道里积存的污水，估计积存的污水不少于 1 200 t 且不超过 1 500 t，那么需要多少时间能将污水抽完?

分析 设需要 x min 能将污水抽完，则总的抽水量为 $30x$ t．由题意，应有

$$30x \geqslant 1\,200,$$

并且

$$30x \leqslant 1\,500.$$

在这个实际问题中，未知量 x 应同时满足这两个不等式．我们把这两个一元一次不等式合在一起，就得到一个**一元一次不等式组**：

$$\begin{cases} 30x \geqslant 1\,200, & ① \\ 30x \leqslant 1\,500. & ② \end{cases}$$

分别求这两个不等式的解集，得

$$\begin{cases} x \geqslant 40, \\ x \leqslant 50. \end{cases}$$

同时满足不等式①②的未知数 x 应是这两个不等式解集的公共部分．如图 7.4.1，在同一数轴上表示出这两个不等式的解集，可知其公共部分是 40 和 50 之间的数(包括 40 和 50)，记作 $40 \leqslant x \leqslant 50$.

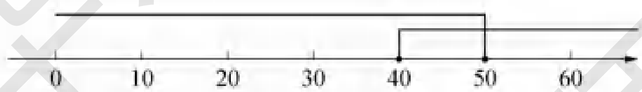


图7.4.1

所提问题的答案为：需要 40~50 min 能将污水抽完.

概括 不等式组中几个不等式的解集的公共部分，叫做这个不等式组的解集．例如前面问题所列出的不等式组的解集为 $40 \leqslant x \leqslant 50$.

解一元一次不等式组，通常可以先分别求出不等式组中每个不等式的解集，再求出它们的公共部分．利用数轴可以帮助我们得到一元一次不等式组的解集.

例 1 解不等式组：

$$\begin{cases} 3x - 1 > 2x + 1, & ① \\ 2x > 8. & ② \end{cases}$$

解 解不等式①，得 $x > 2.$

解不等式②，得 $x > 4.$

如图 7.4.2，在同一数轴上表示出不等式①②的解集，可知所求不等式组的解集是

$$x > 4.$$

图7.4.2

例 2 解不等式组：

$$\begin{cases} 2x + 1 < -1, & ① \\ 3 - x \leqslant 1. & ② \end{cases}$$

解 解不等式①，得 $x < -1.$

解不等式②，得 $x \geqslant 2.$

如图 7.4.3，在同一数轴上表示出不等式①②的解集．容易看出，这两个不等式的解集没有公共部分．因此，这个不等式组无解．

图7.4.3

练习

1. 填表：

不等式组	$\begin{cases}x-2<0,\\x+3<0\end{cases}$	$\begin{cases}x-2<0,\\x+3>0\end{cases}$	$\begin{cases}x-2>0,\\x+3<0\end{cases}$	$\begin{cases}x-2>0,\\x+3>0\end{cases}$
数轴表示				
解　　集				

2. 解下列不等式组，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $\begin{cases}4x-1>2x+3,\\x+1>2;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x-1>6(x+3),\\5(x-2)-1\leqslant 4(1+x);\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{x-2}{3}<0,\\4-\dfrac{1}{3}x\leqslant-\dfrac{1}{4}x.\end{cases}$

3. 试求不等式组 $\begin{cases}x+2>0,\\x-6\leqslant 0\end{cases}$ 的所有整数解.

阅读材料

等号与不等号的由来

等号“=”与不等号“>”“<”，从小学用到现在，已经是我们熟悉的符号了.

你知道它们的由来吗？人们是从什么时候开始使用这些符号的呢？

说来话长．16世纪中叶之前的数学书中，都还是用单词表示两个量的相等关系的．直到1557年，英国数学家雷科德(R. Recorde，1510—1558)在他的论文

《智慧的磨刀石》中提出：“为了避免枯燥地重复‘等于’这个单词，我认真比较了许多图形与记号，觉得世界上再也没有比两条平行而又等长的线段，意义更相同了．”这位伟大的数学家很有创见地用两条平行且相等的线段“=”表示“相等”，“=”叫做等号．

当时，也有人用其他符号表示过相等关系，数学家笛卡儿(René Descartes，1596—1650)在1637年出版的《几何学》中，还曾用“∞”表示相等关系．

17世纪，德国数学家莱布尼兹(G. W. Leibniz，1646—1716)，在各种场合大力倡导使用符号“=”，在他和其他数学家的共同努力下，这一符号才逐渐被世人所公认．

至于不等号“>”和“<”，其“经历”就更多了．1629年，法国数学家吉拉尔(A. Girard，1595—1632)在他的《代数教程》中，用象征的符号“*ff*”表示“大于”，用“§”表示“小于”．例如，A大于B，记作：“A *ff* B”；A小于B，记作：“A § B”．

1631年，英国数学家哈里奥特(T. Harriot，1560—1621)创造了符号“>”和“<”，分别表示“大于”和“小于”，这就是我们使用的不等号．

那时，还有数学家创造过其他符号．例如，数学家奥特雷德(W. Oughtred，1575—1660)曾于1631年采用“‾‾⌋”和“__⌋”分别表示“大于”和“小于”．又如，法国数学家厄里岗(P. Hérigone，1580—1643)曾在1634年采用一些看来并不简便的符号表示不等关系，如用“$a3 \mid 2b$”表示“$a > b$”，用“$b2 \mid 3a$”表示“$b < a$”．

那些繁琐的记号，逐渐被人们所淘汰，只有哈里奥特创造的符号“>”和“<”，由于它们的简便性，在数学中广为传用，最终为人们所接受和认可．

由等号“=”和不等号“>”“<”，还引申出一些其他数学符号．例如，全等“≌”、恒等“≡”、相似“∽”、近似“≈”、近似“≐”、不等于“≠”、大于或等于“⩾”、小于或等于“⩽”、远大于“≫”、远小于“≪”、不大于“≯”、不小于“≮”等．

数学中的符号太多了，它们的出现，都是为了数学表达的简捷方便，有了这些符号，我们就能简单明了地表达数学推理与求解过程．

习题7.4

A 组

1. 如图是高速公路上的一块限速标志牌的一部分. 设小汽车的速度为 v(单位: km/h), 则 v 的取值范围可表示为______.

(第 1 题)

2. 解下列不等式组:

(1) $\begin{cases} 4+2x>7x+3, \\ 4x+5<3x+6; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x-5<3x-5, \\ 6x-3<6-3x; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x+50<8x+3, \\ 4x-7\leqslant 6x-\dfrac{5}{7}; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 5x+4<3(x+1), \\ \dfrac{x-1}{2}\geqslant\dfrac{2x-1}{5}. \end{cases}$

3. 求不等式组 $2\leqslant 3x-7<8$ 的所有整数解.

4. 解不等式组 $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}\geqslant 1, \\ x+2<2x, \end{cases}$ 并把它的解集在数轴上表示出来.

5. 整数 a 的一半与 1 的差不小于 0 且不大于 3, 求 a 的值.

6. 某研学小组由 a 名男生和 b 名女生组成, 已知男生人数多于女生人数, 女生人数的 2 倍多于男生人数.

(1) 列出 a、b 满足的不等式.

(2) 该研学小组最少有多少名学生?

B 组

7. 若关于 x 的不等式组 $2a-1\leqslant x\leqslant 2+a$ 有且只有一个解, 求 a 的值.

8. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x-1<x, \\ 2x+1<m. \end{cases}$

(1) 若该不等式组的解集为 $-4<x<4$, 求 m 的值;

(2) 若该不等式组恰有一个整数解, 求 m 的取值范围.

9. 学校给七年级男生安排宿舍, 如果安排 4 人一间, 还有 26 人安排不下; 如果安排 6 人一间, 则只有一间宿舍未住满, 且该间宿舍也有人住. 那么, 学校给七年级男生分配的宿舍可能有多少间?

数学活动

球赛出线问题

我们观看各种球赛时，总是对比赛结果充满了期待．例如：中国男子篮球队所在小组有六支球队，小组前4名出线，那么中国队要想小组出线，至少应该取得几场胜利？在现实生活中，还有许多更复杂的赛况，那么怎样分析出线问题呢？请研究如下问题．

问题　某次篮球联赛中，火炬队与月亮队要争夺出线权．火炬队当时的战绩是17胜13负(其中有1场以4分之差负于月亮队)，后面还要比赛6场(其中包括再与月亮队比赛1场)；月亮队当时的战绩是15胜16负，后面还要比赛5场．

(1) 为确保出线，火炬队在后面的比赛中至少要胜多少场？

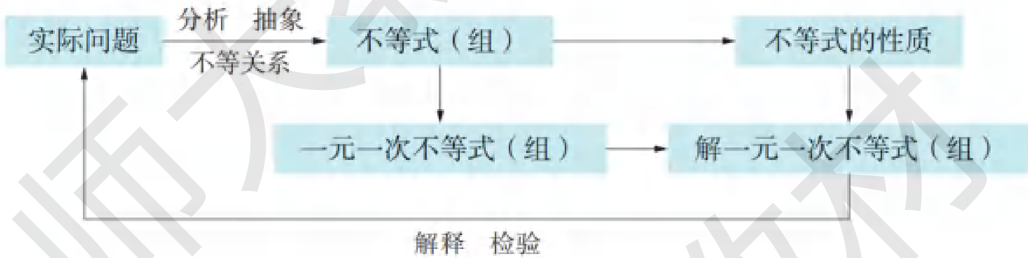
(2) 如果火炬队在后面对月亮队的1场比赛中至少胜月亮队5分，那么它在后面的其他比赛中至少胜几场就一定能出线？

(3) 如果月亮队在后面的比赛中3胜(包括胜火炬队1场)2负，那么火炬队在后面的比赛中至少要胜几场才能确保出线？

(4) 如果火炬队在后面的比赛中2胜4负，未能出线，那么月亮队在后面比赛中的战果如何？

小结

一、知识结构



二、要点

1. 不等式的知识源于实际问题．要学会分析现实世界中量与量之间的不等(大小)关系，并列出不等式．

2. 要注意把解一元一次不等式的过程与解一元一次方程的过程进行类比，把不等式的变形与方程的变形相对照，特别要注意不等式的基本性质3：不等式的两边都乘以(或都除以)同一个负数，不等号的方向改变．这种类比的思想，在以后的学习中还会经常用到．

3. 将一元一次不等式的解集在数轴上表示出来，可以加深对一元一次不等式和一元一次不等式组的解集的理解，也便于直观地得到一元一次不等式组的解集．

4. 不等式的基本性质，不仅用于解不等式，还可用来进行有关不等式的推理证明，在今后的数学学习中很有用．

复习题

A 组

1. 下列不等式的变形对不对？为什么？

(1) 由 $-x>5$，得 $x>-5$；　　(2) 由 $2x-1>5$，得 $x>2$；

(3) 由 $2x>-4$，得 $x<-2$；　　(4) 由 $-\frac{1}{2}x\leqslant 3$，得 $x\geqslant -6$.

2. 判断下列不等式的变形是否正确：

(1) 由 $a<b$，得 $ac<bc$；

(2) 由 $x>y$，且 $m\neq 0$，得 $-\frac{x}{m}<-\frac{y}{m}$；

(3) 由 $x>y$，得 $xz^2>yz^2$；

(4) 由 $xz^2>yz^2$，得 $x>y$.

3. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $-3x<0$；　　(2) $8x+1\leqslant 5x-3$；

(3) $3(x+2)-1\geqslant 5-2(x-2)$；　　(4) $\frac{1}{3}(1-2x)>\frac{3(2x-1)}{2}$.

4. x 分别取什么值时，代数式 $5-3x$ 的值满足下列要求？

(1) 是负数；　　(2) 是0；　　(3) 是正数.

5. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}2(x+1)<0,\\2x-1\leqslant 0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x>3x,\\x+2>4;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}<1,\\3x-7<-1;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}2x-6<3x,\\\frac{x+2}{5}-\frac{x-1}{4}\geqslant 0.\end{cases}$

6. 求满足不等式 $2n-5<5-2n$ 的所有正整数 n.

7. 已知关于 x 的方程 $3k-5x=-9$ 的解是非负数，求 k 的取值范围.

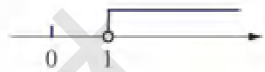
B 组

8. 三个连续自然数的和小于 15，这样的自然数组共有几组？把它们分别写出来.

9. 已知 $|5x-3|=3-5x$，求 x 的取值范围.

10. 已知不等式组 $\begin{cases}3-\dfrac{1}{2}x>x,\\x-a>1\end{cases}$ 无解，求 a 的取值范围.

11. 关于 x 的不等式组 $\begin{cases}3-2x<x,\\2x-1>a\end{cases}$ 的解集在数轴上的表示如图所示，求 a 的取值范围.



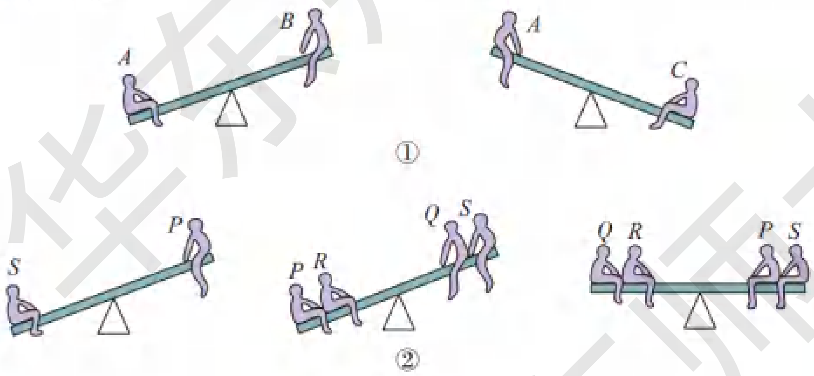
（第 11 题）

C 组

12. 甲、乙、丙三位同学给希望工程捐款，已知乙、丙捐款额之和等于甲捐款额的 2 倍，甲的捐款额小于乙与丙捐款额之差的 2 倍．问：甲、乙、丙三位同学捐款最多的是谁？

13. (1) A、B、C 三人去公园玩跷跷板，由示意图①，你能判断三人的轻重吗？

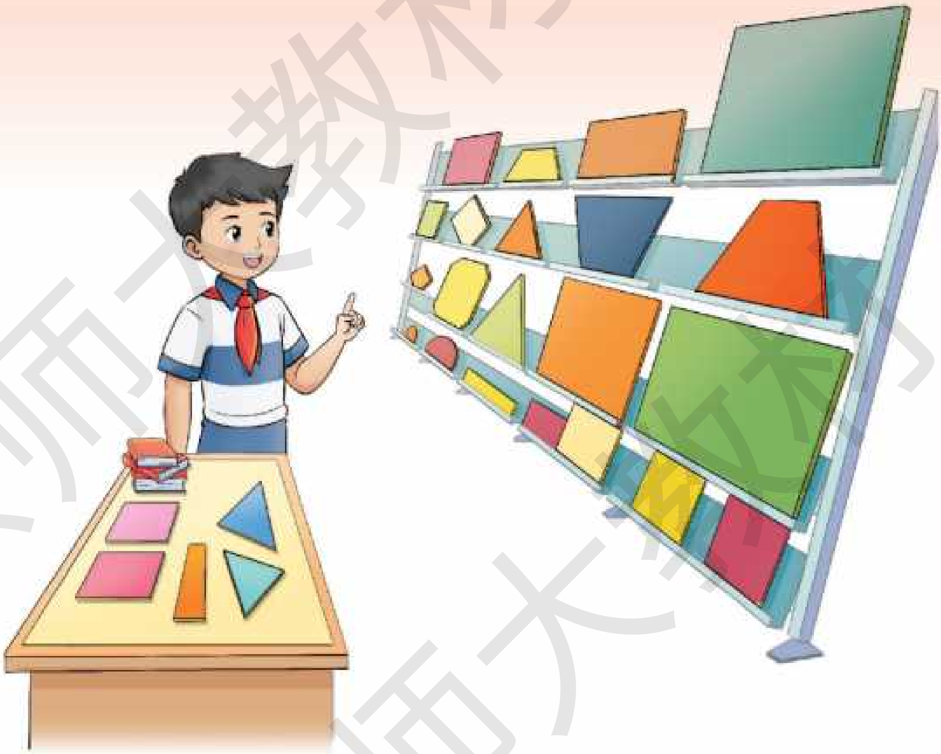
(2) P、Q、R、S 四人去公园玩跷跷板，由示意图②，你该如何判断这四人的轻重呢？



（第 13 题）

14. 某地政府批了一块面积为 5 000 m^2 的地块，准备建造 300 套公租房．要求：①只建两种户型——89 m^2 的两室两厅和 70 m^2 的一室两厅；②每幢楼均为 6 层；③小区绿化率不低于 20%．那么，89 m^2 的户型最多可以建多少套？

第 8 章　三角形

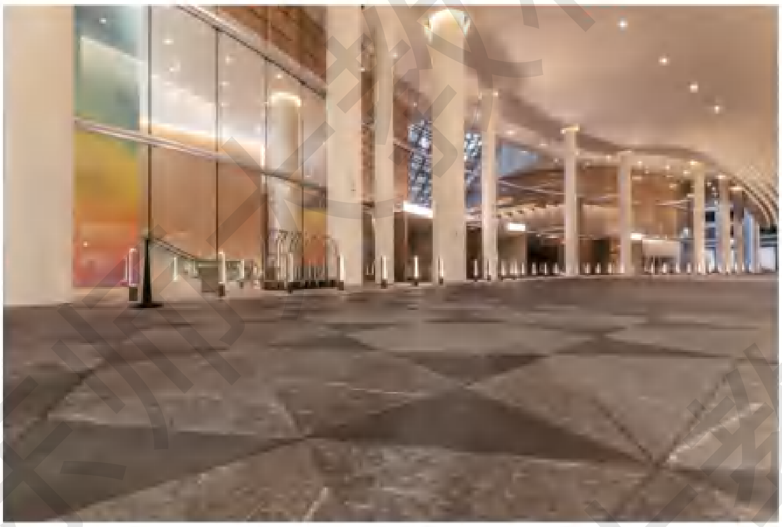


瓷砖是生活中常见的装饰材料．你见过哪些形状的瓷砖？它们的形状有什么特点呢？

你知道瓷砖能铺满地面的奥秘吗？

★　本章将在探索与三角形有关的线段和角的基础上，研究多边形的有关性质，解开关于瓷砖铺设的一个个疑团，从中了解一些研究几何问题的基本思路和方法．

8.1　与三角形有关的边和角



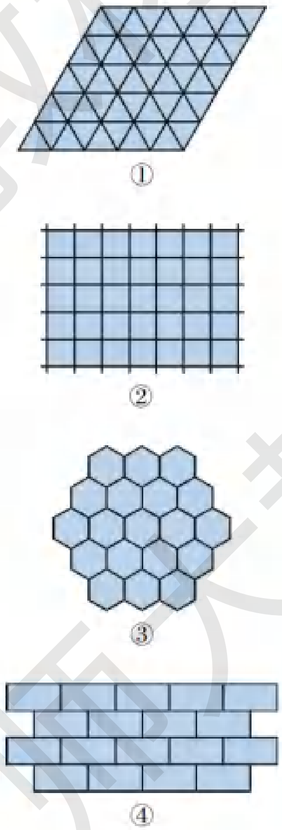


图8.1.1

走在大街上，进入宾馆或饭店，在许多地方，我们经常可以看到由各种形状的瓷砖铺成的漂亮的地面和墙面，在这些地面或墙面上，相邻的瓷砖平整地贴合在一起，整个地面或墙面没有一点空隙，如图 8.1.1 所示.

这些形状的瓷砖为什么能铺满地面而不留一点空隙呢？换一些其他形状的行不行？

为了解决这些问题，我们有必要研究多边形的有关性质．三角形是最简单的多边形，让我们从三角形开始，探究一下其中的道理.

1．认识三角形

三角形(triangle)是我们早就认识的几何图形，它是由三条不在同一条直线上的线段首尾顺次连结组成的平面图形，这三条线段就是三角形的边.

三角形的顶点采用大写字母 A、B、C……表示，如图 8.1.2①，整个三角形记为$\triangle ABC$.

如图 8.1.2②所示，在三角形中，每两条边所组成的角叫做三角形的内角，如$\angle ACB$；三角形中内角的一边与另一边的反向延长线所组成的角叫做三角形的外角，如$\angle ACD$是与$\triangle ABC$的内角$\angle ACB$相邻的外角．图 8.1.2②指明了与$\triangle ABC$相关的主要名称.

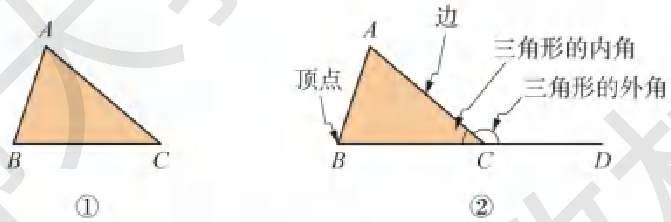


图8.1.2

思考

$\triangle ABC$有多少个内角？多少个外角？与内角$\angle A$相邻的外角有几个？它们是什么关系？怎样画出$\triangle ABC$的外角？

试一试

图 8.1.3 中，三个三角形的内角各有什么特点？

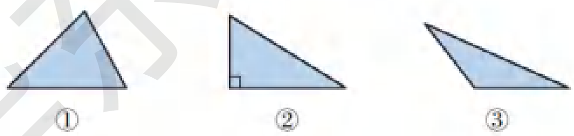


图8.1.3

第一个三角形中，三个内角均为锐角；第二个三角形中，有一个内角是直角；第三个三角形中，有一个内角是钝角.

三角形可以按角来分类：

所有内角都是锐角——锐角三角形；

有一个内角是直角——直角三角形；

有一个内角是钝角——钝角三角形.

试一试

图 8.1.4 中，三个三角形的边各有什么特点?

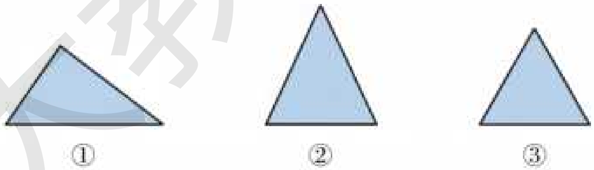


图8.1.4

第一个三角形的三边互不相等；第二个三角形有两条边相等；第三个三角形的三边都相等.

我们把有两条边相等的三角形称为**等腰三角形**，相等的两边叫做等腰三角形的腰；把三条边都相等的三角形称为**等边三角形**(或正三角形).

等边三角形是等腰三角形吗?

做一做

在图 8.1.5 中找出等腰三角形、正三角形、锐角三角形、直角三角形和钝角三角形.

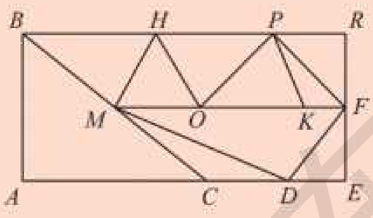


图8.1.5

练习

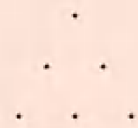
1. 在练习本上画出：

（1）等腰锐角三角形；

（2）等腰直角三角形；

（3）等腰钝角三角形.

2. 6 个点如图所示那样放置，相邻两点的距离相等．把这些点作为三角形的顶点，可以画多少个正三角形？



（第 2 题）

如图 8.1.6 所示，取△*ABC* 边 *AB* 的中点 *E*，连结 *CE*，线段 *CE* 就是△*ABC* 的一条中线；作△*ABC* 的内角∠*BAC* 的平分线交对边 *BC* 于点 *D*，线段 *AD* 就是△*ABC* 的一条角平分线；过顶点 *B* 作△*ABC* 的边 *AC* 的垂线，垂足为点 *F*，线段 *BF* 就是△*ABC* 的一条高.

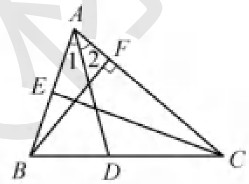
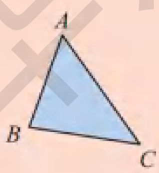


图8.1.6

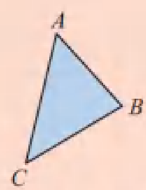
显然，△*ABC* 有三条中线、三条角平分线和三条高.

做一做

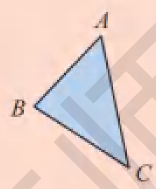
下面给出了三个相同的锐角三角形，分别在这三个三角形中画出三条中线、三条角平分线和三条高.



作出中线



作出角平分线



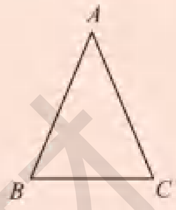
作出高

把锐角三角形换成直角三角形或钝角三角形，再试一试．你发现了什么？

由上面的操作，我们可以发现，三角形的三条中线、三条角平分线和三条高（或所在的直线）分别________；直角三角形三条高的交点就是________；钝角三角形有两条高位于三角形的外部．

练习

1. 如图，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，$AB = AC$．试画出边 BC 上的中线和高以及 $\angle A$ 的平分线．从中你发现了什么？
2. 在一个直角三角形中，画出斜边上的中线，先观察一下图形中有几个等腰三角形，再用刻度尺验证你的结论．



（第 1 题）

2．三角形的内角和与外角和

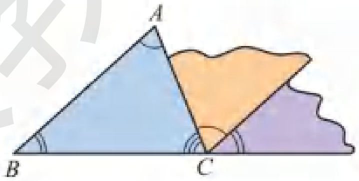


图8.1.7

如图 8.1.7，在小学我们曾剪下三角形的两个内角，将它们与第三个内角拼在一起，发现三个内角恰好拼成一个平角，得出了如下结论：

三角形的内角和等于 180°．

由图 8.1.7 的操作，你能发现证明的方法吗？

现在我们尝试用说理的方式说明该结论正确．

如图 8.1.8，已知$\triangle ABC$，分别用 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 表示$\triangle ABC$ 的三个内角，证明 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$．

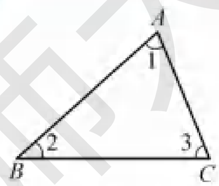


图8.1.8

解　如图 8.1.9，延长边 BC 至点 E，以点 C 为顶点，在 BE 的上侧作 $\angle DCE = \angle 2$，则 $CD \parallel BA$（同位角相等，两直线平行）．

$\because$ $CD \parallel BA$，

$\therefore$ $\angle 1 = \angle ACD$（两直线平行，内错角相等）．

$\because$ $\angle 3 + \angle ACD + \angle DCE = 180°$，

$\therefore$ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$（等量代换）．

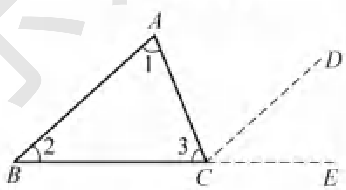


图8.1.9

思考　如图 8.1.10，在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A$ 与 $\angle B$ 有什么关系？

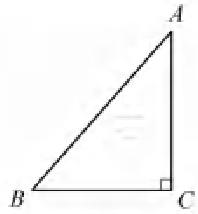


图8.1.10

由三角形的内角和等于 180°，得

$$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ.$$

由此可以推出

$$\angle A+\angle B=180^\circ-\angle C=90^\circ,$$

即 $\angle A$ 与 $\angle B$ 互余.

这就是说，**直角三角形的两个锐角互余.**

直角三角形可以用符号“Rt△”表示，直角三角形 ABC 可以写成 Rt△ABC.

▶ **例 1**　如图 8.1.11，AD 是 △ABC 的边 BC 上的高，$\angle 1=45^\circ$，$\angle C=65^\circ$. 求 $\angle BAC$ 的度数.

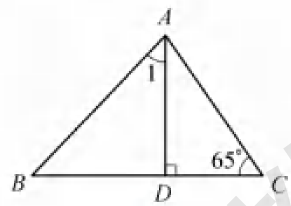


图8.1.11

解　在 Rt△ABD 中，

$\because$ $\angle 1+\angle B=90^\circ$（直角三角形的两个锐角互余），

$\therefore$ $\angle B=90^\circ-\angle 1$（等式性质）.

又 $\because$ $\angle 1=45^\circ$（已知），

$\therefore$ $\angle B=90^\circ-45^\circ=45^\circ$（等量代换）.

在 △ABC 中，

$\because$ $\angle B+\angle C+\angle BAC=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

$\therefore$ $\angle BAC=180^\circ-\angle B-\angle C$（等式性质）.

又 $\because$ $\angle B=45^\circ$（已求），$\angle C=65^\circ$（已知），

$\therefore$ $\angle BAC=180^\circ-45^\circ-65^\circ=70^\circ$（等量代换）.

思考　我们已经知道，直角三角形的两个锐角互余. 反过来，有两个角互余的三角形是直角三角形吗？

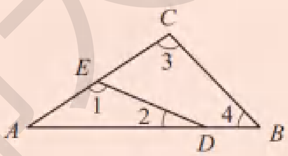
由三角形的内角和等于 180°，容易得出下面的结论：

有两个角互余的三角形是直角三角形.

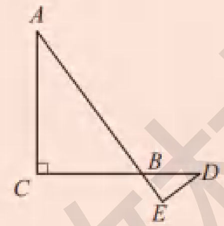
你能说明其理由吗？

练习

1. 如图，$\angle A=40°$，则 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=$ ________.



（第 1 题）



（第 4 题）

2. 在△ABC 中，$\angle A+\angle B=80°$，$\angle C=2\angle B$. 求 $\angle A$、$\angle B$ 和 $\angle C$ 的度数.
3. 在△ABC 中，$\angle B=\angle A+30°$，$\angle C=\angle B+30°$. 求△ABC 的各内角的度数.
4. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，D、E 分别是边 CB、AB 延长线上的点，$\angle A=\angle D$. 试说明△BDE 是直角三角形.

现在我们讨论三角形的外角及外角和.

如图 8.1.12，一个三角形的每一个外角对应一个相邻的内角和两个不相邻的内角.

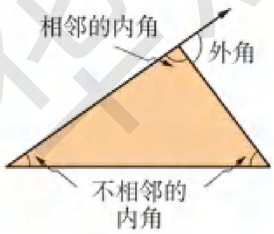


图8.1.12

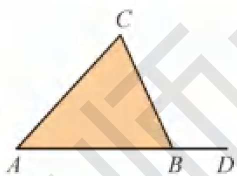


图8.1.13

三角形的外角与内角有什么关系呢？

在图 8.1.13 中，显然有

$$\angle CBD(\text{外角})+\angle ABC(\text{相邻的内角})=180°.$$

那么外角 $\angle CBD$ 与其他两个不相邻的内角又有什么关系呢？

依据三角形的内角和等于 180°，我们有

$$\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = 180°.$$

由上面两个式子，可以推出

$$\angle CBD = 180° - \angle ABC,$$
$$\angle ACB + \angle BAC = 180° - \angle ABC.$$

因而可以得到外角$\angle CBD$与两个不相邻的内角之间的关系：

$$\angle CBD = \angle ACB + \angle BAC.$$

由此可知，三角形的外角有两条性质：

1. 三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和.

2. 三角形的一个外角大于任何一个与它不相邻的内角.

与三角形的每个内角相邻的外角分别有两个，这两个外角是对顶角. 从与每个内角相邻的两个外角中分别取一个相加，得到的和称为三角形的外角和.

如图 8.1.14 所示，$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ 就是$\triangle ABC$的外角和.

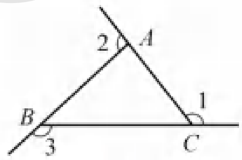


图8.1.14

做一做

在图 8.1.14 中，有

$\angle 1 +$ ______ $= 180°$，$\angle 2 +$ ______ $= 180°$，$\angle 3 +$ ______ $= 180°$.

三式相加，可以得到

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 +$ ______ $+$ ______ $+$ ______ $=$ ______，　①

而

$$\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = 180°，\quad ②$$

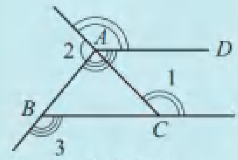
将①与②相比较，你能得出什么结论？

概括 可以得到

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=360°.$$

由此可知：三角形的外角和等于 360°.

你能由下图说明这一结论吗？



($AD//BC$)

▶ **例 2** 如图 8.1.15，D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点，$\angle B=\angle BAD$，$\angle ADC=80°$，$\angle BAC=70°$.

(1) 求 $\angle B$ 的度数；

(2) 求 $\angle C$ 的度数.

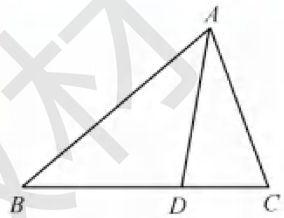


图8.1.15

解 (1) $\because$ $\angle ADC$ 是 $\triangle ABD$ 的外角(已知)，

$\therefore$ $\angle B+\angle BAD=\angle ADC=80°$(三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和).

又 $\because$ $\angle B=\angle BAD$(已知)，

$\therefore$ $\angle B=80°\times\dfrac{1}{2}=40°$(等量代换).

(2) $\because$ $\angle B+\angle BAC+\angle C=180°$(三角形的内角和等于 180°)，

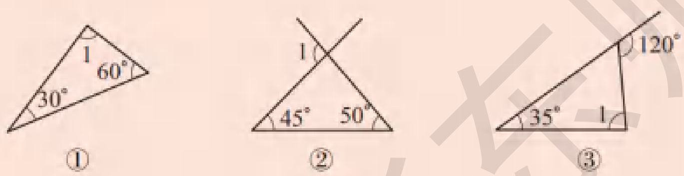
$\therefore$ $\angle C=180°-\angle B-\angle BAC$(等式的性质).

又 $\because$ $\angle B=40°$(已求)，$\angle BAC=70°$(已知)，

$\therefore$ $\angle C=180°-40°-70°=70°$(等量代换).

练习

1. (口答)一个三角形可以有两个内角都是直角吗？可以有两个内角都是钝角或都是锐角吗？为什么？
2. 说出下列各图中 $\angle 1$ 的度数.



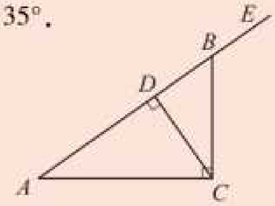
(第 2 题)

3. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，CD 是斜边 AB 上的高，$\angle BCD = 35°$．

(1) 求$\angle EBC$ 的度数；

(2) 求$\angle A$ 的度数．

对于上述问题，在以下解答过程的空白处填上适当的内容（理由或数学式）．



（第 3 题）

解 (1) $\because$ $CD \perp AB$（已知），

$\therefore$ $\angle CDB =$ ________．

$\because$ $\angle EBC = \angle CDB + \angle BCD$(　　　　　　　　　　)，

$\angle BCD = 35°$（已知），

$\therefore$ $\angle EBC =$ ________ $+ 35° =$ ________（等量代换）．

(2) $\because$ $\angle EBC = \angle A + \angle ACB$(　　　　　　　　　　)，

$\therefore$ $\angle A = \angle EBC - \angle ACB$（等式的性质），

$\because$ $\angle ACB = 90°$（已知），

$\therefore$ $\angle A =$ ________ $- 90° =$ ________（等量代换）．

你还能用其他方法解决这一问题吗？

3. 三角形的三边关系

在小学阶段，我们已经通过观察或度量，了解到“三角形的任意两边之和大于第三边”这样一个事实，现在让我们通过作三角形的过程，再次体会这一结论．

做一做

作一个三角形，使它的三条边长分别为 4 cm、3 cm、2.5 cm．

如图 8.1.16，先作线段 $AB = 4$ cm，然后以点 A 为圆心、3 cm 长为半径作圆弧，再以点 B 为圆心、2.5 cm 长为半径作圆弧，两弧相交于点 C，连结 AC、BC．△ABC 就是所要作的三角形.

圆上任意一点到圆心的距离相等.

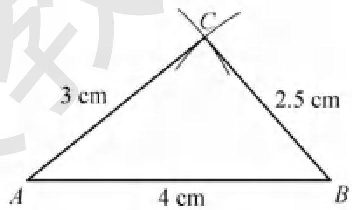


图8.1.16

试一试

现有 12 条已知长度的线段：三条长 2 cm、三条长 3 cm、两条长 4 cm、两条长 5 cm、两条长 6 cm．任意选择三条线段作三角形，使它的三条边长分别为你所选择的三条线段的长.

说说你的发现与想法.

如图 8.1.17，在作三角形的过程中，你可能会发现下列几种情况：

① ② ③

图8.1.17

因此，并不是任意三条线段都可以组成一个三角形．在三条线段中，如果两条较短线段的和不大于第三条线段，那么这三条线段就不能组成一个三角形.

换句话说：

三角形的任意两边之和大于第三边.

> 这一结论的根本依据是关于线段的基本事实“两点之间线段最短”.

用三根木条钉一个三角形，你会发现再也无法改变这个三角形的形状和大小，也就是说，如果三角形的三条边固定，那么三角形的形状和大小就完全确定了. 三角形的这个性质叫做**三角形的稳定性.**

用四根木条钉一个四边形，你会发现这个四边形的形状和大小都可以改变，这说明四边形不具有稳定性.

三角形的稳定性在生产实践中有着广泛的应用. 如图 8.1.18 是位于中国新疆维吾尔自治区境内的果子沟大桥，它是新疆重要民生工程，其拉索就是三角形结构.

图8.1.18

练习

1. (口答)下列长度的各组线段能否组成一个三角形？

   (1) 15 cm，10 cm，7 cm；　　(2) 4 cm，5 cm，10 cm；

   (3) 3 cm，8 cm，5 cm；　　(4) 4 cm，5 cm，6 cm.

2. 一木工有两根长分别为 40 cm 和 60 cm 的木条，要另找一根木条，钉成一个三角木架. 问：第三根木条的长度应在什么范围内？

3. 举两个三角形的稳定性在实际生活中应用的例子.

习题8.1

A 组

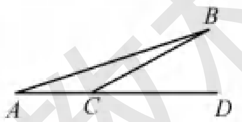
1. 已知$\triangle ABC$是等腰三角形.

(1) 如果它的两条边的长分别为 8 cm 和 3 cm，那么它的周长是________cm；

(2) 如果它的周长为 18 cm，一条边的长为 4 cm，那么它的腰长是________cm.

2. 按图中所给的条件，可得 $\angle 1=$________，$\angle 2=$________，$\angle 3=$________.

（第 2 题）

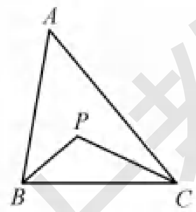


（第 3 题）

3. 如图，飞机要从 A 地飞往 B 地，因受大风影响，一开始就偏离航线(AB)18°(即 $\angle A=18°$)，飞到了 C 地，经 B 地的导航站测得 $\angle B=10°$. 此时飞机必须沿某一方向飞行才能到达 B 地，求这一方向与 AC 方向的夹角 $\angle BCD$ 的度数.

4. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=80°$，$\angle ACB=50°$，BP 平分$\angle ABC$，CP 平分$\angle ACB$. 求$\angle BPC$的度数.

对于上述问题，在以下解答过程的空白处填上适当的内容(理由或数学式).



（第 4 题）

解 $\because$ BP 平分$\angle ABC$(已知)，

$\therefore$ $\angle PBC=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times 80°=40°$.

同理可得 $\angle PCB=$________.

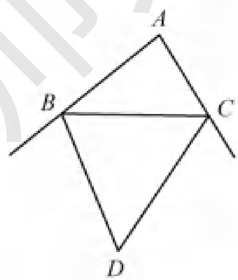
$\because$ $\angle BPC+\angle PBC+\angle PCB=180°$(   )，

$\therefore$ $\angle BPC=180°-\angle PBC-\angle PCB$(等式的性质)

$=180°-40°-$________

$=$________.

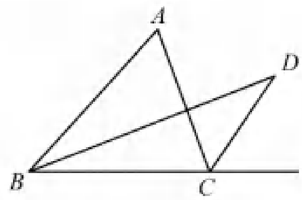
5. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC$和$\angle ACB$的外角平分线相交于点 D. 若 $\angle BDC=40°$，则 $\angle A=$________.



（第 5 题）

B 组

6. 如图，在△ABC 中，$\angle ABC$ 的平分线与 $\angle ACB$ 的外角平分线相交于点 D.



(第 6 题)

(1) 试找出 $\angle D$ 与△ABC 的内角 $\angle A$ 之间的关系.

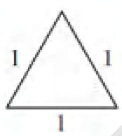
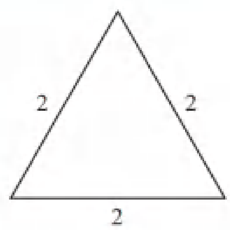
(2) 结合 A 组第 4 题和第 5 题，从这 3 道题目的情况看，你能发现其中的规律吗？

7. 用一条长为 20 cm 的细绳围成一个等腰三角形.

(1) 如果腰长是底边长的 2 倍，那么各边的长是多少？

(2) 能围成有一边的长是 5 cm 的等腰三角形吗？为什么？

8. 在平面内，分别用 3 根、4 根、5 根、6 根……火柴首尾依次相接（不能折断，且需全部用完），能搭成什么形状的三角形？小明通过尝试，发现用 3 根、5 根、6 根火柴分别可以搭成一些三角形，如下表所示：

火柴数	3	5	6
示意图			
形状	等边三角形	等腰三角形	等边三角形

现在请你与小明一起继续尝试，并回答下列问题：

(1) 用 4 根火柴能搭成三角形吗？

(2) 用 8 根、12 根火柴能搭成几种不同形状的三角形？请在下表中画出它们的示意图.

火柴数	8	12
示意图		
形状		

8.2 多边形的内角和与外角和

试一试

三角形有三个内角、三条边，我们也可以把三角形称为三边形．我们已经知道什么叫做三角形，即三边形．你能说出什么叫做四边形、五边形吗？

图 8.2.1①是四边形，它是由四条不在同一条直线上的线段首尾顺次连结组成的平面图形，记为四边形 $ABCD$；图 8.2.1②是五边形，它是由五条不在同一条直线上的线段首尾顺次连结组成的平面图形，记为五边形 $ABCDE$． 一般地，由 n 条不在同一条直线上的线段首尾顺次连结组成的平面图形称为 n 边形，也即我们通常所说的多边形．

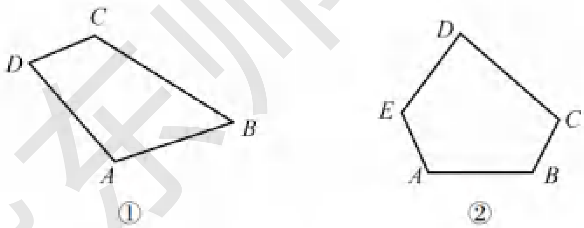
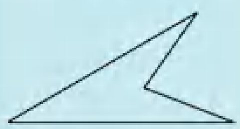


图8.2.1

注意 我们现在研究的是如图 8.2.1 所示的多边形，也就是凸多边形．

由七年级上册 3.4 节可知，下面所示的图形也是多边形，但不在我们目前的研究范围内．



与三角形类似，如图 8.2.2 所示，$\angle A$、$\angle D$、$\angle C$、$\angle ABC$ 是四边形 $ABCD$ 的四个内角，$\angle CBE$ 和 $\angle ABF$ 都是与 $\angle ABC$ 相邻的外角，两者互为对顶角．

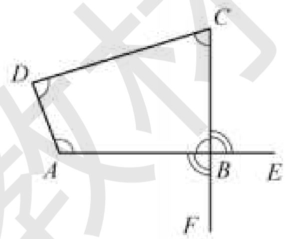


图8.2.2

五边形、六边形分别有多少个内角？多少个外角？n 边形呢？

一般地，如果多边形的各边都相等，各内角也都相等，那么就称它为**正多边形**(regular polygon)．如正三角形、正四边形(正方形)、正五边形等．

连结多边形不相邻的两个顶点的线段叫做多边形的对角线．例如，图 8.2.3①中，线段 AC 是四边形 $ABCD$ 的一条对角线；图 8.2.3②③中，虚线表示的线段也是所画多边形的对角线．

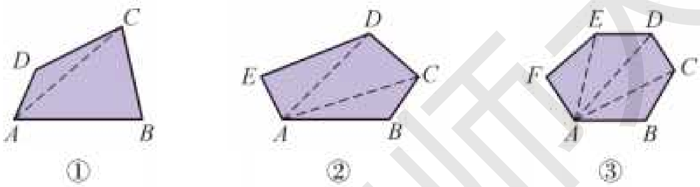


图8.2.3

还可以画出哪些对角线？

试一试

由图 8.2.3 可以看出，从多边形的一个顶点引出的对角线把多边形划分为若干个三角形．我们已知一个三角形的内角和等于 180°，那么四边形的内角和等于多少呢？五边形、六边形呢？一般地，n 边形的内角和等于多少呢？

探索 为了求得 n 边形的内角和，请根据图 8.2.4，完成表 8.2.1.

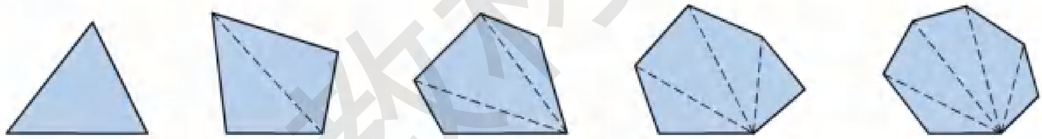


图8.2.4

表8.2.1

多边形的边数	3	4	5	6	7	…	n
分成的三角形的个数	1	2				…	
多边形的内角和	180°	360°				…	

由此，我们得出

n 边形的内角和为 $(n-2)\cdot 180°$.

读一读

“归纳推理”是数学中的一种推理方式，体现了从特殊到一般的推理过程. 在这里，我们通过对三边形、四边形、五边形等的探索，发现它们的内角和与边数之间存在某种逻辑关系，从而归纳出多边形的内角和公式. 这种归纳推理的方式，我们今后还会经常用到. 当然，“看”出来的数学结论未必一定正确，但它们还是给我们指引了研究的方向. 因此，归纳推理和演绎推理相结合是必要的.

例 1 求八边形的内角和.

解 八边形的内角和为

$$(n-2)\cdot 180° = (8-2)\times 180° = 1\,080°.$$

▶ **例 2** 已知一个多边形的内角和等于 2 160°，求这个多边形的边数.

解 设这个多边形的边数为 n，根据题意，得

$$(n-2)\cdot 180^\circ = 2\,160^\circ.$$

解得 $$n = 14.$$

因此，这个多边形的边数为 14.

试一试

如图 8.2.5，在 n 边形(图中取 $n=6$ 的情形) 内任取一点 P，连结点 P 与多边形的每一个顶点，可得到几个三角形？你能否根据这样划分多边形的方法来说明 n 边形的内角和等于$(n-2)\cdot 180^\circ$？

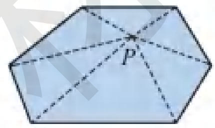


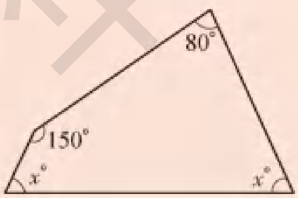
图8.2.5

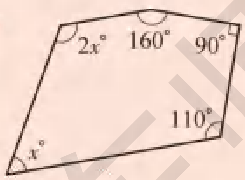
为了说明多边形的内角和公式，我们已经尝试用两种方法划分多边形. 这里是在多边形内任取一点，前面可以看作是任取一个顶点. 那么是否还可以移动点 P，引出其他方法呢？

试试看，你一定会有新的发现.

练习

1. 求下列图形中 x 的值.

(1) 

(2) 

(第 1 题)

2. 已知一个多边形的内角和等于 1 440°，求这个多边形的边数.

与多边形的每个内角相邻的外角分别有两个，这两个外角是对顶角．从与每个内角相邻的两个外角中分别取一个相加，得到的和称为多边形的外角和．如图 8.2.6，$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4$ 就是四边形 $ABCD$ 的外角和．

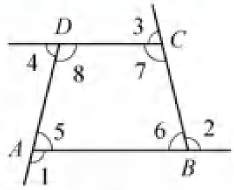


图8.2.6

从图 8.2.6 中可以知道：

$$(\angle 1+\angle 5)+(\angle 2+\angle 6)+(\angle 3+\angle 7)+(\angle 4+\angle 8)=4\times 180^\circ,$$

所以 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=4\times 180^\circ-(\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8)$．

四边形 $ABCD$ 的内角和为 $\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8=360^\circ$．

因此 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360^\circ$．

那么，n 边形的外角和应该等于多少度呢？

探索 根据 n 边形的每一个内角与和它相邻的外角都互为补角，可以求得 n 边形的外角和．据此，请将数据填入表 8.2.2 中．

表8.2.2

多边形的边数	3	4	5	6	7	…	n
多边形的内角和与外角和的总和	$3\times 180^\circ=540^\circ$					…	
多边形的内角和	180°					…	
多边形的外角和	360°					…	

因此，**任意多边形的外角和都为 360°．**

例 3 一个多边形的每个外角都是 72°，这个多边形是几边形？

解 设这个多边形的边数为 n，根据题意，得

$$n\cdot 72^\circ=360^\circ.$$

解得 $$n=5.$$

因此，这个多边形是五边形．

例 4 一个多边形的内角和等于它外角和的5倍，这个多边形是几边形？

解 设这个多边形的边数为n，根据题意，得

$$(n-2)\cdot 180° = 5\times 360°.$$

解得 $$n = 12.$$

因此，这个多边形是十二边形.

练习

1. 一个多边形的每一个外角都等于45°，这个多边形是几边形？它的每一个内角是多少度？
2. 在一个多边形中，它的内角最多可以有几个是锐角？

习题8.2

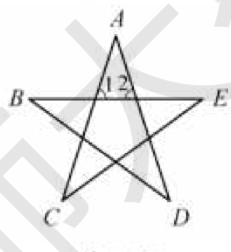
A 组

1. 先任意画一个五边形，然后画出它所有的对角线，数一数，一共有多少条对角线？
2. 根据图形填空：

   (1) $\angle 1=\angle C+$________，$\angle 2=\angle B+$________；

   (2) $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=$_______$+\angle 1+\angle 2=$_______.

   想一想：小题(2)中的结论对任意的五角星是否都成立？



（第2题）

3. 一个多边形的外角和是内角和的$\frac{2}{7}$. 求这个多边形的边数.
4. 若一个多边形的边数增加2条，则它的内角和增加多少度？
5. 若一个正多边形的一个内角等于150°，求这个多边形的边数.
6. 在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$相邻的外角度数比是5∶4∶3，求$\triangle ABC$的最大内角的度数.

B 组

7. 填空：

(1) 从四边形的一个顶点出发可以画出_____条对角线，四边形共有_____条对角线；

(2) 从五边形的一个顶点出发可以画出_____条对角线，五边形共有_____条对角线；

(3) 从六边形的一个顶点出发可以画出_____条对角线，六边形共有_____条对角线；

(4) 从 n 边形的一个顶点出发可以画出_____条对角线，n 边形共有_____条对角线.

8. 一个多边形截去一个角后，形成的新多边形的内角和为 $2520°$，求原多边形的边数.

8.3 用正多边形铺设地面

现在让我们回到本章一开始所提出的问题：某些形状的瓷砖为什么能铺满地面而不留一点空隙？实际生活中，它们的形状大多是正多边形，就让我们从此开始，探究一下其中的奥秘吧！

1. 用相同的正多边形

探索 使用给定的某种正多边形，它能否铺满地面，既不留下一丝空白，又不相互重叠呢？

这显然与正多边形的内角大小有关．为了探索哪些正多边形能铺满地面，请根据图 8.3.1，完成表 8.3.1．

图8.3.1

表8.3.1

正多边形的边数	3	4	5	6	7	…	n
正多边形的内角和	180°	360°				…	
正多边形每个内角的大小	60°	90°				…	

概括 使用给定的某种正多边形，当围绕一点拼在一起的几个内角加在一起恰好组成一个周角时，就可以铺满地面.

如正六边形的每个内角为120°，三个120°拼在一起恰好组成周角，所以全用正六边形瓷砖就可以铺满地面(如第80页图8.1.1③所示).

参见图8.1.1①②，你能说明为什么正三角形和正方形能铺满地面吗?

如图8.3.2，正五边形不能铺满地面，正八边形也不能铺满地面.

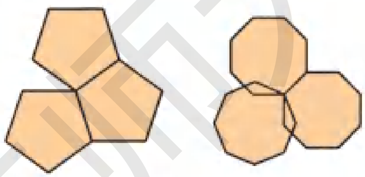
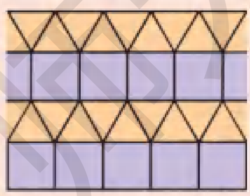


图8.3.2

练习

如图，将图8.1.1①中相邻两行正三角形分开，添一行正方形. 它表明把正三角形和正方形结合在一起也能铺满地面. 正三角形、正方形、正六边形两两结合是否都能铺满地面呢? 把正三角形、正方形、正六边形三者结合在一起呢? 请你试试看.



2. 用多种正多边形

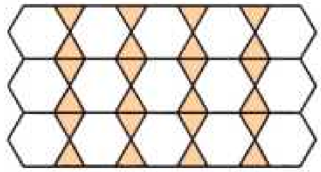


图8.3.3

如图 8.3.3，用正三角形和正六边形也能铺满地面．类似的情况还有吗？

我们还可以发现其他情况，如图 8.3.4 至图 8.3.7．

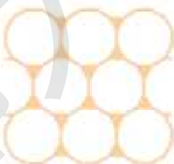


图8.3.4

图8.3.5

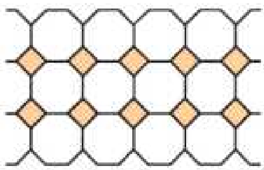


图8.3.6

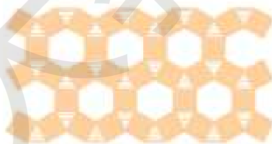


图8.3.7

现以图 8.3.5 为例，观察一下其中的关系．正十二边形的一个内角为 $\frac{(12-2)\times 180^\circ}{12}=150^\circ$，正六边形的一个内角为 120°，正方形的一个内角为 90°，三者之和恰为一个周角 360°．实际上，这三种正多边形结合在一起正好能铺满地面．

其他图形是否也满足这一条件？

练习

1. 试说明本节中几种正多边形能铺满地面的理由．
2. 任意剪出一些形状、大小相同的三角形纸板，拼拼看，它们能否铺满地面．

阅读材料

多姿多彩的图案

我们已经看到了用正多边形拼成的各种图案. 实际上, 有许多图案是用规则或不规则的基本图形拼成的, 如图 1 至图 4.

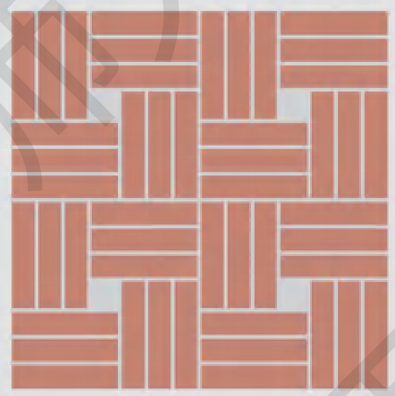


图 1

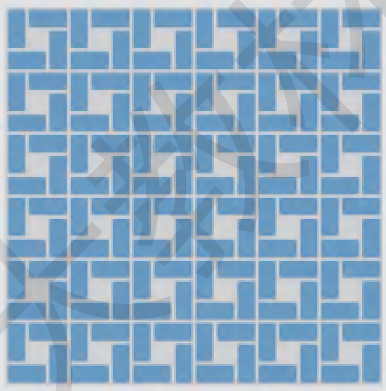


图 2

图 3

图 4

图 5 和图 6 分别说明了相应的图案是如何由基本图形拼成的.

图 5

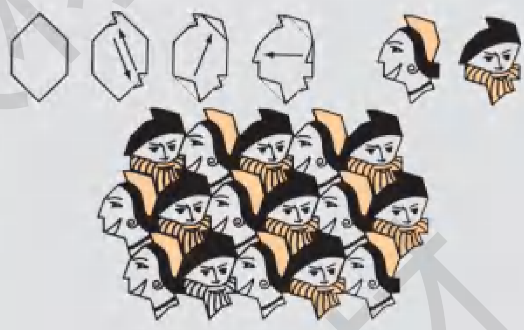


图 6

你玩过哪些拼图？你自己能设计出一幅拼图吗？

习题8.3

A 组

1. 选择题(可能有多个答案)

(1) 下列正多边形中，能铺满地面的是(　　).

A. 正方形　　B. 正五边形　　C. 正八边形　　D. 正六边形

(2) 下列正多边形的组合中，能铺满地面的是(　　).

A. 正八边形和正方形

B. 正五边形和正八边形

C. 正六边形和正三角形

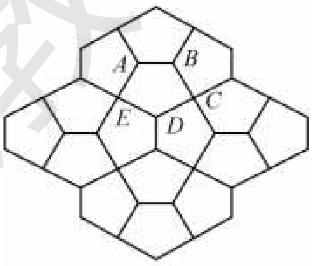
2. 试画出用正三角形和正六边形铺满地面，但与图 8.3.3 不同的图形.

3. 用三块正多边形的木板铺地，拼在一起并相交于一点的各边完全吻合，其中两块木板的边数都是 8，则第三块木板的边数应是多少？

4. 某陶瓷市场现出售边长相等的正三角形、正方形、正五边形地板砖，某顾客想买其中的两种镶嵌着铺地板，则他可以选择的是____________.

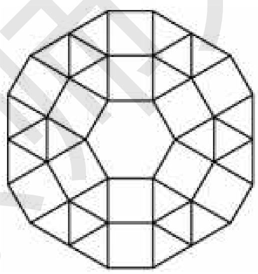
B 组

5. 公园的一段甬路是用型号相同的五边形地砖拼铺而成的，如图是拼铺图案的一部分．如果每个五边形有 3 个内角相等，那么这 3 个内角都等于________．



（第 5 题）

6. 如图是某广场地面的一部分，地面的中央是一块正六边形地砖，周围用正三角形和正方形地砖密铺，从里向外共 10 层（不包括中央的正六边形地砖）．每一层的外边界都围成一个多边形，若中央的正六边形地砖的边长为 0.5 m，则第 10 层边界所围成的多边形的周长是______．



（第 6 题）

数学活动

寻找能铺满平面的任意多边形

我们已经知道，用一种正多边形铺地面，可以铺满平面的只有正三角形、正方形和正六边形三种．那么，用一种任意的多边形铺地面，能铺满平面的有哪些多边形呢？

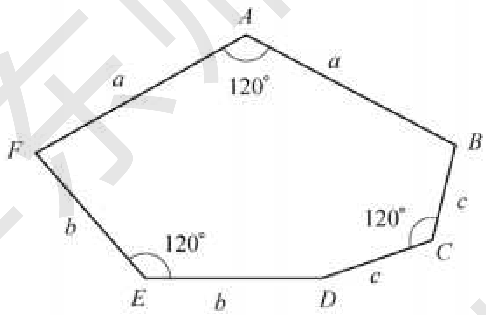
（1）剪一些完全一样的三角形拼一拼，看它们能否铺满平面．

（2）剪一些完全一样的四边形拼一拼，看它们能否铺满平面．

（3）剪一些完全一样的六边形拼一拼，看它们能否铺满平面．

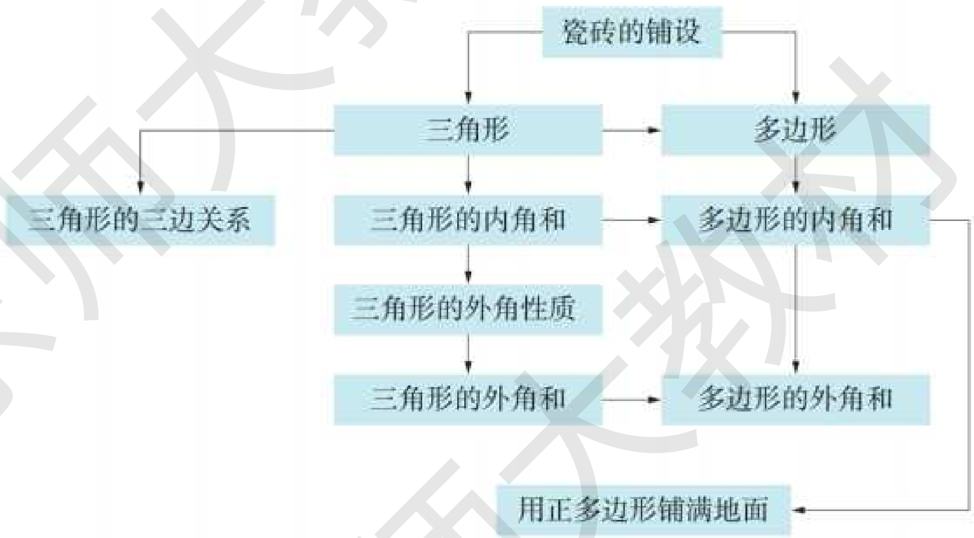
（4）请说明：用一种任意的多边形铺地面，能铺满平面的只可能是三角形、四边形或六边形．

（5）临摹一些如下图所示的六边形并剪下拼一拼，看它们能否铺满平面，并说明理由．



小结

一、知识结构



二、要点

1. 本章通过对三角形和多边形的一系列探索活动，归纳得到关于三角形的边、角及多边形的角的一些推断，演绎证明了某些推断的正确性.

2. 推理的数学思想在本章得到了充分体现：我们运用归纳推理，从具体的多边形着手分析，发现其中的逻辑关系，归纳出多边形内角和公式；我们还对探索得到的“三角形的内角和等于 180°”这一推断，进行了演绎推理，基本依据是有关平行线的一些基本事实和推导所得的结论.

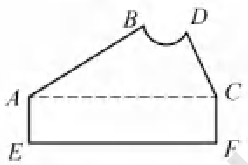
3. 本章还将学习得到的数学结论用于实际生活，理解某些正多边形能够铺满地面的道理.

复习题

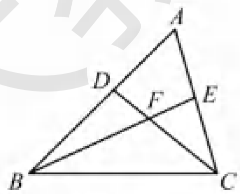
A 组

1. 已知两条线段 a、b，其长度分别为 2.5 cm 与 3.5 cm．另有长度分别为 1 cm、3 cm、5 cm、7 cm 和 9 cm 的 5 条线段，其中能够与线段 a、b 一起组成三角形的有哪几条？

2. 如图，按规定，一块模板中 AB、CD 的延长线应相交成 85°角．因交点不在模板上，不便测量，工人师傅连结 AC，测得 $\angle BAC = 32°$， $\angle DCA = 65°$，此时 AB、 CD 的延长线相交所成的角是不是符合规定？为什么？



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在△ABC 中，点 D、E 分别在边 AB、AC 上，BE、CD 相交于点 F，$\angle A = 62°$， $\angle ACD = 35°$， $\angle ABE = 20°$.
   (1) 求$\angle BDC$ 的度数；
   (2) 求$\angle BFD$ 的度数.

   对于上述问题，在以下解答过程的空白处填上适当的内容（理由或数学式）.

   解 (1) ∵ $\angle BDC = \angle A + \angle ACD$(　　　　　　　　)，

   ∴ $\angle BDC = 62° + 35° = 97°$（等量代换）.

   (2) ∵ $\angle BFD + \angle BDC + \angle ABE =$ ________(　　　　　　　　　　　)，

   ∴ $\angle BFD = 180° - \angle BDC - \angle ABE$（等式的性质）

   $= 180° - 97° - 20°$（等量代换）

   $= 63°$.

4. 求下列多边形的内角和：

（1）五边形；（2）九边形；（3）十二边形.

5. 下列为多边形的内角和，分别求相应的多边形的边数：

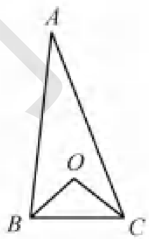
（1）900°；（2）1 980°；（3）2 700°.

6. 已知在一个十边形中，其中九个内角的和是 1 290°，求这个十边形另一个内角的度数.

7. 如果一个正多边形的每个外角都是 24°，那么这个多边形有多少条边？

8. 若三角形三个内角的比为 1 : 2 : 3，则这个三角形是什么三角形？

9. 如图，在△ABC 中，BO、CO 分别为∠ABC、∠ACB 的平分线，它们的交点为 O．若 ∠BOC = 100°，则 ∠A = ________.



（第 9 题）

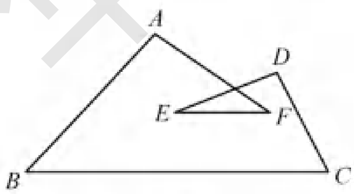
10. 要使四边形木架(用 4 根木条钉成)不变形，至少要再钉上几根木条？五边形木架和六边形木架呢？

B 组

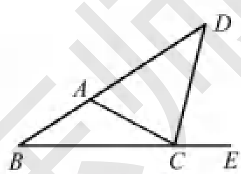
11. 在△ABC 中，AC = 12 cm，AB = 8 cm，那么边 BC 的最大长度应小于多少？最小长度应满足什么条件呢？

12. 在各个内角都相等的多边形中，一个外角等于一个内角的$\frac{1}{5}$，求这个多边形每个内角的度数和它的边数.

13. 如图，求 ∠A + ∠B + ∠C + ∠D + ∠E + ∠F 的度数.



（第 13 题）

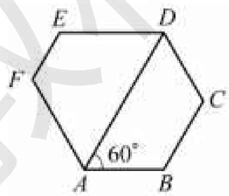


（第 14 题）

14. 如图，CD 是△ABC 中∠ACB 的外角平分线．请说明 ∠BAC > ∠B.

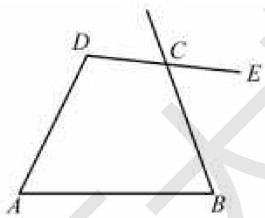
C 组

15. 如图，六边形 $ABCDEF$ 的内角都相等，$\angle DAB = 60°$. AB 与 DE 有什么关系？



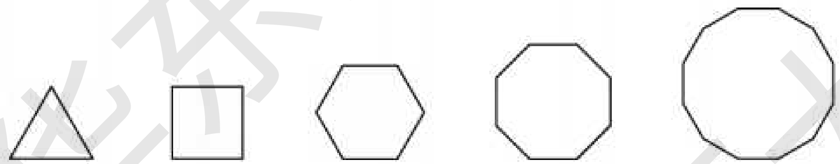
（第 15 题）

16. 如图，$\angle BCE$ 是四边形 $ABCD$ 的一个外角，如果 $\angle B$ 与 $\angle D$ 互为补角，那么 $\angle BCE$ 与 $\angle A$ 的大小相等吗？请说明理由.



（第 16 题）

17. 王老师正准备装修新买房屋的地面，到一家装修公司去看地砖，公司现有一批如图所示的正多边形地砖供用户选择.



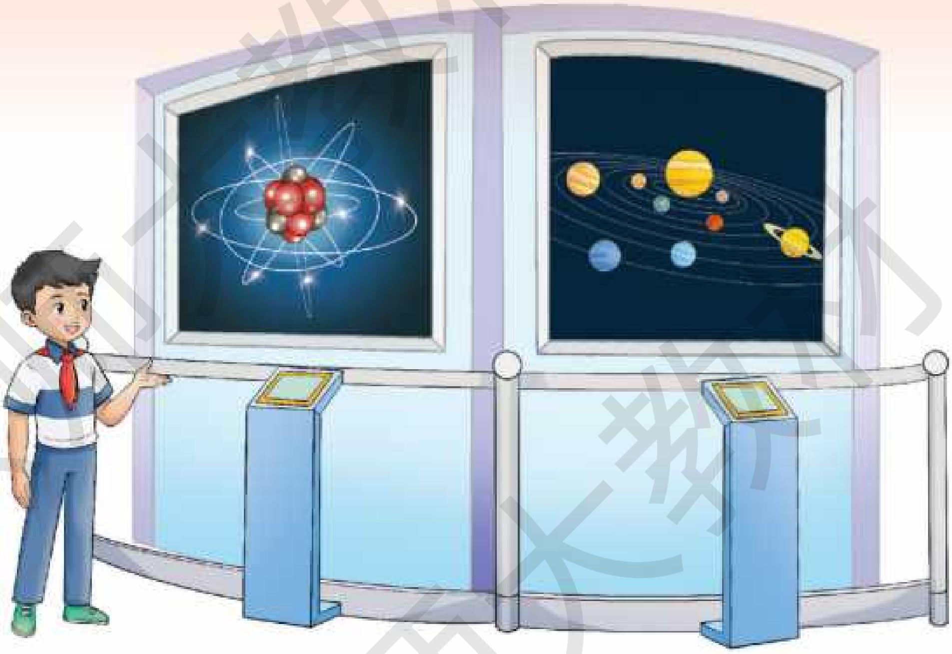
（第 17 题）

（1）若王老师考虑只用其中一种正多边形地砖铺满地面，则供他选择的正多边形地砖有哪些？

（2）若王老师考虑从其中任取两种地砖进行组合，则能铺满地面的正多边形地砖组合有哪些？

（3）若王老师考虑从其中任取三种地砖进行组合，则能铺满地面的正多边形地砖组合有哪些？

第 9 章　轴对称、平移与旋转



世界充满着运动，从天体、星球的运行，到原子、粒子的作用，其中最基本的是轴对称、平移、旋转等运动.

轴对称、平移与旋转等合成了大千世界千姿百态的运动.

★ 本章将探究在轴对称、平移与旋转的图形变化下图形的不变性质，并应用轴对称、平移与旋转等方法进行图案设计，从中体会图形变化在几何研究中的作用.

9.1 轴对称

1. 生活中的轴对称

不论是在自然界中还是在建筑中，不论是在艺术中还是在科学中，甚至在最普通的日常生活用品中，对称的形式都随处可见．山倒映在湖中，这是令人难忘的对称景象．自远古以来，对称的形式都被认为是和谐美丽的．

图 9.1.1 中的各个图形，你可能都见过．把它们沿着某条直线对折，可以发现对折后的两部分完全重合．

像这样的图形，叫做**轴对称图形**(a figure of line symmetry)，这条直线叫做这个图形的**对称轴**(axis of symmetry)．

图9.1.1

找出图 9.1.1 中各图形的对称轴．是否有些图形的对称轴不止一条呢？

试一试

用一张半透明的纸描出图 9.1.2 所示的星形图，然后用不同的方式对折，用直尺画出折痕，看看这幅星形图有多少条对称轴.

图9.1.2

我们再看图 9.1.3 中的两组图形.

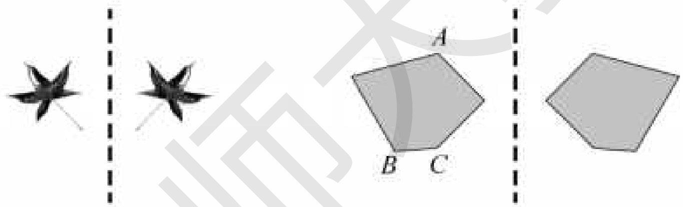


图9.1.3

每一组里，某一边的图形沿虚线对折之后与另一边的图形完全重合.

像这样，把一个图形沿着某一条直线对折，如果它能与另一个图形完全重合，那么就说这两个图形**成轴对称**，这条直线叫做**对称轴**，两个图形中的对应点(即两个图形重合时互相重合的点)叫做**对称点**.

你能举出日常生活中两个图形成轴对称的例子吗?

做一做

请你标出图 9.1.3 中 A、B、C 三点的对称点 A_1、B_1、C_1.

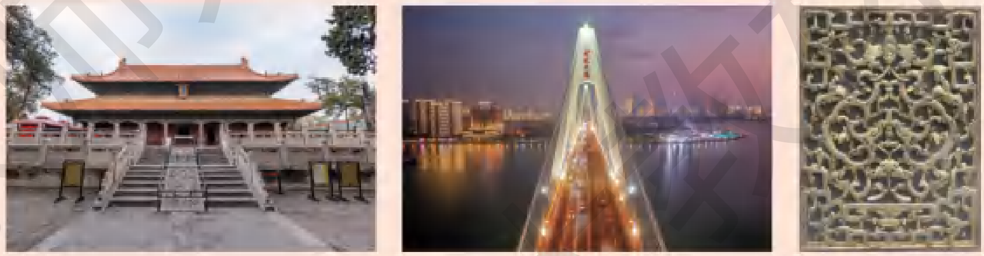
显然，轴对称图形(或成轴对称的两个图形)沿对称轴对折后的两部分是完全重合的，所以

轴对称图形(或成轴对称的两个图形)的对应线段(对折后重合的线段)相等，对应角(对折后重合的角)相等.

这就是轴对称图形的基本特征.

练习

1. 你一定见过许多美丽的照片或图片，如图所示的三幅图都给我们一种美妙和谐的轴对称形象.



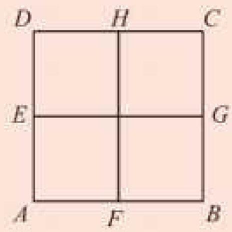
(第 1 题)

现在请你尽可能多地找出类似的照片或图片，与你的同伴一起欣赏.

2. 观察下列各种图形，分别判断是不是轴对称图形.

(第 2 题)

3. 如图，已知正方形 $ABCD$，点 E、F、G、H 分别是 DA、AB、BC、CD 的中点，四边形 $ABGE$ 沿 EG 对折能与四边形 $DCGE$ 重合，点 A 的对称点是点________；四边形 $AFHD$ 沿 HF 对折能与四边形 $BFHC$ 重合，点 B 的对称点是点________.



（第 3 题）

阅读材料

剪正五角星

节日前夕，有时需要制作许多五角星．我们用折纸的方法，可以直接剪出一个五角星．

方法是这样的：拿一张长方形(或圆形)的纸，对折成图 1，再沿图 1 中的虚线将平角折成五等份，得到图 2；在五等份的折线上，取点 A 和点 C，使 OC 比三分之一的 OA 微微长一点；沿斜线 AC 把图 2 中的阴影部分剪掉，然后把纸展开，就得到图 3 所示的一个正五角星．

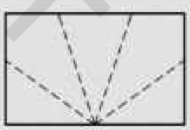


图 1

图 2

图 3

如图 4，若取得的 OC 比 OA 的三分之一长得多(如 OC 为 OA 的一半)，这时剪出的五角星就不一样了，它的五个角的边比较短；如图 5，而当沿直角方向剪时，展开后则成了一个正五边形.

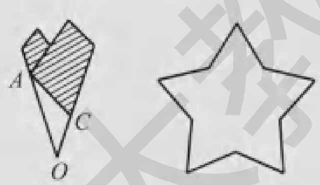


图 4

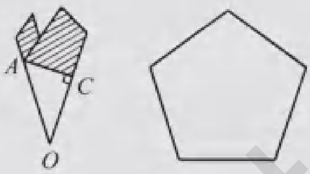


图 5

想一想：这种折纸剪正五角星的方法，其中隐含着什么数学道理？

2. 轴对称的再认识

观察线段和角，它们都是轴对称图形吗？

试一试

如图 9.1.4，在半透明纸上画出线段 AB，对折线段 AB，使点 A 与点 B 重合，在折痕上任取两点 P、Q，然后用直尺画出折痕 PQ，直线 PQ 与线段 AB 相交于点 O．对折后，线段 OA 与 OB 是否重合？$\angle POA$ 与 $\angle POB$ 是否重合？你能说明直线 PQ 与线段 AB 的关系吗？

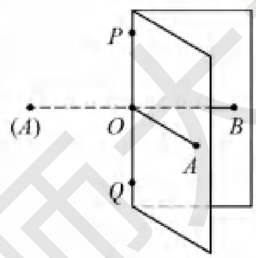


图9.1.4

通过上面的操作，我们可以看出，$OA = OB$，$\angle POA = \angle POB = 90°$．由此可知，直线 PQ 是线段 AB 的垂直平分线.

可知：线段是轴对称图形，其对称轴就是该线段的垂直平分线.

思考 我们已经能利用尺规作图，作一条线段等于已知线段，作一个角等于已知角，那么如何作出已知线段的垂直平分线，即对称轴呢？

在上页的“试一试”中，我们发现，将线段 AB 对折，左、右两半完全重合，此时线段 PA 与 PB 重合，QA 与 QB 重合，即 $PA = PB$，$QA = QB$.

于是我们想到，分别以点 A、B 为圆心，以同样长为半径作弧，两弧的交点即为垂直平分线上的两点 P 与 Q.

由此，你能发现利用尺规作图作线段垂直平分线的方法吗？

做一做

如图 9.1.5，已知线段 AB，试利用尺规作图，按下列作法准确地作出线段 AB 的垂直平分线.

（1）分别以点 A 和 B 为圆心、相同长（大于线段 AB 长的一半）为半径作弧，两弧分别相交于点 P 和点 Q；

（2）作直线 PQ.

直线 PQ 就是所要求作的线段 AB 的垂直平分线.

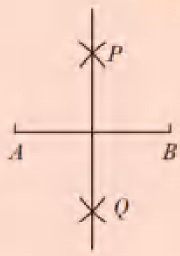


图9.1.5

现在我们已经知道，线段是轴对称图形，那么常见的角是否也是轴对称图形呢？

试一试

如图 9.1.6，在半透明纸上画出 $\angle AOB$，对折 $\angle AOB$，使角的两边完全重合，然后在折痕（角的内部）上任取一点 P，用直尺画出折痕 OP，显然射线 OP 是该角的平分线，看看直线 OP 与 $\angle AOB$ 是什么关系.

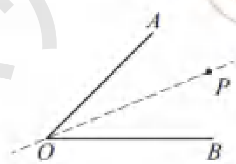


图9.1.6

从上面的操作中可以看出，角也是轴对称图形，其对称轴是这个角的平分线所在的直线.

思考 我们已经能利用尺规作图作出已知线段的垂直平分线，那么如何作出已知角的平分线，从而得到已知角的对称轴呢？

要利用尺规作图作已知角$\angle AOB$的平分线，由于点O为已知角的顶点，因此只要再找到角平分线上的另一点P，就可以解决问题了.

在上页“试一试”中，我们发现，将$\angle AOB$对折，两半完全重合. 此时若在该角一边OA上任取一点M，那么它必定与边OB上的另一点N重合，即$OM=ON$，$PM=PN$.

由此可以发现，所需作的角平分线OP所在的直线正是线段MN的垂直平分线.

于是我们想到，先以点O为圆心作弧，与角的两边分别交于M、N两点；再分别以点M和N为圆心、相同长为半径作弧，两弧的交点即为角平分线上的另一点P.

由此，你能发现利用尺规作图作角平分线的方法吗？

做一做

如图9.1.7，已知$\angle AOB$，试利用尺规作图，按下列作法准确地作出$\angle AOB$的平分线.

(1) 以点O为圆心、任意长为半径作弧，与角的两边分别交于M、N两点；

(2) 分别以点M和N为圆心、相同长(大于线段MN长的一半)为半径作弧，在$\angle AOB$内，两弧相交于点P；

(3) 作射线OP.

射线OP就是所要求作的$\angle AOB$的平分线.

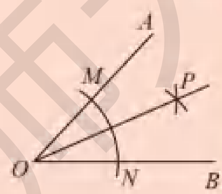


图9.1.7

在研究轴对称图形时，往往需要找到它的对称轴，看看沿对称轴翻折后各部分的对称情况.

试一试

如图 9.1.8，两个方格图内的图形都是轴对称图形，请作出它们的对称轴.

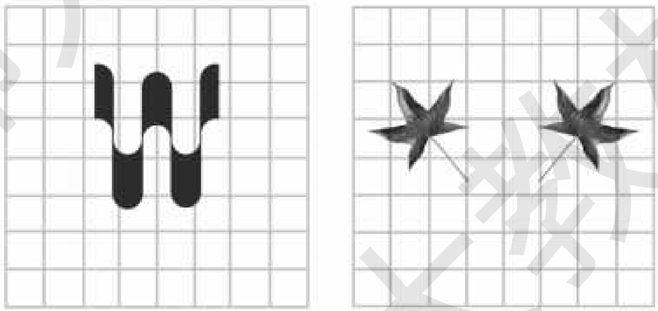


图9.1.8

由于图形在方格图内，我们可以凭直觉很准确地作出这两个图形的对称轴．如果没有方格图，且又不能对折时，那么如何准确地作出图形的对称轴呢？

连结对称点的线段与对称轴有什么关系？

做一做

如图 9.1.9，点 A 和点 A' 关于某条直线成轴对称，你能作出这条直线吗？

图9.1.9

其实，如图9.1.10，我们只要连结点A和点A'，作出线段AA'的垂直平分线l，直线l就是点A和点A'的对称轴.

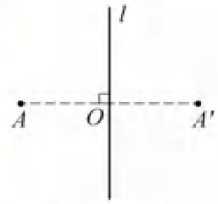


图9.1.10

我们现在可以总结出其他复杂的轴对称图形的对称轴的作法：

先找出轴对称图形的任意一组对称点，连结这一组对称点，得到一条线段，再作出这条线段的垂直平分线，就可以得到该图形的对称轴.

通过以上操作，我们有下面的结论：

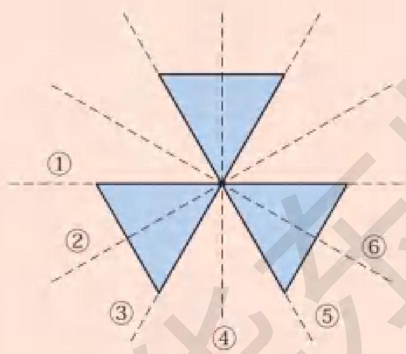
如果一个图形是轴对称图形，那么连结对称点的线段的垂直平分线就是该图形的对称轴.

练习

1. 平面上的两条相交直线是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？作图试试看.
2. 把一张正方形纸对折两次，然后分别剪出下列图形.

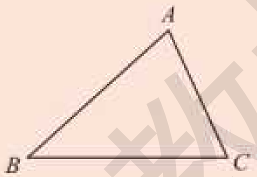
（第2题）

3. 图中的一些虚线，哪些是图形的对称轴，哪些不是？

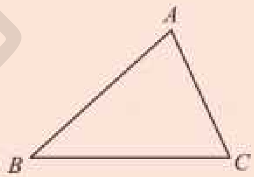


（第3题）

4. 如图，已知△ABC，利用尺规作图作出△ABC 的边 BC 上的中线.



（第 4 题）



（第 5 题）

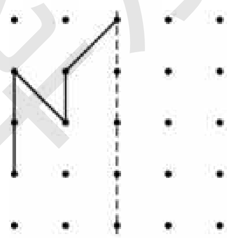
5. 如图，已知△ABC，利用尺规作图作出∠ABC 的平分线.

3. 作轴对称图形

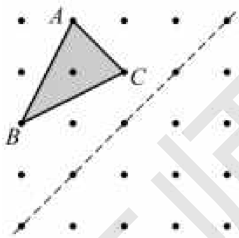
如果给出一个图形和一条直线，那么如何作出这个图形关于这条直线的对称图形呢？

试一试

如图 9.1.11，实线所构成的图形为已知图形，虚线为对称轴，试作出已知图形的轴对称图形. 作好之后，你可以通过对折的方法来验证你作得是否正确.



①



②

图9.1.11

在格点图中，很容易找到格点关于对称轴的对称点，因此可以较方便地作出已知图形的轴对称图形.

如果没有格点，应如何作出某个图形的轴对称图形呢？

如图 9.1.12，已知点 A 和直线 l，要作出点 A 关于直线 l 的对称点 A'，此时就需要过点 A 作直线 l 的垂线，与 l 相交于点 O，然后在垂线上取一点 A'，使 $OA' = OA$，如图 9.1.13 所示.

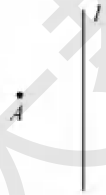


图9.1.12

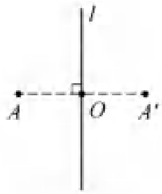


图9.1.13

思考 我们已经能利用尺规作图，作已知线段的垂直平分线，作已知角的平分线，那么如何利用尺规作图，过已知点作出已知直线的垂线，从而得到已知点关于已知直线的对称点呢？

已知点与已知直线可以有两种不同的位置关系：点在直线上；点在直线外. 现分别按这两种情况作图.

(1) 经过已知直线 AB 上一点 C 作已知直线 AB 的垂线.

如图 9.1.14①，由于点 C 在直线 AB 上，因此所要求作的垂线正好是平角 $\angle ACB$ 的平分线所在的直线.

(2) 经过已知直线 AB 外一点 C 作已知直线 AB 的垂线.

如图 9.1.14②，由于点 C 是垂线上的一个点，因此要作出垂线，只要再找到垂线上的另一点 P.

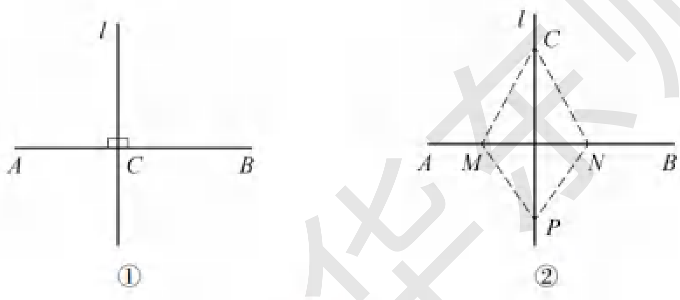


图9.1.14

如果垂线 CP 已作出，那么沿着垂线 CP 对折，可以发现 CP 一侧的直线 AB 上的点 M 与另一侧的某一点 N 重合，即有 $CM = CN$，$PM = PN$.

此时可以发现所需求作的垂线 CP 正是线段 MN 的垂直平分线.

于是我们想到，先以点 C 为圆心、适当长为半径作弧，与直线 AB 相交于 M、N 两点；再分别以点 M 和 N 为圆心、相同长为半径作弧，得到交点，即为垂线 l 上的另一点 P.

由此，你能发现利用尺规作图过一已知点作已知直线的垂线的方法吗？

做一做

1. 如图 9.1.15，经过已知直线 AB 上一点 C，试利用尺规作图，按下列作法准确地作出直线 AB 的垂线.

（1）作平角 $\angle ACB$ 的平分线 CP；

（2）反向延长射线 CP .

直线 CP 就是所要求作的垂线.

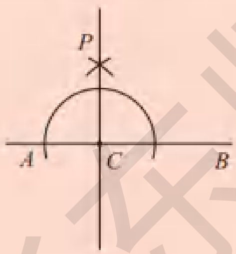


图9.1.15

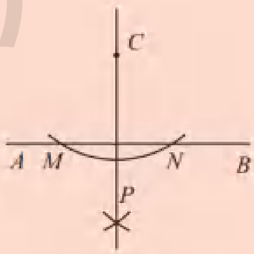


图9.1.16

2. 如图 9.1.16，经过已知直线 AB 外一点 C，试利用尺规作图，按下列作法准确地作出直线 AB 的垂线.

（1）以点 C 为圆心、适当长（大于点 C 到直线 AB 的距离）为半径作弧，交直线 AB 于 M、N 两点；

（2）分别以点 M、N 为圆心，相同长（大于线段 MN 长的一半）为半径作弧，两弧相交于点 P；

（3）作直线 CP.

直线 CP 就是所要求作的垂线.

▶ **例** 如图 9.1.17，已知$\triangle ABC$和直线l，作出$\triangle ABC$关于直线l对称的图形.

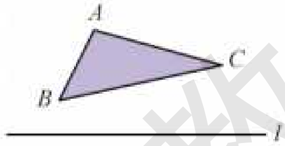


图9.1.17

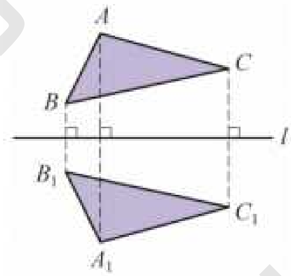


图9.1.18

作法 （1）分别作出点A、B、C关于直线l的对称点A_1、B_1和C_1；

（2）连结A_1B_1、B_1C_1、C_1A_1 .

如图 9.1.18，$\triangle A_1B_1C_1$就是所要求作的$\triangle ABC$关于直线l对称的三角形.

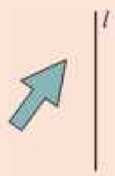
从上例可以知道，如果图形是由直线、线段或射线组成的，那么只要作出图形中的特殊点(如线段的端点、角的顶点等)的对称点，然后连结对称点，就可以作出关于这条直线的对称图形.

> 你可以试一试，作出其他复杂图形的轴对称图形.

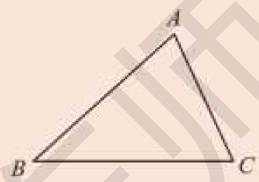
练习

1. 在图中分别作出点A关于两条直线的对称点A'和A''.
2. 作出如图所示图形关于直线l的对称图形.

(第 1 题)



(第 2 题)



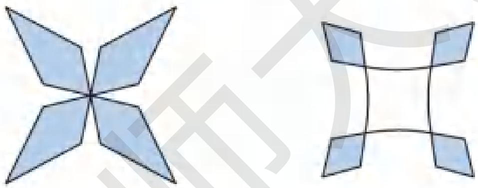
(第 3 题)

3. 如图，已知$\triangle ABC$，利用尺规作图作出$\triangle ABC$的边BC上的高.

4. 设计轴对称图案

在商标、衣料图案和众多的日用品上，我们可以看到不少丰富多彩的装饰图案，仔细观察这些装饰图案，你会发现其中有许多轴对称图形.

图 9.1.19 是两个轴对称图形，它们有多少条对称轴？我们可以利用轴对称的方法来作出它们吗？



①　②

图9.1.19

请准备一张正方形纸片，按图 9.1.20 所示的 5 个步骤来作：

（1）如图 9.1.20①，在正方形纸片上用虚线作出 4 条对称轴；

（2）如图 9.1.20②，在其中一个三角形中，作出图形形状的基本线条（注意：不同的线条最终会得到不同的图案，你可以自己设计线条，而不必和教科书中的一样）；

（3）如图 9.1.20③，按照其中一条斜的对称轴作出（2）中图形的对称图形；

（4）如图 9.1.20④，按照另一条斜的对称轴作出（3）中图形的对称图形；

（5）如图 9.1.20⑤，按照水平（或垂直）的对称轴作出（4）中图形的对称图形，从而得到图 9.1.19①中的图形.

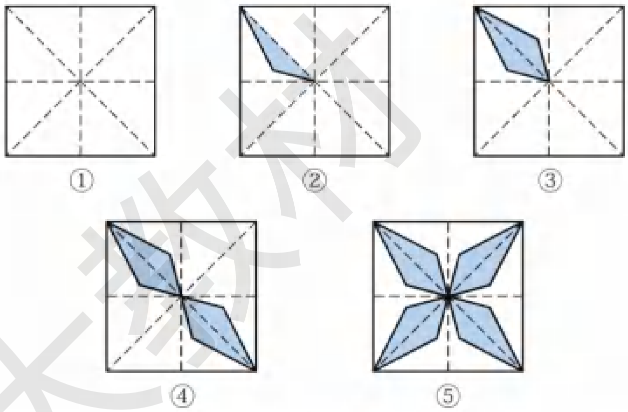


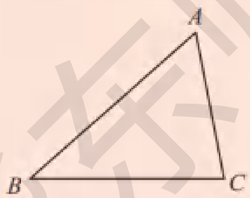
图9.1.20

作好之后，你可以在图案上涂上你喜欢的颜色，擦掉其他多余的线条，一幅对称的图案就完成了.

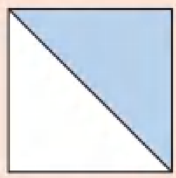
作轴对称图形只是图案设计的一种方法，我们以后还会接触更多的方法. 当然，如果我们用一些美术知识，就可以设计出更多漂亮的图案了.

练习

1. 如图，已知△*ABC*，分别作出△*ABC* 关于 *AB*、*BC*、*CA* 对称的三角形.



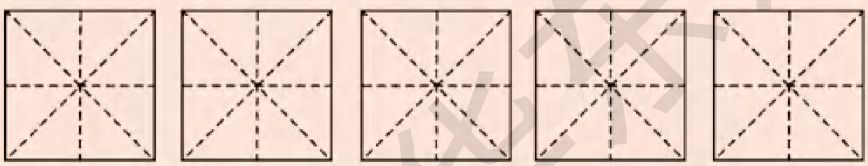
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 用四块如图所示的图形拼成一个正方形，形成轴对称的图案，与你的同伴比一比，看谁的拼法多.

3. 仿照教科书中给出的步骤，利用题图设计一个轴对称图案.

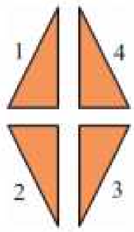


（第 3 题）

习题9.1

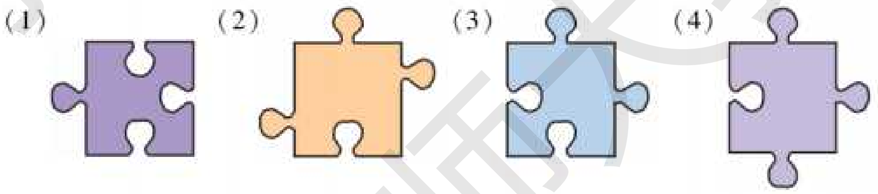
A 组

1. 图中三角形 4 与图中哪些三角形成轴对称？整个图形中有几条对称轴？



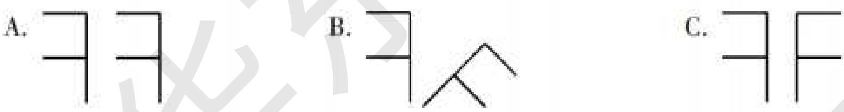
（第 1 题）

2. 下列图形中，哪些是轴对称图形？哪些不是轴对称图形？



（第 2 题）

3. 下列选项中，两部分图形成轴对称的是(　　)．(可能有多个答案)



4. 在图形中标出点 A、B 和 C 关于直线 l 的对称点．

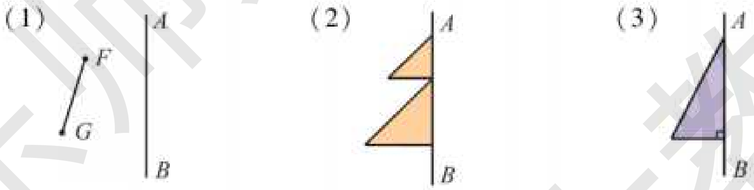
（第 4 题）

5. 下列图形中，哪些是轴对称图形？哪些不是轴对称图形？如果是轴对称图形，请作出对称轴.

(第 5 题)

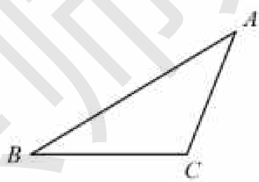
B 组

6. 分别以 AB 为对称轴，作出下列各图形的对称图形，并观察(3)中的图形和它的轴对称图形构成了什么三角形，说说你的想法.



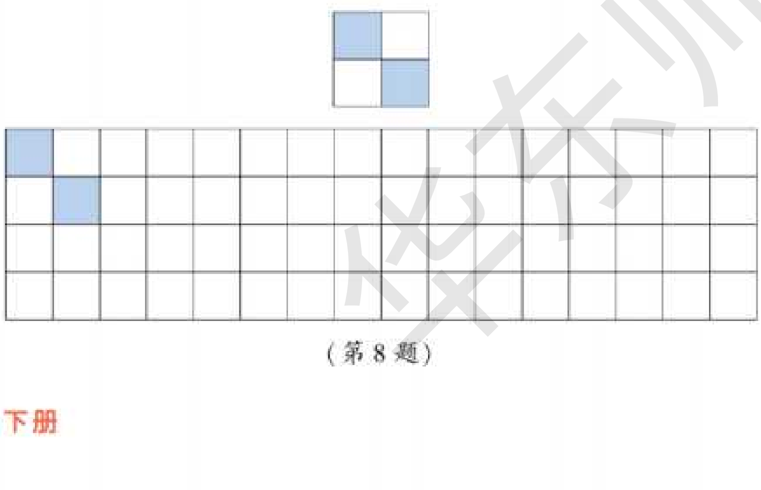
(第 6 题)

7. 如图，已知$\triangle ABC$，利用尺规作图作$\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线和高.



(第 7 题)

8. 将 1 个正方形分成 4 个相同的小正方形，并将左上角与右下角的小正方形涂上颜色，如图所示．以此正方形为基本图形，通过轴对称，在给出的方格图中设计美丽的图案.



(第 8 题)

9.2 平 移

1. 图形的平移

在日常生活中，我们经常可以看到如图 9.2.1 所示的一些现象：滑雪运动员在白茫茫的平坦雪地上滑行，大楼电梯上上下下地迎送来客，火车在笔直的铁轨上飞驰而过，飞机起飞前在跑道上加速滑行，这些都给我们以物体平行移动的感觉.

本章主要研究平面图形在一个平面上的平移问题.

图9.2.1

如图 9.2.2，在同一平面内，三角板沿着由点 A 到点 B 的方向，从 M 处平行移动到 N 处. 像这样的运动叫做**平移**(translation). 平移由移动的方向和距离决定.

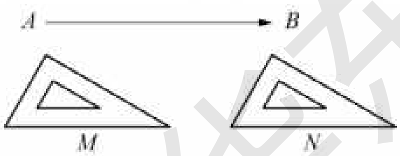


图9.2.2

如图 9.2.3，当我们使用直尺和三角板画平行线时，将△ABC 沿着直尺 PQ 平移到△$A'B'C'$，就可以画出 AB 的平行线 $A'B'$ 了.

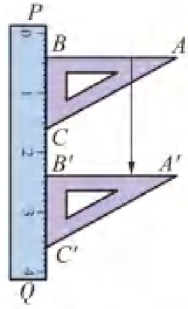


图9.2.3

我们把点 A 与点 A' 叫做对应点，把线段 AB 与线段 $A'B'$ 叫做对应线段，把∠A 与∠A' 叫做对应角. 此时：

点 B 的对应点是点____________；

点 C 的对应点是点____________；

线段 AC 的对应线段是线段____________；

线段 BC 的对应线段是线段____________；

∠B 的对应角是____________；

∠C 的对应角是____________.

△ABC 平移的方向就是由点 B 到点 B' 的方向，平移的距离就是线段 BB' 的长度.

试一试

在图 9.2.4 中，△ABC 沿着由点 A 到点 A' 的方向，平移到△$A'B'C'$ 的位置. 你知道线段 AC 的中点 M 以及线段 BC 上的点 N 平移到哪个位置了吗？请在图中标出它们的对应点 M' 和 N' 的位置.

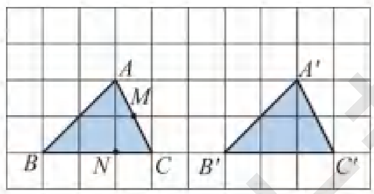


图9.2.4

图形的平移在图案设计中具有很大作用. 如图 9.2.5 所示的两幅美丽的图案都可以看成是由某一基本的图案，在同一平面内沿着一定的方向平移若干次而产生的结果.

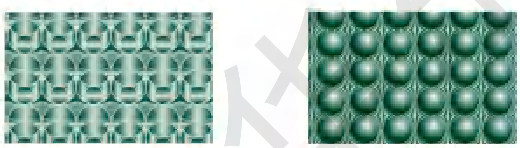
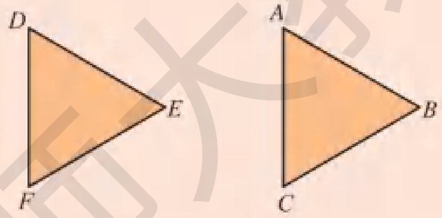


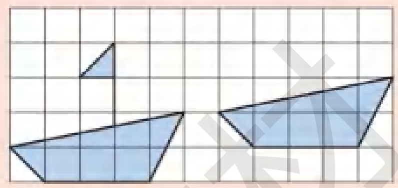
图9.2.5

练习

1. 举出现实生活中平移的一些实例.
2. 如图所示的△ABC 和△DEF 都是等边三角形，其中一个等边三角形经过平移后成为另一个等边三角形. 指出点 A、B、C 的对应点，线段 AB、BC、CA 的对应线段，以及 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对应角.



（第 2 题）


（第 3 题）

3. 如图，小船经过平移到了新的位置，你发现缺少什么了吗？请补上.

2. 平移的特征

如图 9.2.6，在画平行线的时候，有时为了需要，将直尺和三角板放在倾斜的位置上. 但不管怎样，我们总可以推得

$$A'B' \parallel AB, \quad A'B' = AB, \quad \angle B' = \angle B.$$

同时也有

$A'C' \parallel$ ______，$A'C'$ = ______，$\angle C'$ = ______.

$B'C'$ 与 BC ______，$B'C'$ = ______，$\angle A'$ = ______.

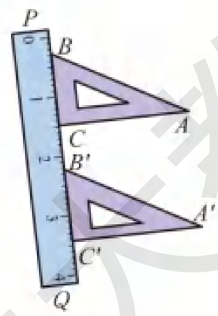


图9.2.6

由此我们可以得到图形平移的特征：

平移后的图形与原来图形的对应线段平行（或在同一条直线上）且相等，对应角相等，图形的形状和大小不变.

在平移过程中，对应线段也可能在同一条直线上（如图 9.2.6 中的 $B'C'$与 BC）.

探索 观察图 9.2.7，$\triangle ABC$ 沿着 PQ 方向平移到$\triangle A'B'C'$的位置，我们可以看到，$\triangle ABC$ 上的每一点都作了相同的平移：

$$A \to A',\quad B \to B',\quad C \to C'.$$

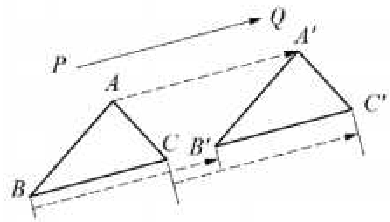


图9.2.7

你发现对应点所连的线段有什么特点了吗？

不难发现：

$$AA' \parallel BB',\quad AA' = BB';$$
$$AA' \parallel \underline{\qquad\qquad},\quad AA' = \underline{\qquad\qquad};$$
$$BB' \text{ 与 } CC' \underline{\qquad\qquad},\quad BB' = \underline{\qquad\qquad}.$$

在平移过程中，对应点所连的线段也可能在同一条直线上（如图 9.2.7 中的 BB' 和 CC'）.

由此我们还可以得到：

平移后对应点所连的线段平行（或在同一条直线上）且相等.

试一试

将图 9.2.8 中的 $\triangle ABC$ 沿 PQ 方向平移到$\triangle A'B'C'$的位置，其平移的距离为线段 PQ 的长度.

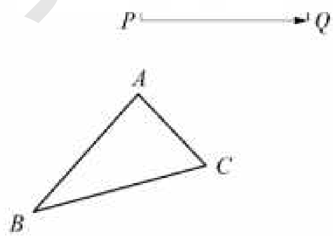


图9.2.8

观察所得到的对应线段和对应点所连的线段是否符合上述我们所得到的平移的特征？

▶ **例** 如图 9.2.9①，$\triangle ABC$ 经过平移到达$\triangle A'B'C'$的位置．指出平移的方向，并量出平移的距离．（精确到 1 mm）

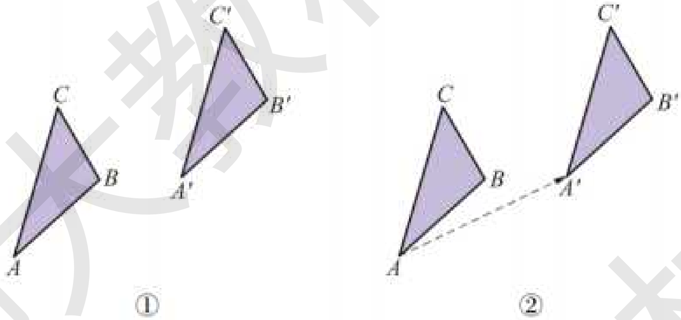


图9.2.9

解 由于点 A 与点 A'是一对对应点，因此，如图 9.2.9②，连结 AA'，平移的方向就是点 A 到点 A'的方向，平移的距离就是线段 AA'的长，经测量可知，约 25 mm．

试一试

在如图 9.2.10 的方格图中，作出将图中的$\triangle ABC$ 向右平移 4 格后的$\triangle A'B'C'$，然后再作出将$\triangle A'B'C'$向上平移 3 格后的$\triangle A''B''C''$．$\triangle A''B''C''$是否可以看成是$\triangle ABC$ 经过一次平移而得到的？如果是，请指出平移的方向和距离．

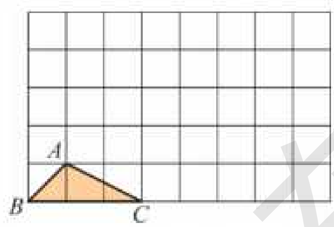


图9.2.10

做一做

如图 9.2.11，在纸上作$\triangle ABC$和平行直线 m、n．作出$\triangle ABC$关于直线 m 对称的$\triangle A'B'C'$，再作出$\triangle A'B'C'$关于直线 n 对称的$\triangle A''B''C''$．

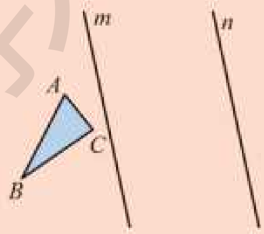
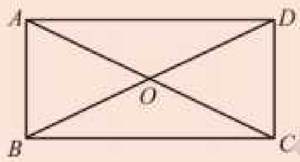


图9.2.11

观察$\triangle ABC$和$\triangle A''B''C''$，你能发现这两个三角形有什么关系吗？

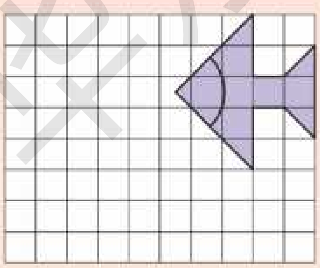
练习

1. 如图，在长方形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，作出$\triangle AOB$平移后的三角形，其平移方向为射线 AD 的方向，平移距离为线段 AD 的长．

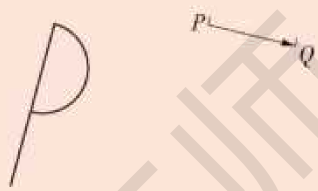


（第 1 题）

2. 先将方格图中的图形向左平移 5 格，然后再向下平移 3 格，作出平移后的图形．



（第 2 题）



（第 3 题）

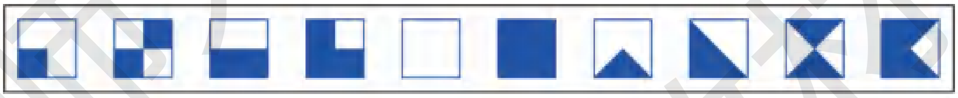
3. 将所给图形沿着 PQ 方向平移，平移距离为线段 PQ 的长，作出平移后的图形．

信息技术应用

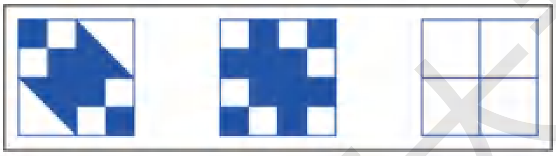
图案设计

我们已经认识了图形的两种基本变换：轴对称、平移．利用动态几何软件，通过图形的这两种基本变换，可以方便地设计出各种各样的漂亮图案．

1．画出下图中的 10 种图形．

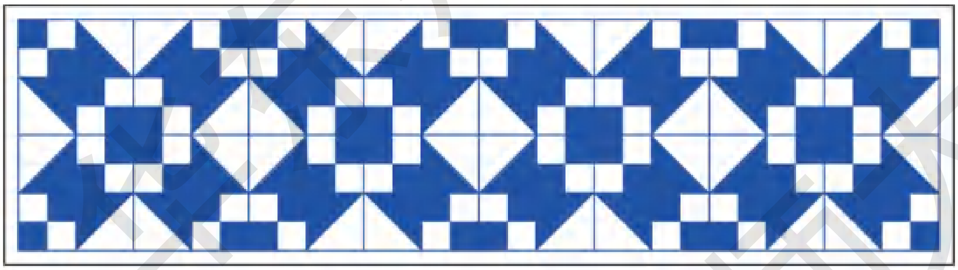


2．用其中的 4 幅图形（允许有相同的），设计出美丽的基本图案．

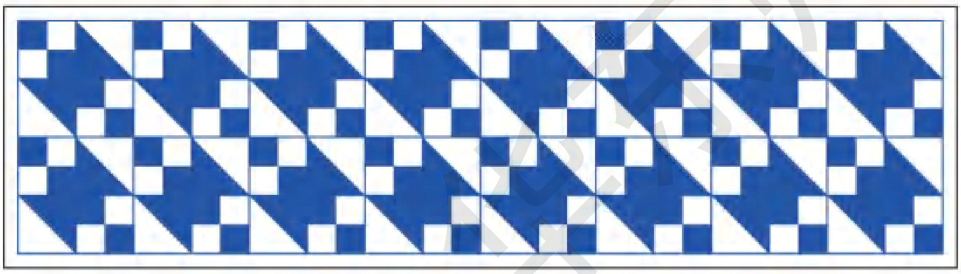


3．利用如右图所示的动态几何软件中的轴对称（反射）、平移功能，设计出更大、更美丽的图案．

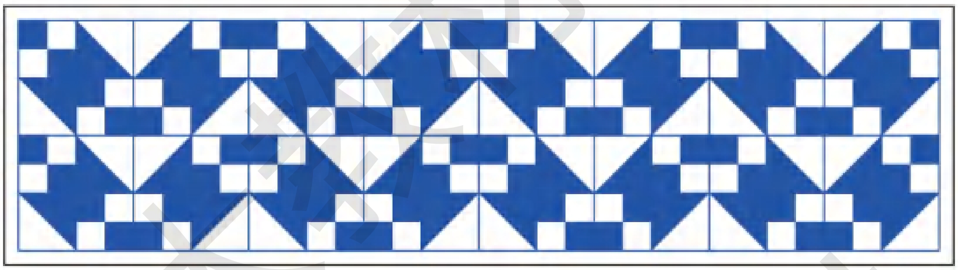
（1）利用第一个基本图案，通过轴对称设计出如下图案：



（2）利用第一个基本图案，通过平移设计出如下图案：



(3) 利用第一个基本图案，通过轴对称和平移设计出如下图案：



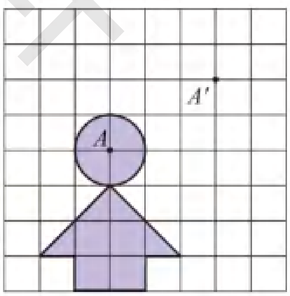
(4) 利用第二个基本图案，你能通过轴对称、平移，设计出更大、更美丽的图案吗？

(5) 你能利用上面 10 种图形，通过轴对称、平移，设计出更大、更美丽的图案吗？

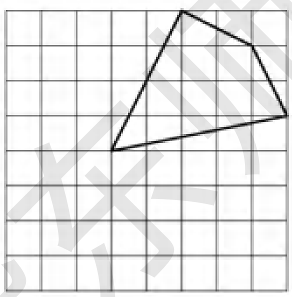
习题9.2

A 组

1. 任意作一个三角形，然后将此三角形沿着北偏东 60°的方向平移 2.8 cm，作出平移后的三角形.
2. 如图，平移方格图中的图形，使点 A 平移到点 A' 处，作出平移后的图形.



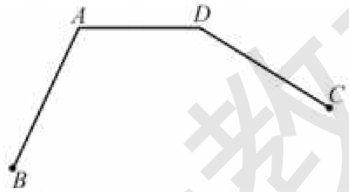
（第 2 题）



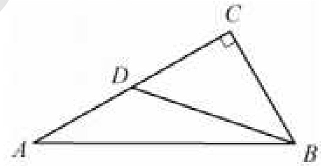
（第 3 题）

3. 先将如图所示的方格图中的图形向左平移 3 格，再向下平移 4 格，作出平移后的图形.

4. 如图，$AB = DC$，作出线段 AB 平移后的线段 DE，其平移方向为射线 AD 的方向，平移距离为线段 AD 的长. 平移后，连结 EC，则$\triangle DEC$ 是什么三角形？试说明理由.



（第 4 题）

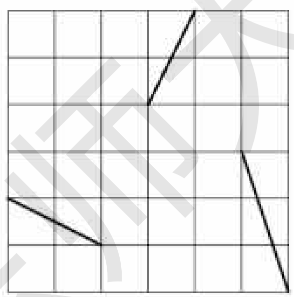


（第 5 题）

5. 如图，BD 是$\triangle ABC$ 的中线，$\angle C = 90°$. 平移线段 BC，使点 B 平移到点 D 处，平移后的线段垂直平分线段 AC 吗？为什么？

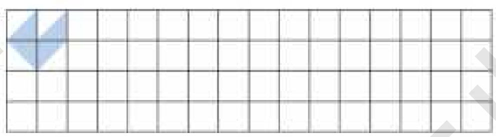
B 组

6. 如图，将方格图中的三条线段沿方格图的水平方向或垂直方向平移后组成一个首尾顺次相接的三角形，那么这三条线段在水平方向及垂直方向平移的总格数至少是多少？



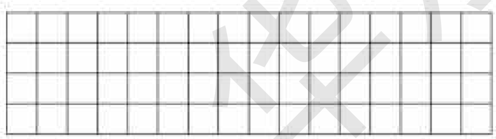
（第 6 题）

7. 利用如图所示的图形，通过平移，在给出的方格图中设计图案.



（第 7 题）

8. 请自行设计一个基本图形，然后通过平移，在给出的方格图中设计美丽的图案.



（第 8 题）

9.3 旋 转

1. 图形的旋转

在日常生活中，除了物体的平行移动外，我们还可以看到许多如图 9.3.1 所示物体的旋转现象.

时钟上秒针的不停转动提醒着人们时间的流逝，大风车的转动给人们带来快乐，飞速转动的电风扇叶片给人们带来丝丝凉意.

本章主要研究平面图形在一个平面上的旋转问题.

图9.3.1

如图 9.3.2，单摆上的小球绕着悬挂点在一个平面上转动，由位置 P 转动到位置 P'，像这样的运动叫做**旋转**（rotation）. 这一悬挂点叫做小球旋转的**旋转中心**（centre of rotation）. 显然，旋转中心在旋转过程中是保持不动的，图形的旋转由旋转中心、旋转角度和旋转方向决定.

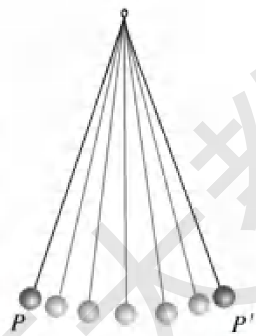


图9.3.2

试一试

如图 9.3.3，把一张半透明的薄纸，覆盖在作有任意△AOB 的纸上，在薄纸上作出与△AOB 重合的一个三角形. 然后用一枚图钉在点 O 处固定，将薄纸绕着图钉（即点 O）逆时针旋转 45°，

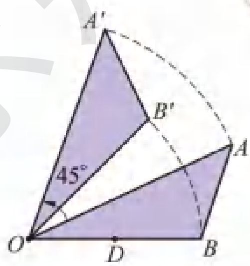


图9.3.3

薄纸上的三角形就旋转到了新的位置，标上点 A'、B'，我们可以认为$\triangle AOB$ 逆时针旋转 45° 后变成$\triangle A'OB'$.

在这样的旋转过程中，你发现了什么？

图形旋转时，必须注意旋转中心、旋转角度和旋转方向.

从图 9.3.3 中，可以看到点 A 旋转到点 A'，OA 旋转到 OA'，$\angle AOB$ 旋转到$\angle A'OB'$，这些分别是互相对应的点、线段和角．此时：

点 B 的对应点是点________；

线段 OB 的对应线段是线段________；

线段 AB 的对应线段是线段________；

$\angle A$ 的对应角是________；

$\angle B$ 的对应角是________；

旋转中心是点________；

旋转角度是________.

▶ **例 1** 如图 9.3.4，$\triangle ABC$ 是等边三角形，D 是边 BC 上一点，$\triangle ABD$ 经过逆时针旋转后到达$\triangle ACE$ 的位置.

（1）旋转中心是哪一点？

（2）旋转了多少度？

（3）如果点 M 是 AB 的中点，那么经过上述旋转后，点 M 转到了什么位置？

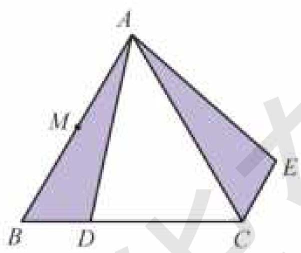


图9.3.4

解 （1）旋转中心是点 A．

（2）旋转了 60°．

（3）点 M 转到了 AC 的中点位置处．

▶ **例 2** 如图 9.3.5①，点 M 是线段 AB 上一点，将线段 AB 绕着点 M 顺时针旋转 90°，旋转后的线段与原线段的位置有何关系？如果逆时针旋转 90°呢？

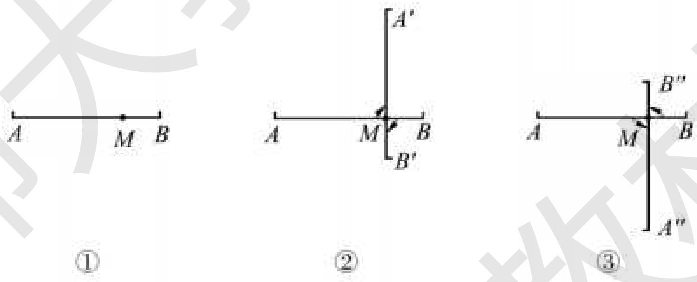


图9.3.5

解 如图 9.3.5②，顺时针旋转 90°，$A'B'$ 与 AB 互相垂直．

如图 9.3.5③，逆时针旋转 90°，$A''B''$ 与 AB 互相垂直．

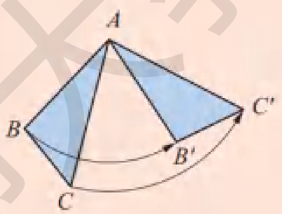
线段绕线段上的某一点旋转 90°后与原来位置的线段互相垂直．

图形的旋转在图案设计中也具有广泛应用．如图 9.3.6 所示的两幅美丽的图案都可以看成是由一个或几个基本图案，在同一平面上旋转若干次而产生的结果．

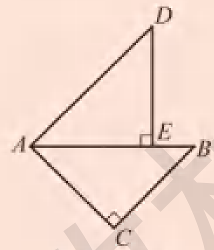
图9.3.6

练习

1. 举出现实生活中旋转的一些实例.
2. 如图，$\triangle ABC$ 按逆时针方向旋转一个角度后成为$\triangle AB'C'$，图中哪一点是旋转中心？旋转了多少度？



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形，$\angle C$ 和$\angle AED$ 都是直角，点 E 在边 AB 上，如果$\triangle ABC$ 经逆时针旋转后能与$\triangle ADE$ 重合，那么哪一点是旋转中心？旋转了多少度？

2. 旋转的特征

探索 在图 9.3.7 中，$\triangle AOB$ 绕点 O（点 O 是三角形的顶点）逆时针旋转到$\triangle A'OB'$处，你发现有哪些线段相等？有哪些角相等？

在图 9.3.8 中，$\triangle ABC$ 绕点 O（点 O 不是三角形的顶点，而是在三角形外）逆时针旋转到$\triangle A'B'C'$处，你发现有哪些线段相等？有哪些角相等？

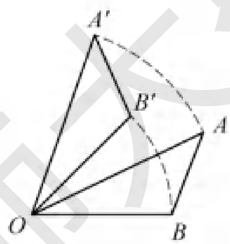


图9.3.7

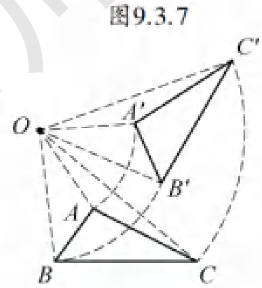


图9.3.8

如图 9.3.7，在旋转过程中，图形上的每一点绕着点 O 转过的角度都相等，即可得 $\angle AOA' = \angle BOB'$. 除此以外，

我们还可以发现：

$$OA = OA',\quad OB = OB',\quad AB = A'B';$$
$$\angle AOB = \angle A'OB',\quad \angle A = \angle A',\quad \angle B = \angle B'.$$

如图 9.3.8，在旋转过程中，我们也可以发现类似的结果：

$$\angle AOA' = \angle BOB' = \angle COC';$$
$$OA = \underline{\qquad\qquad},\quad OB = \underline{\qquad\qquad},\quad OC = \underline{\qquad\qquad};$$
$$AB = \underline{\qquad\qquad},\quad BC = \underline{\qquad\qquad},\quad CA = \underline{\qquad\qquad};$$
$$\angle CAB = \underline{\qquad\qquad},\quad \angle ABC = \underline{\qquad\qquad},\quad \angle BCA = \underline{\qquad\qquad}.$$

由此，我们可以得到图形旋转的特征：

图形中每一点都绕着旋转中心按同一旋转方向旋转了同样大小的角度，对应点到旋转中心的距离相等，对应线段相等，对应角相等，图形的形状和大小不变.

做一做

如图 9.3.9，在纸上作△ABC 和点 P，以及过点 P 的两条直线 PQ、PR．作出△ABC 关于 PQ 对称的△$A'B'C'$，再作出△$A'B'C'$关于 PR 对称的△$A''B''C''$.

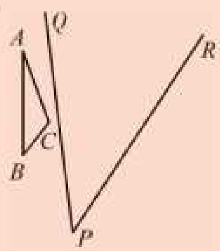


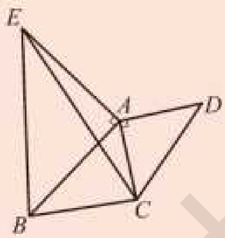
图9.3.9

观察△ABC 和△$A''B''C''$，你能发现这两个三角形有什么关系吗？

练习

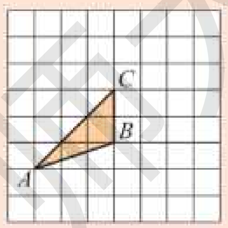
1. 确定如图中的旋转中心，指出这一图形可以看成是由哪个基本图形旋转而生成的，旋转了几次，每一次旋转了多少度.

（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，$\triangle ACD$、$\triangle AEB$ 都是等腰直角三角形，$\angle CAD = \angle EAB = 90°$，作出 $\triangle ACE$ 以点 A 为旋转中心、逆时针旋转 $90°$ 后的三角形.
3. 如图，作出 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 $90°$ 后的图形.



（第 3 题）

3. 旋转对称图形

在日常生活中，我们经常可以看到，一些图形绕着某一定点旋转一定的角度后能与自身重合. 如图 9.3.10 所示，电扇的叶片旋转 $120°$、螺旋桨旋转 $180°$ 后，都能与自身重合. 你能再举出一些这样的实例吗？

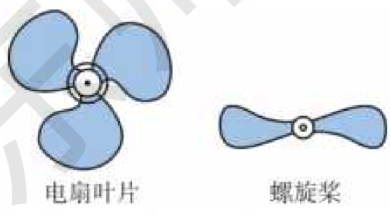


图9.3.10

试一试

用一张半透明的薄纸，覆盖在如图 9.3.11 所示的图形上，在薄纸上画这个图形，使它与图 9.3.11 所示的图形重合．然后用一枚图钉在圆心处穿过，将薄纸绕着图钉旋转，观察旋转多少度(小于周角)后，薄纸上的图形能与原图形再一次重合．

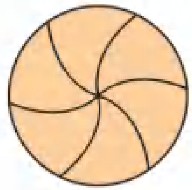


图9.3.11

由上述操作可知，该图形绕圆心旋转 60°后，能与自身重合(绕圆心旋转 120°、180°、240°或 300°后，也能与自身重合)．像这样旋转一定角度后能与自身重合的图形叫做**旋转对称图形**(a figure of rotation symmetry)．

旋转对称图形顺时针或逆时针旋转一定角度后，均能与原图形重合，因此可淡化旋转方向．旋转角度可以在 0°到 360°之间．

做一做

设计一个旋转 90°后能与自身重合的旋转对称图形：将如图 9.3.12 所示的图形绕圆心旋转 90°，再将旋转后所得到的图形绕圆心旋转 90°，然后再重复旋转一次，可以得到如图 9.3.13 所示的图形．

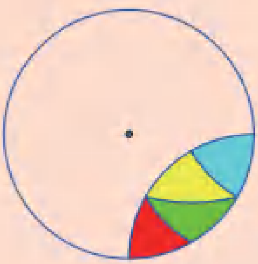


图9.3.12

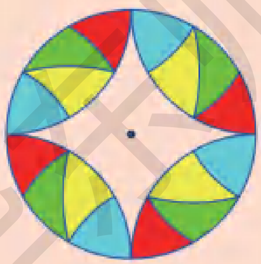


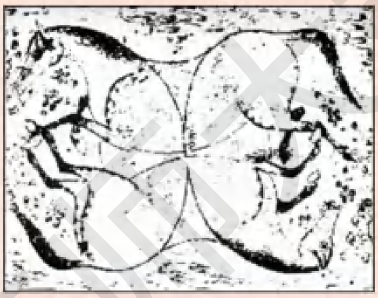
图9.3.13

将如图 9.3.13 所示的图形绕圆心旋转 90°后，可以发现旋转以后的图形能与原来位置上的原图形重合，因此该图形是旋转对称图形．当然该图形绕圆心旋转 180°或 270°后的图形也能与原图形重合，也可得出该图形是旋转对称图形．

你能设计一个旋转 30°后能与自身重合的图形吗？

练习

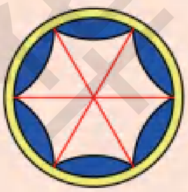
1. 举出日常生活中旋转对称图形的几个实例．
2. 找找看，下面这幅古代艺术品图形中有几匹马？它们的位置关系大致如何？



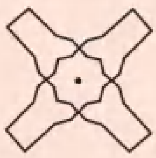
（第 2 题）

3. 如图所示的图形绕哪一点旋转多少度后能与自身重合？

（1）



（2）



（第 3 题）

4. 任意作一个△ABC，再任意作一个点 P，然后作出△ABC 绕点 P 逆时针旋转 60°后的三角形．

阅读材料

古建筑中的旋转对称

——从敦煌洞窟到欧洲教堂

敦煌的佛教洞窟与欧洲的基督教堂相距数千千米，文化和宗教背景截然不同，然而，在相距几百年的时间里，却先后出现了完全相同的一种图案：三只兔子相互追逐形成一环．大英博物馆《国际敦煌学项目》(IDP News)首次披露了这一发现．

隋朝，敦煌407窟窟顶上的图案

16世纪早期，德国帕德波恩大教堂的玻璃镶花图案

敦煌佛教洞窟中，至少有16个洞窟中出现了这一图案：三只兔子位于莲花的中心，耳朵相连，朝着不同方向，互相追逐，有的是顺时针(如305窟)，有的是逆时针(如407窟)．这些洞窟建于隋朝和晚唐时期．但是，敦煌学文献中却找不到关于这一图案相关研究的记录．

而到了13世纪，在欧洲的德国、法国和英国某些基督教堂的屋顶浮雕等处，都发现了相同或相似的图案．这三只兔子是如何从中国传到欧洲的，一时成为敦煌学界的一大研究热点．有专家指出，这一图案是通过中国的纺织品经由丝绸之路传到欧洲的，但目前还没有确切的证据证实这一观点．对此，专家们还在进行研究，以期解开“三只兔子之谜”．

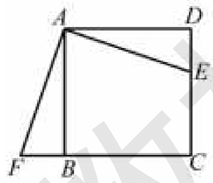
19世纪欧洲一本谜语书中的图案

习题9.3

A 组

1. 如图所示的五角星绕哪一点旋转多少度后能与自身重合？

（第 1 题）



（第 2 题）

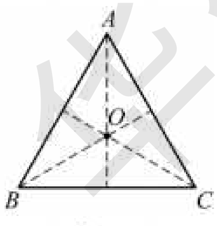
2. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，$\triangle ADE$ 经顺时针旋转后与$\triangle ABF$ 重合.

（1）旋转中心是哪一点？

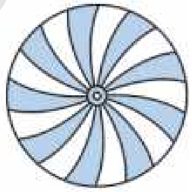
（2）旋转了多少度？

（3）如果连结 EF，那么$\triangle AEF$ 是怎样的三角形？

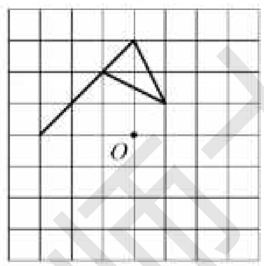
3. 如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，点 O 是三条中线的交点，$\triangle ABC$ 以点 O 为旋转中心，旋转多少度后能与原来的图形重合？



（第 3 题）



（第 4 题）



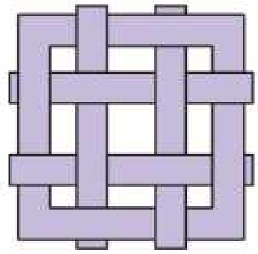
（第 5 题）

4. 分两种情况：考虑颜色和不考虑颜色，看看如图所示的图形绕圆心旋转多少度后能与自身重合？

5. 作出所给图形绕点 O 顺时针旋转 90°后的图形，旋转几次后可以与原图形重合？

B 组

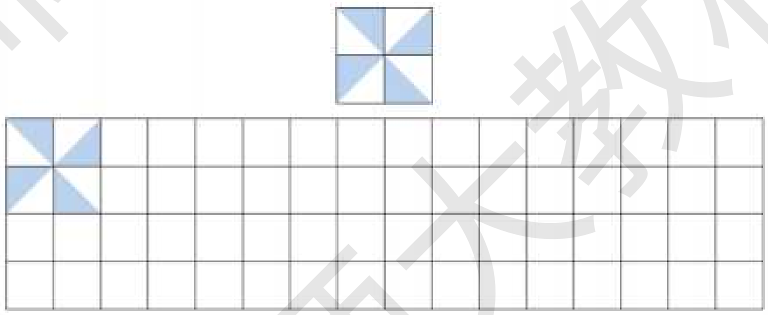
6. 如图所示的图形是旋转对称图形吗？如果是，那么旋转中心在何处？需要旋转多少度后能与自身重合？该图形是轴对称图形吗？



（第 6 题）

7. 请设计一个旋转 45°后能与自身重合的旋转对称图形，且该图形不是轴对称图形.

8. 作出如图所示的一个旋转 90°后能与自身重合的旋转对称图形，并以此图形为基本图形，通过轴对称或平移，在给出的方格图中设计美丽的图案.



（第 8 题）

9.4 中心对称

在上一节中，我们已经看到有不少图形绕着某一中心旋转一定角度后，可以与自身重合. 如图 9.4.1 所示的三个图形都是这样的旋转对称图形.

图9.4.1

图 9.4.1 中间的图形绕着中心旋转 180°后能与自身重合，像这样的图形叫做**中心对称图形**(a figure of central symmetry)，这个中心叫做**对称中心**(centre of symmetry).

中心对称图形是旋转角度为 180°的旋转对称图形.

把一个图形绕着某一点旋转 180°，如果它能够与另一个图形重合，那么，我们就说这两个图形**成中心对称**，这个点叫做**对称中心**，这两个图形中的对应点叫做**关于中心的对称点**.

思考 线段、等边三角形、平行四边形、长方形、正方形、圆分别是中心对称图形吗？如果是，那么对称中心又分别在哪里？

如图 9.4.2 所示，$\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 是成中心对称的两个三角形，点 A 是对称中心，点 B 的对称点为点________，点 C 的对称点为点________，点 A 的对称点为点________.

点 B 绕着点 A 旋转 180°到达点 D 处，因此，B、A、D 三点在同一条直线上，并且 $AB = AD$.

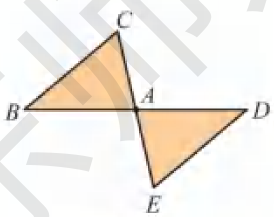


图9.4.2

C、A、E 三点的位置关系怎样？线段 AC、AE 的大小关系呢？

探索 在图 9.4.3 中，$\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 关于点 O 成中心对称，你能从图中找到哪些等量关系？

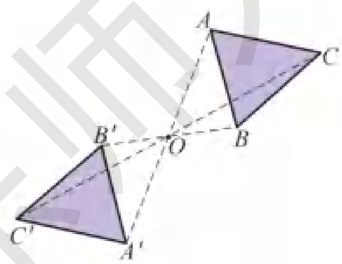


图9.4.3

我们可以发现，点 A 绕中心点 O 旋转 180°后到点 A'，于是 A、O、A' 三点在同一条直线上，并且 $OA = OA'$. 另外分别在同一条直线上的三点还有________和________；并且 $OB =$ ________，$OC =$ ________.

概括 在成中心对称的两个图形中，连结对称点的线段都经过对称中心，并且被对称中心平分.

反过来，如果两个图形的所有对应点连成的线段都经过某一点，并且都被该点平分，那么这两个图形关于这一点成中心对称.

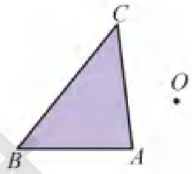


图9.4.4

▶ **例** 如图 9.4.4，已知△ABC 和点 O，作△DEF，使△DEF 与△ABC 关于点 O 成中心对称.

作法 （1）连结 AO 并延长 AO 到点 D，使 $OD=OA$，于是得到点 A 关于点 O 的对称点 D；

（2）同样作出点 B 和点 C 关于点 O 的对称点 E 和点 F；

（3）顺次连结 DE、EF、FD .

如图 9.4.5，△DEF 即为所要求作的三角形.

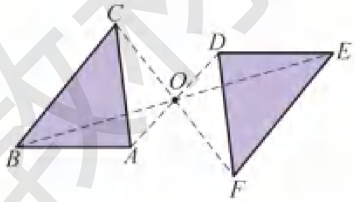


图9.4.5

练习

1. 仔细观察如图所示的 26 个英文字母，将相应的字母填入表中适当的空格内.

ABCDEFGHIJKLM

NOPQRSTUVWXYZ

（第 1 题）

	轴对称		旋转对称	中心对称
	只有一条对称轴	有两条对称轴		
英文字母				

2. 如图，四边形 $ABCD$ 是长方形，$AB > BC$. 这个长方形是轴对称图形吗？如果是，请作出它的对称轴. 它的对称轴有几条？这个长方形是中心对称图形吗？如果是，请作出它的对称中心. 这个长方形是旋转对称图形吗？如果是，那么这个长方形绕哪一点旋转多少度后能与自身重合？

（第 2 题）

3. 如图①所示，魔术师把 4 张扑克牌放在桌子上，然后蒙住眼睛，请一位观众上台，把某一张牌旋转 180°. 魔术师摘除蒙具后，看到 4 张扑克牌如图②所示，他很快确定了哪一张牌被旋转过. 你能确定吗？

（第 3 题）

读一读

对弈策略

两个人轮流在一张桌面（长方形、正方形或圆形）上摆放同样大小的硬币，规则是：每人每次摆一个，硬币不能相互重叠，也不能有一部分在桌面边沿之外，摆好以后不准移动，这样经过多次摆放，直到谁最先摆不下硬币，谁就认输. 按照这个规则，你用什么办法才能取胜？

初看起来，只能碰运气，其实不然. 只要你先摆，并且采取中心对称策略，你就一定能取胜. 取胜的秘诀是：你先把一枚硬币放在桌面的对称中心上，以后根据对方所放硬币的位置，在它关于中心对称的位置上放下一枚硬币. 这样，由于对称性，只要对方能放下一枚硬币，你就能在其对称的位置上放下一枚硬币. 你不妨试一试.

试一试

如图 9.4.6 所示的两个图形成中心对称，你能找到它们的对称中心吗？

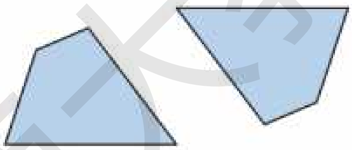


图9.4.6

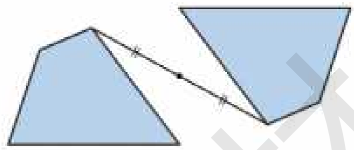


图9.4.7

小明找到了如图 9.4.7 所示的方法，你呢？你知道其中的理由吗？你还能找到其他方法吗？

做一做

如图 9.4.8，在纸上作$\triangle ABC$ 和点 O，以及过点 O 的任意两条互相垂直的直线 x、y，作出$\triangle ABC$ 关于直线 x 对称的$\triangle A'B'C'$，再作出$\triangle A'B'C'$ 关于直线 y 对称的$\triangle A''B''C''$.

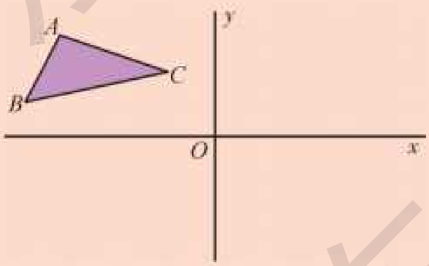
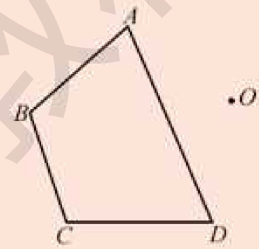


图9.4.8

观察$\triangle ABC$ 和$\triangle A''B''C''$，你能发现这两个三角形有什么关系吗？

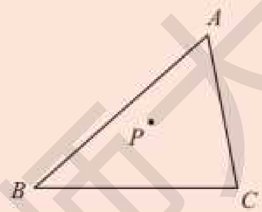
练习

1. 如图，已知四边形 $ABCD$ 和点 O，作四边形 $A'B'C'D'$，使四边形 $A'B'C'D'$ 和四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称.



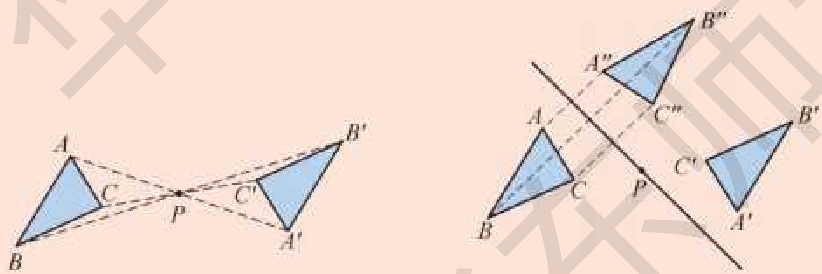
（第 1 题）

2. 如图，已知点 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，作出 $\triangle ABC$ 关于点 P 成中心对称的 $\triangle A'B'C'$.



（第 2 题）

3. 如图，先在纸上作 $\triangle ABC$ 和点 P，再作出 $\triangle ABC$ 关于点 P 成中心对称的 $\triangle A'B'C'$. 在此基础上，再过点 P 任意作一条直线，作出 $\triangle ABC$ 关于此直线对称的 $\triangle A''B''C''$. 观察 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle A''B''C''$，你发现了什么？



（第 3 题）

信息技术应用

探索轴对称与平移、旋转、中心对称的关系

1. 利用动态几何软件画方格，并利用格点，作出如图 1 所示的“茶壶”.

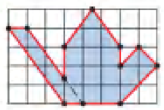


图 1

2. 再画两条平行的对称轴 AB 与 CD，使得点 A、C 与点 B、D 可分别在两条平行线上移动；作出“茶壶”（T_1）关于 AB 的轴对称图形 T_2（点 M 与 M' 是对应点），以及图形 T_2 关于 CD 的轴对称图形 T_3（点 M' 与 M'' 是对应点），如图 2．此时图形 T_3 就是图形 T_1 沿着 MM'' 方向平移而成的图形，平移距离等于线段 MM'' 的长，它与平行线 AB、CD 之间的距离 PQ 的长有何关系？若改变点 A、B 的位置，如图 3，上述结论依然成立吗？

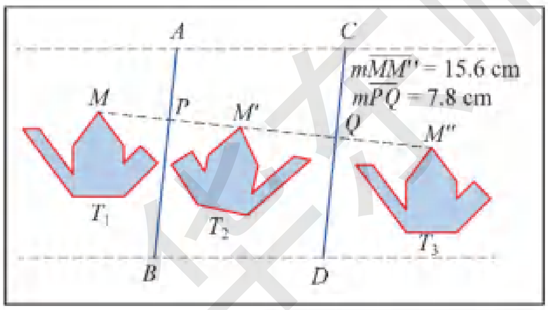


图 2

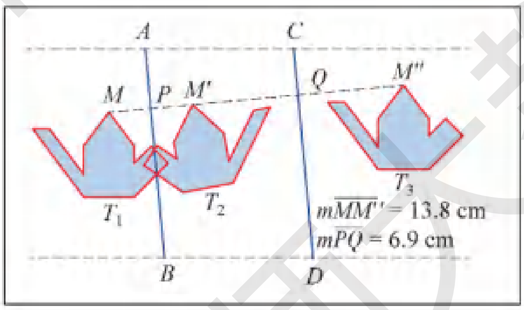


图 3

反过来，如果图形 T_1 经过平移运动到图形 T_3 的位置，该如何作出这两条平行的对称轴，使得图形 T_1 经过两次轴对称，正好与图形 T_3 重合？可先作一条垂直于对应点连线的对称轴和图形 T_1 的对称图形，该对称图形与图形 T_3 成__________，然后再作另一条对称轴.

3. 若两条对称轴 AB 与 BE 相交于点 B，作出图形 T_1 关于 AB 的轴对称图形 T_2(点 M 与 M'是对应点)，以及图形 T_2 关于 BE 的轴对称图形 T_3(点 M'与 M''是对应点)，如图 4，则图形 T_3 就是图形 T_1 绕着旋转中心________旋转而成的，旋转角是________，旋转角________等于∠ABE 的________倍．若改变点 A、B 的位置，上述结论依然成立吗？

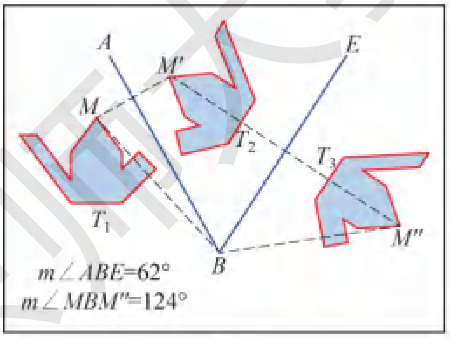


图 4

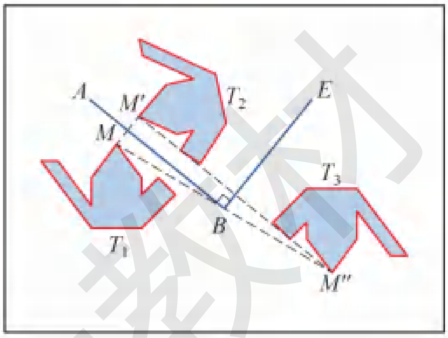


图 5

反过来，如果图形 T_1 绕着旋转中心 O 旋转到图形 T_3 的位置，该如何作出这两条相交的对称轴，使得图形 T_1 经过两次轴对称，正好与图形 T_3 重合？可先作一条经过旋转中心 O 的对称轴和图形 T_1 的对称图形，该对称图形与图形 T_3 成________，然后再作出另一条对称轴．

4. 如图 5，当 AB 与 BE 垂直时，图形 T_3 与图形 T_1 有什么关系？为什么？

如果图形 T_1 与图形 T_2 关于直线 m 成轴对称，图形 T_2 与图形 T_3 关于直线 n 成轴对称，那么：

当两条对称轴 m、n 平行时，图形 T_3 可由图形 T_1 经过________而得到．

当两条对称轴 m、n 相交时，图形 T_3 可由图形 T_1 绕着交点经过__________而得到．特别地，当两条对称轴 m、n 垂直时，图形 T_3 与图形 T_1 关于垂足_________．

习题9.4

A 组

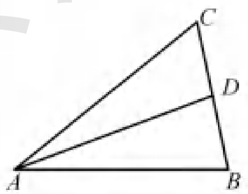
1. 关于某一点成中心对称的两个图形，连结所有对称点的线段经过________，被________平分，对应线段与对应角都________.

2. 如图所示的图形是不是轴对称图形？是不是中心对称图形？

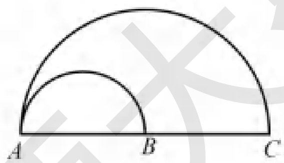
（第 2 题）

3. 如图，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线，作出以点 D 为对称中心，与 $\triangle ABD$ 成中心对称的三角形.

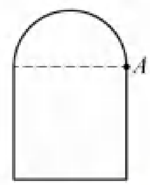
4. 如图所示的图形是由两个半圆组成的，已知点 B 是 AC 的中点，作出此图形关于点 B 成中心对称的图形.



（第 3 题）



（第 4 题）

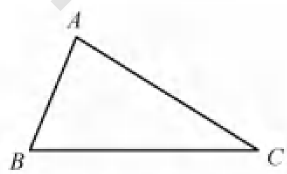


（第 5 题）

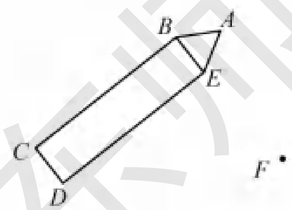
5. 如图，已知由一个正方形和一个半圆组成的图形，作出此图形关于点 A 成中心对称的图形.

B 组

6. 如图，已知 $\triangle ABC$．作出 $\angle BAC$ 的平分线，交 BC 于点 D，并作出 $\triangle EFG$，使 $\triangle EFG$ 与 $\triangle ABC$ 关于点 D 成中心对称，且点 E、F、G 分别与点 A、B、C 对应.



（第 6 题）



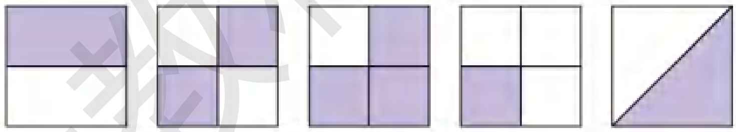
（第 7 题）

7. 如图，已知五边形 $ABCDE$ 和点 F，试作出点 M 与五边形 $FGHIJ$，使该五边形与原五边形 $ABCDE$ 关于点 M 成中心对称，且点 F、G、H、I、J 分别与点 A、B、C、D、E 对应.

8. 对称拼图游戏.

（1）游戏准备

① 如图，有 5 种同样大小的涂有颜色的小方块，每种各 5 块，共 25 块.



（第 8 题）

② 含有 25 个方格的大正方形板，每一方格与①中的小方块同样大小.

③ 有如下成绩表：

姓名					
点数					

（2）游戏规则

将你所拿到的 25 个涂有颜色的小方块一块块地放在大正方形板上，注意最后要使你所放的所有小方块（连同它的颜色）在大正方形板上出现一个对称图形，一直放到你无法放上为止，你的成绩点数就是你放上去的小方块数. 谁的点数高，谁就是最后的胜者.

怎么样？与你的小伙伴们比比看！

9.5 图形的全等

我们已经认识了图形的轴对称、平移与旋转，这是图形的三种基本变换，图形经过这样的变换，位置发生了改变，但变换前后两个图形的对应线段相等，对应角相等，图形的形状和大小并没有改变.

要想知道两个图形的形状和大小是否完全相同，可以通过轴对称、平移与旋转这些图形的变换，把两个图形叠合在一起，观察它们是否完全重合. 能够完全重合的两个图形叫做**全等图形**（congruent figures）.

读一读

轴对称、平移与旋转都是从实际生活中抽象得到的一些基本变换，它们保证了变换过程中，任意两点之间的距离不变，从而保证了图形的形状和大小都不发生变化，反映了图形之间的全等关系.

这种运用动态变换研究图形之间关系的方法，是一种重要而且有效的方法.

做一做

图 9.5.1 中给出了 8 个图形，你能发现哪两个图形是全等图形吗？动手试试看.

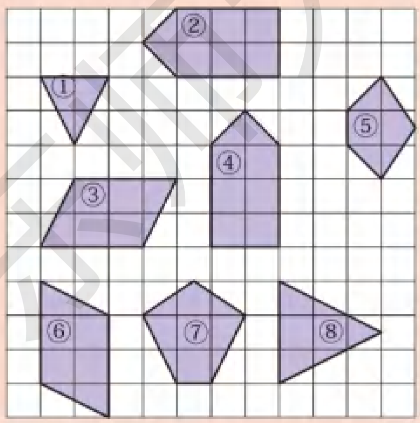


图9.5.1

一个图形经过轴对称、平移与旋转等变换所得到的新图形一定与原图形全等；反过来，两个全等的图形经过上述变换后一定能够互相重合.

思考 观察图 9.5.2 中的两对多边形，每对中的其中一个图形可以经过怎样的变换和另一个图形重合？

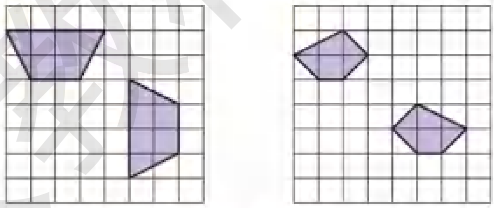


图9.5.2

上面的两对多边形都是全等图形，也叫做**全等多边形**．两个全等的多边形，经过变换而重合，相互重合的顶点叫做**对应顶点**，相互重合的边叫做**对应边**，相互重合的角叫做**对应角**．

如图 9.5.3 中的两个五边形是全等的，记作五边形 $ABCDE \cong$ 五边形 $A'B'C'D'E'$（这里，符号“$\cong$”表示全等，读作“全等于”）．点 A 与点 A'、点 B 与点 B'、点 C 与点 C'、点 D 与点 D'、点 E 与点 E' 分别是对应顶点．

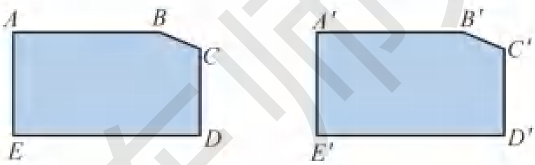


图9.5.3

试指出两个图形的对应角和对应边．

依据上面的分析，我们可以得到全等多边形的性质：

全等多边形的对应边、对应角分别相等．

我们还可以得到判定多边形全等的方法，即

如果两个多边形的边、角分别对应相等，那么这两个多边形全等．

三角形是特殊的多边形，因此我们可以得到全等三角形的性质：

全等三角形的对应边、对应角分别相等．

同样，我们也可以得到判定三角形全等的方法，即

如果两个三角形的边、角分别相等，那么这两个三角形全等．

如图9.5.4所示，$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，且$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$．你能指出它们之间的对应顶点、对应边和其他的对应角吗？

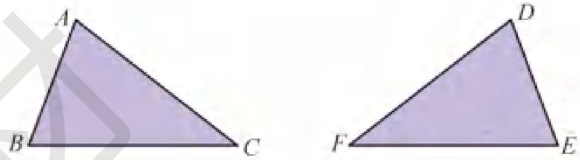


图9.5.4

▶ **例** 如图9.5.5，$\triangle ABC$沿着BC的方向平移至$\triangle DEF$，$\angle A=80°$，$\angle B=60°$，求$\angle F$的度数．

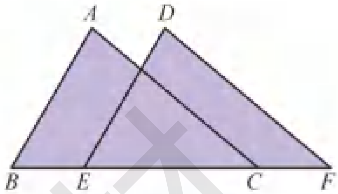


图9.5.5

解 由图形平移的特征，可知$\triangle DEF$与$\triangle ABC$的形状和大小相同，即

$$\triangle DEF \cong \triangle ABC,$$

$\therefore\ \angle D=\angle A=80°$（全等三角形的对应角相等）．

同理$\angle DEF=\angle B=60°$．

又$\because\ \angle D+\angle DEF+\angle F=180°$（三角形的内角和等于180°），

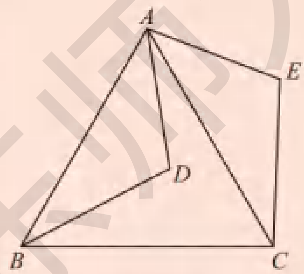
$\therefore\ \angle F=180°-\angle D-\angle DEF$（等式的性质）

$=180°-80°-60°=40°$．

练习

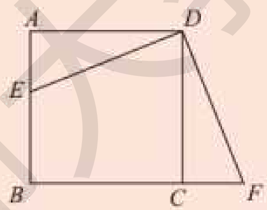
1. 在日常生活中，处处可以看到全等的图形．例如同一张底片印出的同样尺寸的照片、我们使用的数学教科书的封面、我们班的课桌面等．试尽可能多地举出生活中全等图形的例子，和同学比一比，看谁举出的例子多．

2. 如图，$\triangle ABD$绕着点A逆时针旋转60°到$\triangle ACE$位置，则$\triangle$______$\cong\triangle$______，这两个三角形的对应点是______与______，______与______，______与______；对应边是______与______，______与______，______与______；对应角是______与______，______与______，______与______；$\angle BAC=\angle$______$=$______°．

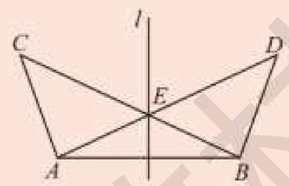


（第2题）

3. 如图，点 E 是正方形 $ABCD$ 的边 AB 上的一点，$\triangle ADE$ 绕着点 D 逆时针旋转到 $\triangle CDF$ 位置，则 $\triangle$________ $\cong\triangle$________，这两个三角形的对应边是________与________，________与________，________与________；对应角是________与________，________与________，________与________；由于 $\angle$________ = ________°，因此上述旋转的旋转角度等于________°。



（第 3 题）



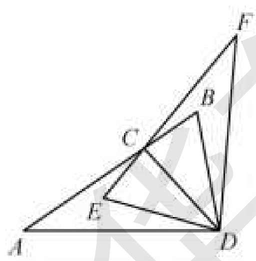
（第 4 题）

4. 如图，已知 $\angle ABD = 110°$，$\angle C = 45°$，$\triangle ABC$ 与 $\triangle BAD$ 关于直线 l 成轴对称，则 $\triangle ABC\cong\triangle$________，$\angle BAD =$ ________°，$\angle AEC =$ ________°。

习题9.5

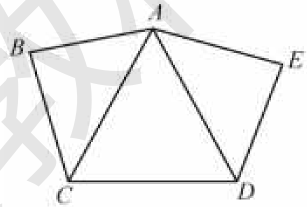
A 组

1. 如图，已知点 C 是线段 AB 上的一点，$\triangle ABD$ 与 $\triangle FED$ 关于直线 CD 成轴对称，则 $\triangle ABD$________$\triangle FED$，这两个三角形的对应边是________与________，________与________，________与________；对应角是________与________，________与________，________与________。



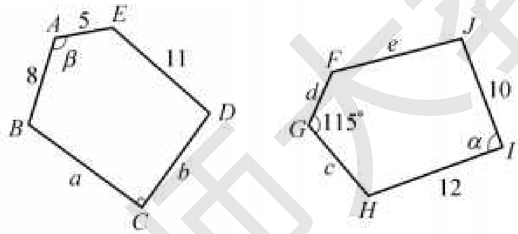
（第 1 题）

2. 如图，已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEA$，点 B、E 为对应点，$\angle ACB = \angle DAE$，则这两个三角形的对应边是_______与_______，_______与_______，_______与_______；对应角是_______与_______，_______与_______，_______与_______.



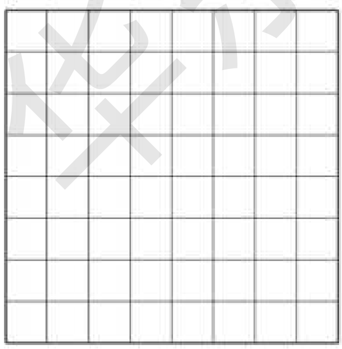
（第 2 题）

3. 如图所示的是两个全等的五边形，$AB = 8$，$AE = 5$，$DE = 11$，$HI = 12$，$IJ = 10$，$\angle C = 90°$，$\angle G = 115°$，点 B 与点 H、点 D 与点 J 分别是对应顶点，指出两图中其他的对应顶点、对应边和对应角，并说出图中 a、b、c、d、e、α、β 各字母所表示的值.

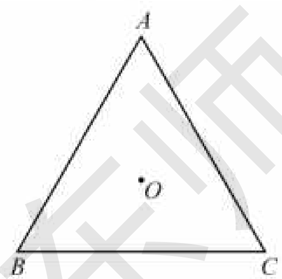


（第 3 题）

4. 在如图所示的方格图中作出两个全等的四边形.



（第 4 题）

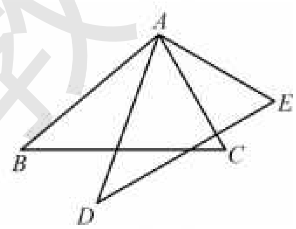


（第 5 题）

5. 要把如图所示的等边三角形分成 3 个全等的四边形，小亮想到了将等边三角形的中心 O（$OA = OB = OC$）作为 3 个四边形的公共顶点，你能帮他完成分割吗？

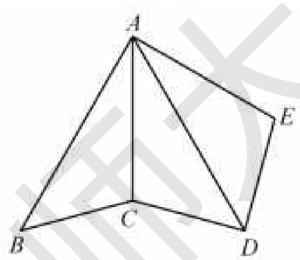
B 组

6. 如图，$\triangle ABC$ 绕着顶点 A 逆时针旋转 $30°$ 到$\triangle ADE$ 位置，$\angle B=40°$， $\angle DAC=50°$．求$\angle E$ 的度数．



（第 6 题）

7. 如图，$\triangle ABC$ 与$\triangle ADC$ 关于直线 AC 成轴对称，$\triangle ADC$ 与$\triangle ADE$ 关于直线 AD 成轴对称，$\angle B=45°$， $\angle E=105°$．求$\angle BAE$ 和$\angle CDE$ 的度数．

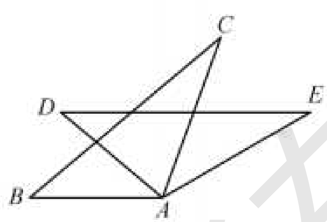


（第 7 题）

8. 如图，$\triangle ABC$ 绕着点 A 顺时针旋转 $40°$到$\triangle ADE$ 位置，$\angle C=30°$， $\angle BAC=110°$．

（1）求$\angle E$ 和$\angle CAE$ 的度数；

（2）DE 与 AB 平行吗？为什么？



（第 8 题）

数学活动

探索全等的图形

我们知道：一个图形经过轴对称、平移和旋转等变换所得到的新图形一定与原图形全等；反过来，两个全等的图形经过上述变换后一定能够互相重合.

问题 1　如图 1，已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，点 A、B、C 的对应点分别是点 D、E、F. 你知道其中的一个三角形经过怎样的变换能够与另一个三角形重合吗？

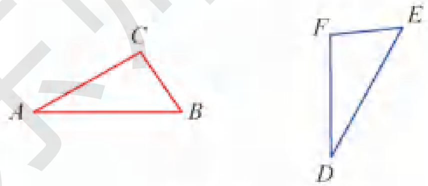


图 1

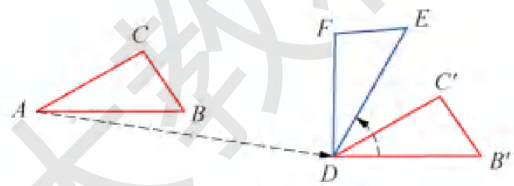


图 2

我们可以先找到一对对应点，如点 A、D，将 $\triangle ABC$ 沿着 AD 的方向平移到 $\triangle DB'C'$ 处，其平移距离等于线段 AD 的长；然后将 $\triangle DB'C'$ 绕着点 D 逆时针旋转，其旋转角为 $\angle B'DE$，旋转后的三角形与 $\triangle DEF$ 重合，如图 2 .

问题 2　如图 3，已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，点 A、B、C 的对应点分别是点 D、E、F. $\triangle ABC$ 经过怎样的变换能够与 $\triangle DEF$ 重合？（注意：图 3 与图 1 中的 $\triangle DEF$，顶点的标记方向是不相同的）

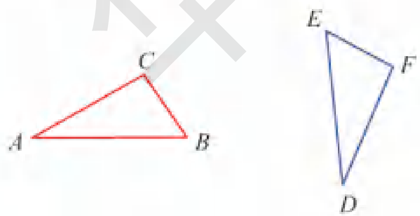


图 3

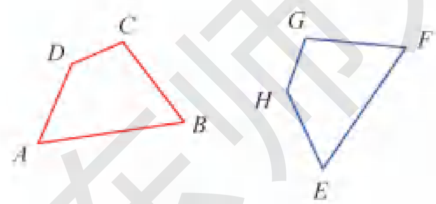


图 4

问题 3　如图 4，四边形 $ABCD \cong$ 四边形 $EFGH$，点 A、B、C、D 的对应点分别是点 E、F、G、H. 四边形 $ABCD$ 经过怎样的变换能够与四边形 $EFGH$ 重合？如果四边形 $EFGH$ 与图 4 中的四边形 $EFGH$ 的顶点标记方向不同，又应该如何操作呢？

小结

一、知识结构

- 图形之间的变换关系
  - 轴对称 —— 连结对应点的线段被对称轴垂直平分
  - 平移 —— 连结对应点的线段平行（或在同一条直线上）且相等；对应线段平行（或在同一条直线上）且相等
  - 旋转 —— 对应点与旋转中心的距离相等；每一点都绕旋转中心按同一方向旋转了同样大小的角度
    - 旋转对称 —— 中心对称
  - 在轴对称、平移与旋转这些图形变换下，线段的长度不变，角的大小不变，变换前后的两个图形是全等图形
    - 全等多边形 —— 全等多边形的对应边、对应角分别相等；边、角分别对应相等的两个多边形全等

二、要点

1. 本章从日常生活中常见的一些图形的位置关系，得出图形的轴对称、平移与旋转以及旋转对称、中心对称的概念．通过动手操作，探索图形在轴对称、平移与旋转的过程中有关点、线段、角的变化情况．

2. 轴对称、平移与旋转都是由现实世界广泛存在的某些现象而抽象得到的基本变换，反映了图形与图形之间的变化关系．在这样的变换下，图形中任意两点间的距离保持不变，从而使得线段的长度、角的大小乃至整个图形的形状和大小不发生变化．正因为这样，我们把可以通过轴对称、平移与旋转这些基本变换以后互相完全重合的两个图形称为全等图形．

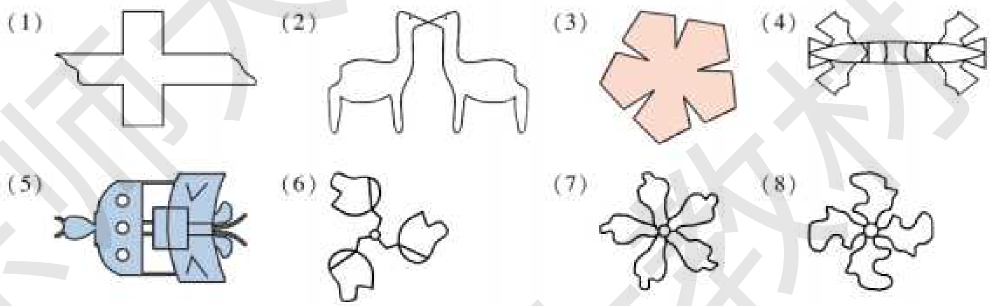
3. 我们利用尺规作图作出线段的垂直平分线、角平分线，以及过一点作出已知直线的垂线，连同七年级上册中的作一条线段等于已知线段、作一个角等于已知角，完成了五种基本的尺规作图．今后还将继续利用尺规作图这一有效工具，解决更多的几何作图问题．

4. 今后我们还将继续运用动态变换的方法，研究其他的几何图形，得到各种有用的结论和关系．

复习题

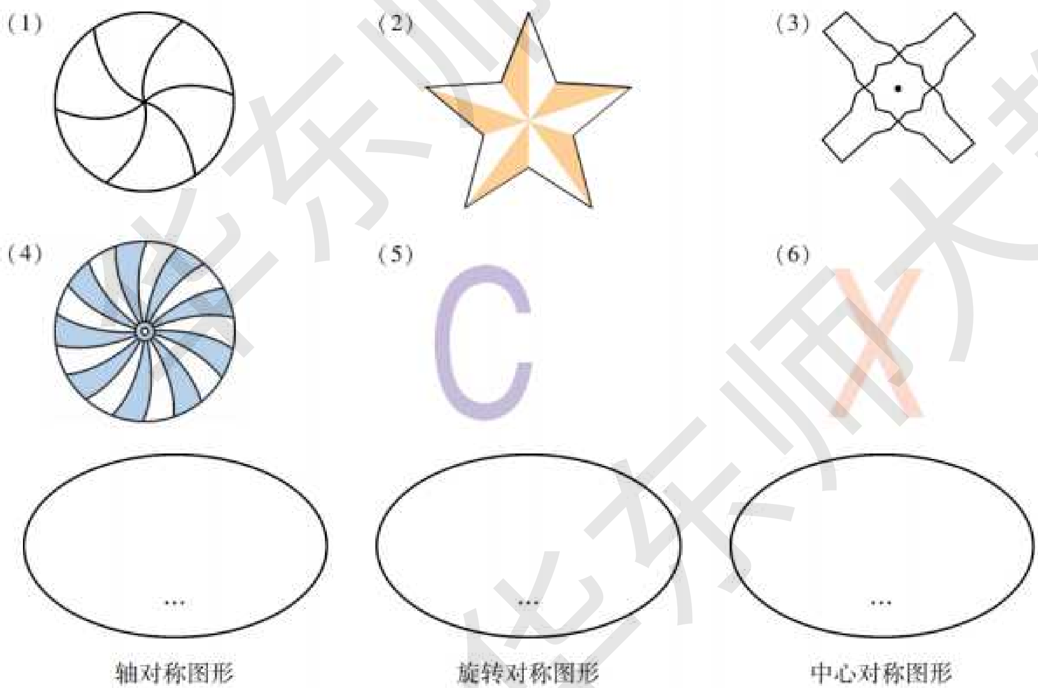
A 组

1. 指出下列图形中的轴对称图形，作出它们的对称轴.



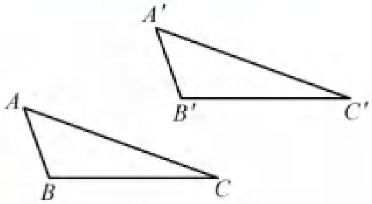
（第 1 题）

2. 观察下列图形，将其中的轴对称图形、旋转对称图形和中心对称图形所对应的编号填入相应的圈内.



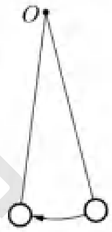
（第 2 题）

3. 如图，$\triangle ABC$ 经过平移后运动到$\triangle A'B'C'$位置，作出平移方向，量出平移距离.（精确到 1 mm）


（第 3 题）

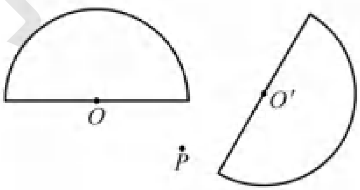
4. 作一个边长为 1 cm 的正方形，然后分别作出将该正方形向北偏东 $30°$ 方向平移 2 cm，以及将该正方形向正东方向平移 2 cm 后的图形.

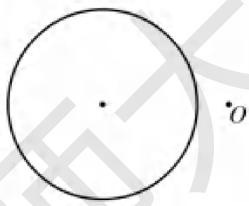
5. 如图，钟摆的摆动是旋转，图中的旋转中心是哪一点？试用量角器测量旋转角度的大小.（精确到 $1°$）

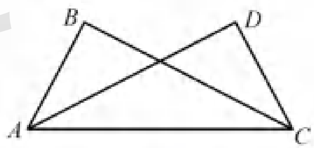

（第 5 题）

6. 如图，半圆 O 绕着点 P 顺时针旋转后成为半圆 O'，试量出旋转角度的大小.（精确到 $1°$）

7. 如图，已知一个圆和点 O，画一个圆，使它与已知圆关于点 O 成中心对称.


（第 6 题）

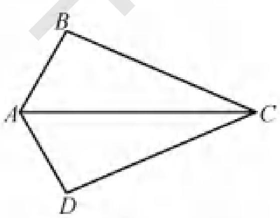

（第 7 题）


（第 8 题）

8. 如图，已知 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$，指出它们的对应顶点、对应边和对应角.

B 组

9. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle ADC$，$\angle BAC = 60°$，$\angle ACD = 23°$，则 $\angle D =$ ______$°$.


（第 9 题）

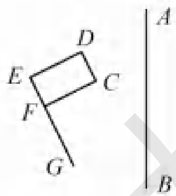

（第 10 题）

10. 从镜中看到的一串数字如图所示，这串数字应为多少？

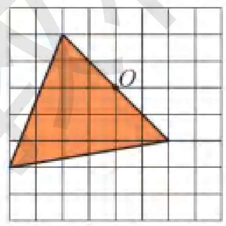
11. 如图，以 AB 为对称轴，作出所给图形的对称图形.

12. 利用尺规作图，作出一个等于 45°的角.

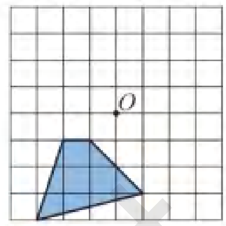
13. 如图，作出方格图中的三角形绕点 O 逆时针旋转 90°后的三角形.



（第 11 题）



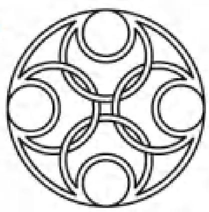
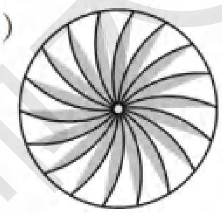
（第 13 题）



（第 14 题）

14. 如图，不用量角器，将方格图中的四边形绕着点 O 逆时针旋转 90°，作出旋转后的四边形.

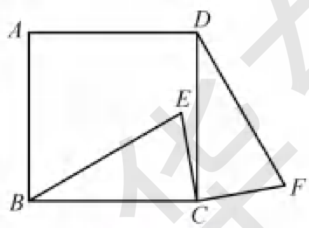
15. 如图所示的两个图形是不是轴对称图形？如果是，请分别作出对称轴．这两个图形能不能经过旋转与自身重合？如果能，分别需要旋转多少度？

（1）

（2）


（第 15 题）

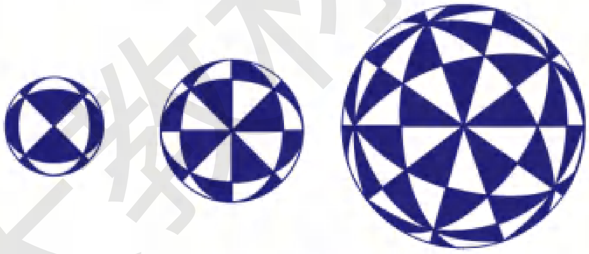
C 组

16. 如图，点 E 是正方形 $ABCD$ 内的一点，将$\triangle BEC$ 绕着点 C 顺时针旋转 90°到$\triangle DFC$ 位置，指出图中的全等图形以及它们的对应顶点、对应边和对应角．若 $\angle EBC=30°$，$\angle BCE=80°$，求 $\angle F$ 的度数.



（第 16 题）

17. 如图是在万花筒中所能看到的一些镜像，观察一下，这都是些什么样的对称图形，你能不能再想象出一两个同样对称和谐的图形？

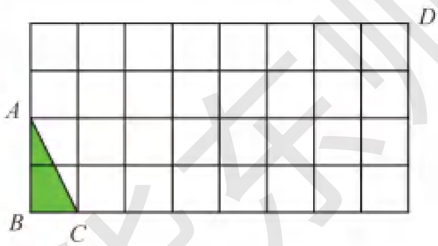


万花筒里的镜像

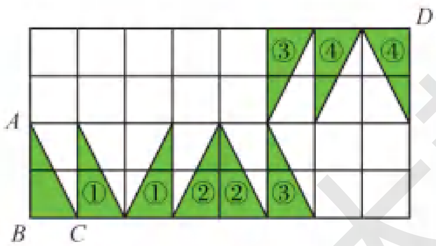
（第 17 题）

18. 将图①所示的 Rt△ABC 先向上平移 2 格或向右平移 1 格后，再以经过平移后的三角形顶点所在的方格线作为对称轴，向上或向右作出对称三角形，然后重复若干次以上步骤，最后使得三角形的直角顶点经过上述一系列变换后，与点 D 重合．作出变换过程中的所有三角形．

图②所示的是其中的一种变换方法．你能否找到符合上述变换条件的其他方法？



①



②

（第 18 题）

项目学习 3

体育比赛计分

体育比赛中蕴含着丰富的数学知识，比如计分规则、比赛场次、最佳策略等．不同的比赛项目有着不同的计分规则，只有了解这些规则，才能让我们更加清楚地看懂比赛，也才能让我们更好地了解和参与运动项目．你是否思考过这些问题：校内篮球循环赛中，你们班的球队如何获得最终胜利？下届奥运会中，中国女排如何在小组赛中脱颖而出？跳水比赛若已经出现了一轮失误，后面的比赛还有机会反败为胜吗？田径全能赛究竟如何计分才公平？一系列的问题等待着我们去探索！

所需数学知识或技能：方程、不等式、函数等代数知识．

所需跨学科知识：足球、跳水、田径等运动项目的体育知识．

所需材料：相关图书资料、计算机等．

活动形式：收集相关资料、分析比赛情况、归纳数学模型等．

成果形式：手抄报、赛况分析报告等．

任务一　比赛胜负的角逐问题

足球、篮球、排球、乒乓球、羽毛球等球类运动属于经典的对抗类比赛，即参与双方进行一对一比赛，角逐胜负．小组赛与淘汰赛是其常见的两种形式，其中“小组赛如何出线”是教练、队员、球迷们分外关心的问题．而射击、跳水、体操等打分类比赛中，教练与运动员同样需要对赛况进行充分分析，以确定后续比赛的策略，或调整动作难度力争夺冠，或放平心态保住名次．请你选择一项比赛，从数学的视角分析其中的获胜策略．你可以探讨至少获得几场胜利才能在小组赛中顺利出线；也可以分析若首场失利，后续又该如何保住期望的名次．

活动流程建议

（1）规则研究．请你选择一项喜欢且熟悉的体育项目，研究其在某一赛事中的计分规则．注意计分规则中是否有特殊的加分项，或者最终分数相同的话如何进一步判定排名等．

（2）获胜分析．在了解清楚比赛规则的前提下，请选择该项目的一场比赛进行深入分析．你可以选择一场已经结束的比赛，或正在进行的比赛，或马上要开始的比赛．对于比赛的分析应该是多阶段的，请选择几个关键时间点进行分析．例如：比赛开始前，某一方若想保证出线至少要赢几场；数场比赛后，根据已有赛况，某方是否有可能获胜，如何保证获胜；等等．

（3）模型生成．基于你的实例分析，你能否进一步生成较为固定的分析模型？例如，你可以画一个树状图或者列一个表格说明比赛情况；也可以尝试建立一个或多个方程用于解决问题，例如若给出已胜场数和已负场数，则可以算出相应的一些数据．

任务二　全能赛中的计分问题

全能赛是田径类体育竞技中最古老、最激烈的比赛项目之一．无论是男子的十项全能，还是女子的七项全能，都需要进行多项不同的田径比赛后才能求得总成绩．但不像体操全能皆为打分制，田径比赛中不同的类别有不同的评价标准，例如跑步中的时间、标枪中的距离、跳高中的高度等，因此如何制定一套标准便是经典的数学问题了．请你为学校的一场全能田径比赛制定一套合理的评分标准．

活动流程建议

（1）规则研究．请你选择一项喜欢的、符合要求的全能类体育项目，研究其在某一赛事中的计分规则．适当了解计分规则的演变历史，以及其中的数学模型．

（2）计分分析．在了解清楚比赛规则的前提下，请选择该项目的一场比赛进行深入分析．你可以选择一场过去的比赛，或正在进行的比赛，或马上要开始的比赛．对于比赛的分析应该是多阶段的，请选

择几个关键时间点进行分析．例如，比赛仅剩最后一项长跑时，应该跑出怎样的成绩才能获得最终胜利等．

（3）规则制定．全能赛中的评分应该根据选手的差异进行调整．若学校要进行一场全能赛，你能为其设计评分标准吗？若简化赛制，例如仅进行 100 m、跳远、实心球、1 000 m 跑四项比赛，则每一项应如何赋分？你可以结合本校历届学生的体育成绩进行分析．

项目学习 4

生活中的密铺

我们已经知道用某些正多边形可以铺满地面而不留一点空隙，在数学中用形状、大小完全相同的几种平面图形进行拼接，不留空隙且不重叠地铺成一片，称为平面图形的密铺，或称为平面镶嵌．生活中你见过哪些有趣的密铺图形？如何像大艺术家埃舍尔(Escher，1898—1972)一样利用密铺知识创造出更多、更美的艺术作品呢？密铺又有哪些方面的应用呢？让我们一起走进密铺的世界，探索密铺的奥秘，创造密铺的艺术吧！

所需数学知识或技能：多边形、角度等平面图形知识；旋转、对称等图形变换知识．

所需跨学科知识：形状、色彩、设计等美术知识；电脑制图等信息技术知识．

所需材料：照相设备、彩纸、尺规、图书、计算机等．

活动形式：收集相关资料、讨论数学原理、手工制作成品等．

成果形式：手抄报、设计成品及其说明书等．

任务一　寻找密铺

生活中处处有密铺，善于发现的你能否找到它们呢？请你在日常生活中或者大自然中发现至少一种复杂的密铺图案，研究它们的图形特点．尝试进一步对图形进行分解，深入探讨其中边与角的关系，分析密铺图形的几何特征与艺术美感．

活动流程建议

（1）寻找密铺图案．你可以通过上网查找图片或者亲临现场拍照的形式去寻找密铺图案．它们可能在城市或者乡村的某个角落，也可

能在某些建筑、服装、首饰、家具、艺术品中．

（2）分解与分析．对收集的密铺图案进行深入的分解与分析，可以尝试思考以下问题：这些密铺图案分别可以由哪几种基本图形组成？你能否用一些代数式将图形的边或角所蕴含的数学关系表征出来？这些密铺图案有什么实际用处？利用这些密铺图形你还能密铺出另外的图案吗？能否用相关的资料或数据佐证你的观点？

（3）制作手抄报．根据你们小组的探索发现，合作完成一份手抄报展示你们的成果吧！

任务二　创作密铺

生活中，我们可以发现许许多多漂亮又有趣的密铺图案，我们还可以对密铺图案进行分解和分析．结合本学期所学的图形知识，想必你自己也有一些关于密铺图案的设计灵感了，那就动手试试，自己创作一些密铺图案吧！

活动流程建议

（1）设计密铺图案．你可以选择一个或多个基本图形作为设计的基础，尝试用不同的形状（如任意三角形或四边形）或不同的组合（如同时使用两种或两种以上正多边形）进行设计．你还可以在原设计图案上进行二次创造，也可以将已经创作完成的密铺图案画出来并赋予其多彩的颜色．

（2）归纳密铺技巧．请把你创作密铺图案的方法归纳出来并取一个合适的名字．你可以梳理清楚该方法的流程，让其他同学也能基于这个方法创作出更多的密铺图案．请通过小组讨论发现更多可以创作密铺图案的技巧吧！

（3）解释密铺方案．利用计算机或纸笔绘制出你的设计方案并介绍你的设计方法．你能否利用数学知识（长度、角度、图形的运动等）更加精确地解释你的密铺方案呢？请把你的作品与配套说明制作成展品．

任务三 应用密铺

密铺的应用广泛，而且在不同领域与具体场景下又有不同的作用．蜂房中的六边形密铺图案设计为的是实现空间的最大化，而埃舍尔的密铺美术作品则体现的是某种艺术效果．想必你已经找到了密铺的一些应用案例，能否进一步归纳它们的作用呢？尝试选择一个领域，发挥你的创造力进行密铺设计创作，以展现密铺的艺术．

活动流程建议

（1）探索密铺应用．密铺在生活中都有哪些方面的应用呢？请你寻找密铺的实例并归纳它们在不同方面的不同应用．比如你可以思考密铺在物品与建筑的设计中有哪些功能，也可以探讨同一密铺图案在不同地方是否有不同的作用．

（2）设计密铺方案．挑选一个你感兴趣的领域，并在这个领域设计一款合适的密铺图案．比如某服饰的花纹设计、某广场的地面铺设、某书架的框架构建等．你的设计是否解决了什么关键的问题？

（3）制作密铺产品．在方案设计的基础上，制作出你的成品或者相应的模型．请随时关注长度、角度、比例等关键要素，保证作品的精确与美观．不要忘了为你的成品写一份设计说明，介绍其中运用到的数学原理或方法以及设计的理念与目的等．

后　记

本套教科书于2001年初获教育部批准立项，并于当年3月依据《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》正式开始编写．七年级上册于2001年6月通过教育部审查，并于当年秋季在全国七个国家级实验区投入使用．《义务教育数学课程标准（2011年版）》于2011年12月由教育部正式颁布，根据教育部的统一安排，本套教科书进行了修订送审，并在顺利通过教育部审查后继续在相关省市使用至今．在首届全国教材建设奖评选中，本套教科书（七年级上册、七年级下册）荣获“全国优秀教材二等奖”．

2022年4月，《义务教育数学课程标准（2022年版）》正式颁布，根据教育部的统一部署，义务教育教科书新一轮修订工作正式启动．为了确保本套教科书修订工作的顺利进行，我们提前于2018年初至2020年底，在本套教科书使用地区进行了大规模的抽样问卷调查和测试，获得了改进教科书质量的第一手材料．广大师生反馈的许多共性问题，为我们进行新一轮教科书修订提供了明确的思路和启示．

按照教育部的要求，本套教科书修订稿于2023年11月25日至12月15日在全国九个省市开展了试教试用和一线教师审读工作．在此期间，几十位一线教师为我们进一步完善修订教科书提出了数百条意见和建议．

在此，我们对20多年来给予本套教科书关心的广大教科书使用地区师生表示衷心的感谢．

除已经列出的编写人员外，黄健参加了本册教科书的有关编写工作．

尽管我们对修订工作倾注了大量心血，但是现在呈现在广大师生面前的修订教科书肯定还存在有待进一步完善的地方．我们真诚希望广大师生继续关心我们的教科书，对我们的教科书不断提出新的宝贵意见．

联系电话：(021)60821761，60821770．

电子邮箱：pingping@ecnupress.com.cn．

数学

七年级　下册

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5760-5084-4
定价：11.67元