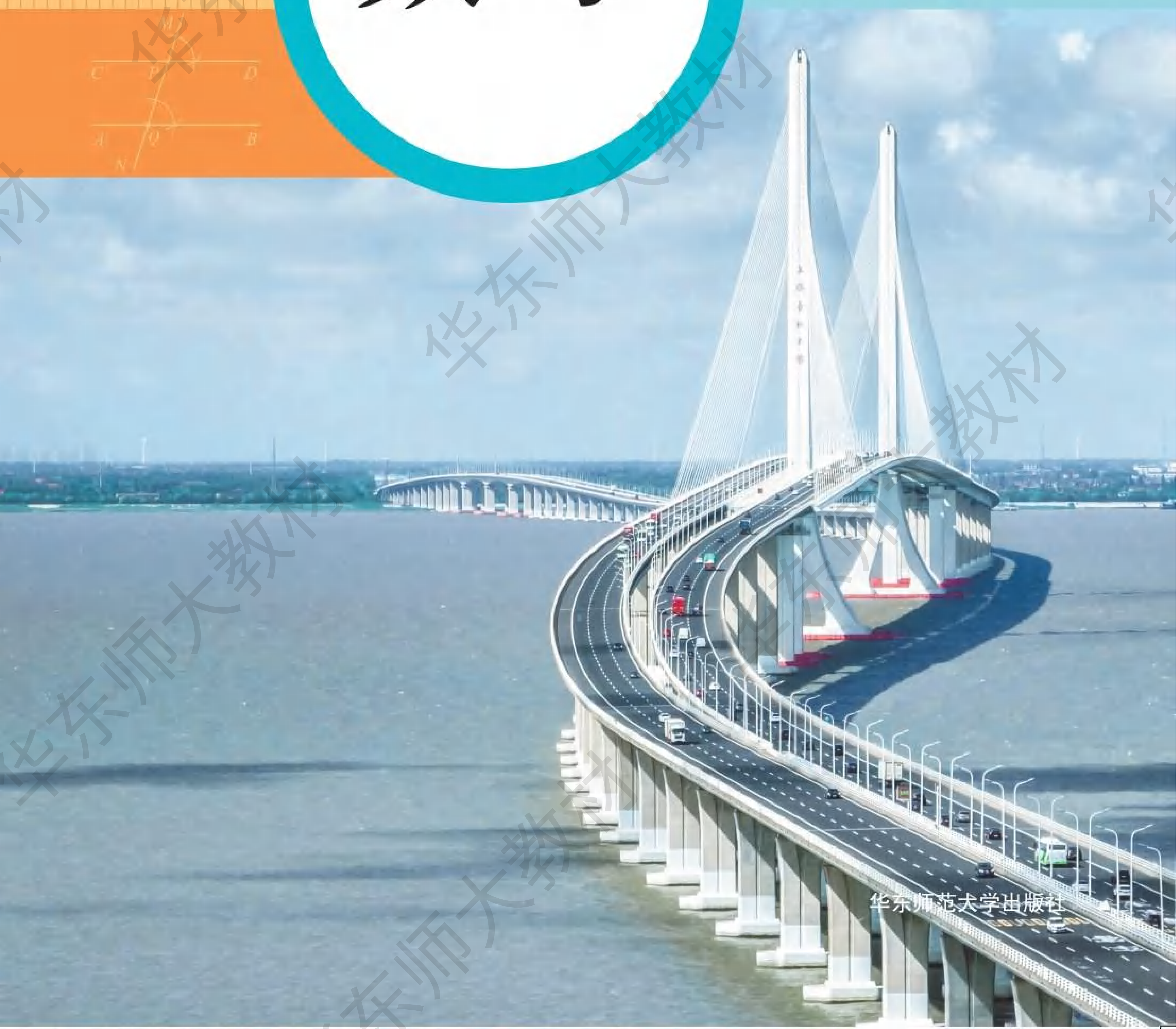
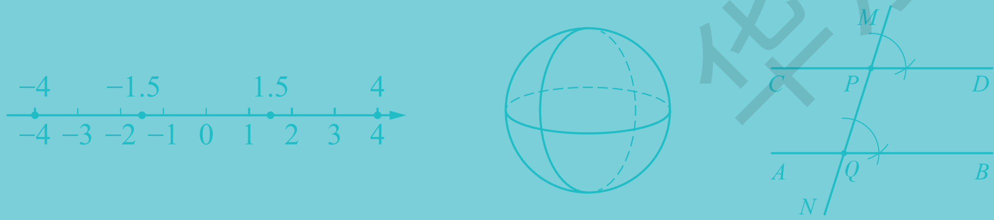
义务教育教科书

数学

七年级
上册



华东师范大学出版社



义务教育教科书

数学

七年级
上册

华东师范大学出版社
·上海·

主　编：王建磐
副主编：王继延
本册编写人员：唐复苏　李文革　李　宏　吴中才
忻重义　沈　加　孙孝武　胡同祥

义务教育教科书
数　学
七年级　上册

责任编辑　平　萍　周　鸿
责任校对　时东明
装帧设计　卢晓红　刘怡霖
插图绘制　上海翔绘网络科技有限公司

出　　版　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电　　话　021－60821666　行政传真 021－62572105
客服电话　021－62865537

印 刷 者　上海新华印刷有限公司
开　　本　787 毫米×1092 毫米　16 开
印　　张　13.5
字　　数　210 千字
版　　次　2024 年 7 月第 1 版
印　　次　2024 年 7 月上海第 1 次
书　　号　ISBN 978－7－5760－4932－9
定　　价　15.00 元

出 版 人　王　焰

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话 021－62865537 联系）

致亲爱的同学

亲爱的同学，祝贺你跨进了中学的校门，数学世界欢迎你的到来．

在小学，你知道了整数、小数和分数；学会了加、减、乘、除；认识了三角形、长方形、正方形、圆，以及长方体、正方体、圆柱体、球等几何图形；了解了简单的统计知识……数学知识开阔了你的视野，改变了你的思维方式，使你变得更聪明了．

这套教科书将在小学数学学习的基础上，以你熟悉或感兴趣的问题情境入手，展现知识的形成和应用过程．结合知识内容，穿插一些丰富多彩的阅读材料，并设置程度不一的习题供你选做，还有探索性问题、数学活动及项目学习等待着你．相信你的聪明才智会得到充分的发挥．

现在，请你打开初中阶段六册数学教科书中的第一本，与我们一起进入奇妙的数学世界，领略数学的风采与魅力．

首先展现在你面前的是“**有理数**”．它将负数融入数的大家庭，建立了和谐的结构和美妙的关系，既保留了传统的优势，又有了新的发展，数的大家庭变得更加绚丽多彩，更加充满活力，这将使我们解决问题更加得心应手．用字母表示数，从具体的数到一般的代数式，是数学发展的一次飞跃．“**整式及其加减**”是这个飞跃的良好开端，它将为我们揭示规律、解决问题提供简捷的工具．进入这个领域，我们将会心旷神怡，阔步前进．

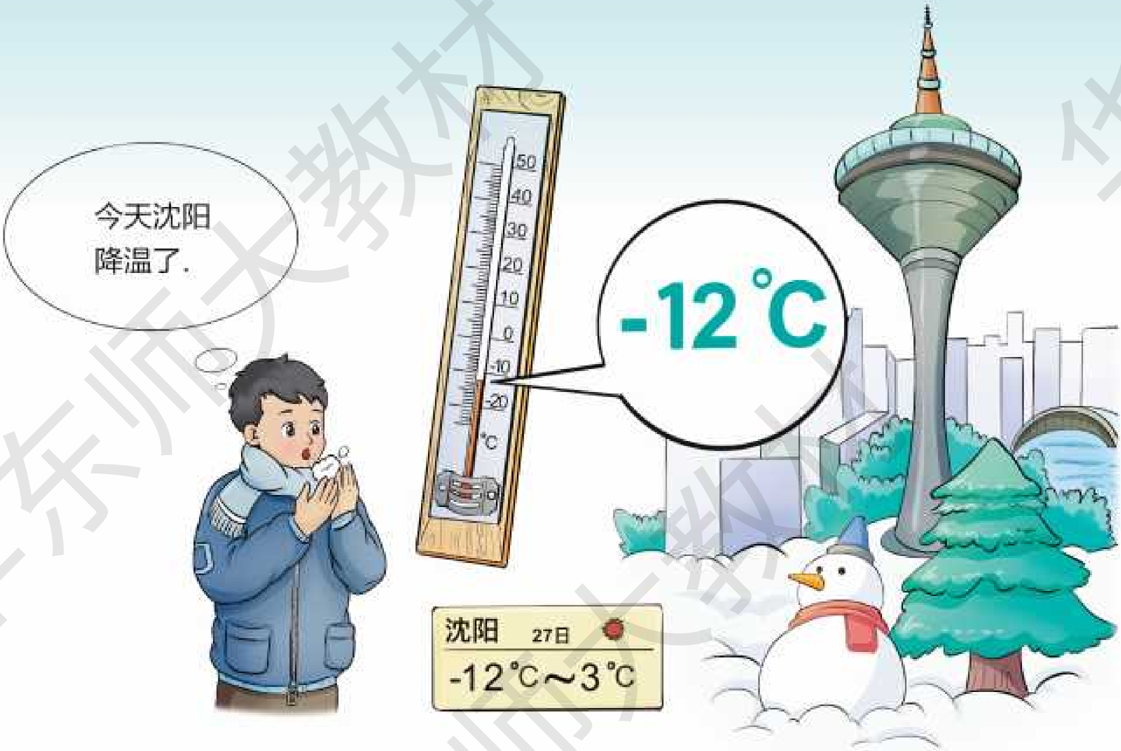
接着，你见到的是一个个直观美妙的图形，“**图形的初步认识**”令你看到大量形状各异的空间图形和平面图形．认识图形大家庭的各个成员，你可以感受到其中的奥秘．“**相交线和平行线**”将带你更深入地认识“相交”“垂直”“平行”，让你用数学语言表述你的见解，学会数学说理，解决一些与图形有关的问题．

最后，“**项目学习**”将以问题为驱动，引导你在真实、多样、具有一定挑战性的情境中，综合应用多学科知识解决实际生活中的问题．项目学习将陪伴我们度过整个初中数学学习阶段．

相信你会喜欢这本书，喜欢数学．

目录

第 1 章　有理数



某天，沈阳的最低温度是 -12℃，表示零下12℃，可以读作“负12摄氏度”．这里，出现了负数．

我们将会看到，除了表示温度以外，还有许多量需要用负数来表示．引进了负数，数的家庭将变得更加绚丽多彩，更加便于应用．

★　本章将通过引入负数，把数的范围扩充到有理数，研究有理数及其大小比较和运算．

1.1 有理数的引入

1. 正数和负数

某天，沈阳的最低温度是 -12°C，表示零下 12°C；最高温度是 3°C，表示零上 3°C. 零上 3°C 和零下 12°C 是具有相反意义的量，我们可以用正数和负数来表示.

日常生活中，还有许多具有相反意义的量，都可以用正数和负数来表示. 我们看几个例子：

（1）汽车向东行驶 3.5 km 和向西行驶 2.5 km.

如果规定向东为正，那么向西为负. 向东行驶 3.5 km 记作 3.5 km，向西行驶 2.5 km 记作 -2.5 km.

先规定某一种意义为正，那么与它相反的意义为负. 负的量用负数表示.

（2）收入 500 元和支出 237 元.

如果规定收入为正，那么支出为负. 收入 500 元记作 500 元，支出 237 元记作 -237 元.

（3）水位升高 1.2 m 和下降 0.7 m.

如果规定升高为正，那么下降为负. 升高 1.2 m 记作 1.2 m，下降 0.7 m 记作 -0.7 m.

概括 在以上出现的数中，像 -12、-2.5、-237、-0.7 这样的数是**负数**(negative number)，像 3、3.5、500、1.2 这样的数是**正数**(positive number). 正数前面有时也可放上一个“+”(读作“正”)号，如 7 可以写成 $+7$.

注意 0 既不是正数，也不是负数.

读一读

数的产生与发展

我们学过各种各样的数，那么，数是怎样产生并发展起来的呢？

我们知道，为了表示物体的个数或者顺序，产生了整数 1，2，3，…；为了表示“没有”，引入了数 0；有时分配、测量的结果不是整数，需要用分数(小数)表示；为了表示具有相反意义的量，我们又引进了负数……总之，生产和生活的需要促进了数的产生、发展.

练习

1. 举出几对具有相反意义的量，并用正数和负数来表示.
2. 在中国地形图上，一般在主要山峰和盆地处都标有表明它们海拔高度的数，如珠穆朗玛峰的海拔高度为 8 848.86 m，吐鲁番盆地的海拔高度为 -154.31 m. 请说出 8 848.86 和 -154.31 表示的实际意义. 海平面的海拔高度用什么数表示？
3. 下列各数中，哪些是正数？哪些是负数？

$$+6,\quad -21,\quad 54,\quad 0,\quad \frac{22}{7},\quad -3.14,\quad 0.001,\quad -999.$$

4. “一个数，如果不是正数，就必定是负数.” 这句话对不对？为什么？

2. 有理数

到目前为止，我们所学过的数可以分为以下几类：

正整数，如 1，2，3，…；

零，即 0；

负整数，如 -1，-2，-3，…；

正分数，如$\frac{1}{3}$，$\frac{22}{7}$，$4.5\left(\text{即} 4\frac{1}{2}\right)$，…；

负分数，如$-\frac{1}{2}$，$-2\frac{2}{7}$，$-0.3\left(\text{即} -\frac{3}{10}\right)$，….

正整数、0 和负整数统称为**整数**(integer)，正分数和负分数统称为**分数**(fraction).

整数和分数统称为**有理数**(rational number).

读一读

“有理数”的英文名 rational number 中的单词 rational 应看成 ratio(比、比率)的形容词形式．因此，rational number 应该理解为“比率数”，即可以表示为两个整数之商(比率)的数．在学习了有理数的除法(1.10 节)之后我们可以看到，这样的解释准确地描述了有理数的本质.

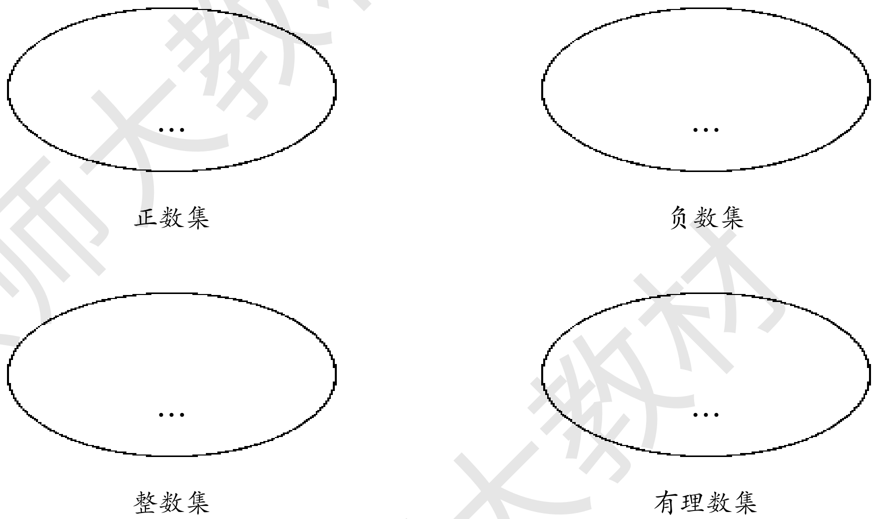
我们可以把已经学过的数作出如下分类：

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ 0\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

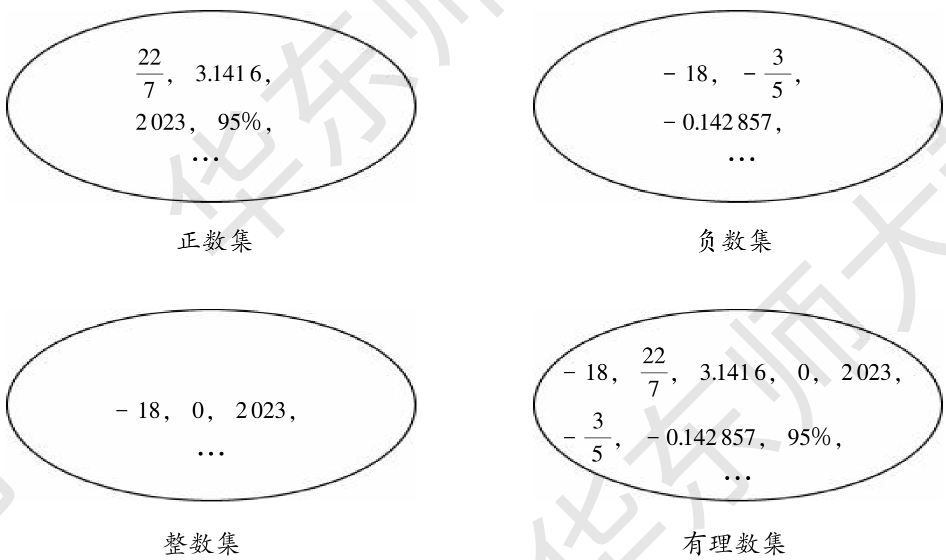
把一些数放在一起，就组成一个数的集合，简称**数集**(set of numbers)．所有有理数组成的数集叫做有理数集．类似地，所有整数组成的数集叫做整数集，所有负数组成的数集叫做负数集，所有正整数和 0 组成的数集叫做非负整数集(即自然数集)，如此等等.

例 把下列各数填入表示它们所在的数集的圈里：

$$-18,\quad \frac{22}{7},\quad 3.1416,\quad 0,\quad 2023,\quad -\frac{3}{5},\quad -0.142857,\quad 95\%.$$



解



练习

1. 请说出两个正整数、两个负整数、两个正分数、两个负分数．它们都是有理数吗？
2. 有理数集中有没有这样的数，它既不是正数，也不是负数？若有，请说出这样的数．

阅读材料

华罗庚的故事

宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学．

——华罗庚

我国著名数学家华罗庚(1910—1985)说：“聪明在于学习，天才在于积累．”这句话正是他一生的真实写照．

华罗庚，1910年11月12日出生于江苏省金坛县，1924年毕业于该县公立初级中学．此后，他又到上海中华职业学校读书，用不到一年半的时间，就读完了两年的课程．15岁的时候，华罗庚迫于家境困难而辍学．返回家乡后，他一面帮助父亲在小杂货店里干活、记账，一面钻研数学．

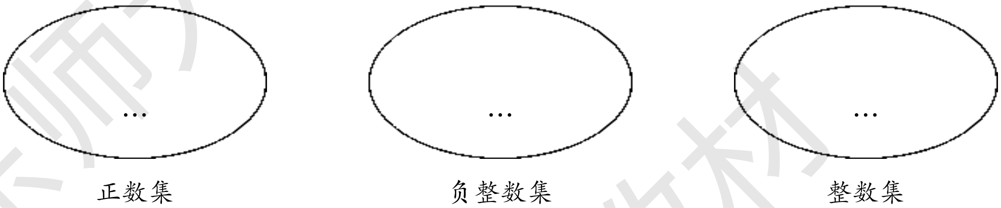
20岁时，他的一篇论文《苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立之理由》发表在上海《科学》杂志上，显示出了这位20岁青年的数学才华．然而就在同一年，华罗庚患了严重的伤寒病和关节炎．在与疾病的斗争中，他意志顽强，坚韧不拔，终于战胜了病魔，但他的左腿瘸了．然而在此期间，他仍然努力钻研数学，接连取得了许多重大的科研成果．华罗庚完全依靠自学，只用了六年左右的时间，就完成了从初中到大学的课程．华罗庚正是凭着这种刻苦钻研的精神，终于成为举世公认的大数学家．

习题1.1

A 组

1. 在下列各数中选出符合条件的数填入相应的集合内：

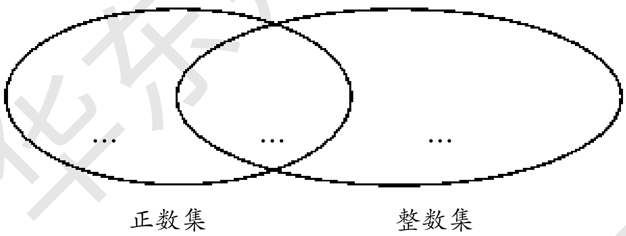
$$-6.75,\ 0,\ \frac{3}{2},\ \ -5,\ \ +10,\ \ -0.1.$$



2. 下列各数中，哪些是整数？哪些是分数？哪些是正数？哪些是负数？

$$1,\ \ -0.20,\ \ \frac{5}{8},\ \ -789,\ \ 325,\ \ -20,\ \ 10.10,\ \ 1\,000.1,\ \ -5\%.$$

3. 下面两个圈分别表示正数集和整数集，那么这两个圈的重叠部分表示什么数的集合？请写出 9 个数填入这两个圈中，使其中每个圈中各有 6 个数.



（第 3 题）

4. 下面的大括号表示一些数的集合，把第 1、2 两题中的各数填入相应的大括号内：

正整数集：｛ …｝；

负整数集：｛ …｝；

整数集：｛ …｝；

有理数集：｛ …｝；

正有理数集：｛ …｝；

负有理数集：｛ …｝；

自然数集：｛ …｝.

B 组

5. 分别观察下面各题中依次排列的一些数，猜测它们的排列各有什么规律？请按你猜测的规律，接着写出后面的 3 个数．你能分别说出各题排列的数中第 10 个数、第 100 个数、第 200 个数、第 201 个数是什么吗？

（1）1， －1， 1， －1， 1， －1， 1， －1， ____， ____， ____， …；

（2）1， －2， 3， －4， 5， －6， 7， －8， ____， ____， ____， …；

（3）-1， $\frac{1}{2}$， $-\frac{1}{3}$， $\frac{1}{4}$， $-\frac{1}{5}$， $\frac{1}{6}$， $-\frac{1}{7}$， ____， ____， ____， ….

1.2　数　轴

1．数轴

能不能用直线上的点表示有理数？从气温计上能否得到一点启发呢？

我们在小学学习数学时，发现能用直线上依次排列的点来表示自然数，它帮助我们认识了自然数的大小关系．

如图 1.2.1，通过气温计上的刻度，我们可以方便地读出气温的度数，并且可以区分出是零上还是零下．

与气温计相仿，我们可以用直线上的点表示有理数．具体做法如下：

画一条直线（通常画成水平位置），在这条直线上任取一点作为**原点**（origin），用这点表示数 0．规定直线上从原点向右的方向为正方向，画上箭头，则相反方向为负方向．再选取适当的长度作为单位长度，从原点向右，每隔一个单位长度取一点，依次标上 1，2，3，…；从原点向左，每隔一个单位长度取一点，依次标上 －1，－2，－3，…．如图1.2.2 所示．

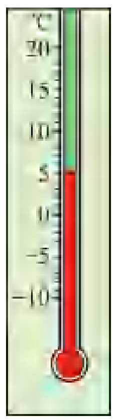


图1.2.1

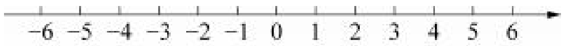


图1.2.2

概括 像这样规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做**数轴**(number axis).

在数轴上，除了原点用数 0 表示外，要表示任何一个不为 0 的有理数，可以先根据这个数的正负号确定它在数轴上原点的哪一边(正数在原点的右边，负数在原点的左边)，再在相应的方向上确定它与原点相距几个单位长度，然后画上相应的点．例如，在数轴上表示 -4.5，即在原点的左边 4.5 个单位长度处画上相应的点.

▶ **例 1** 画出数轴，并在数轴上画出表示下列各数的点：

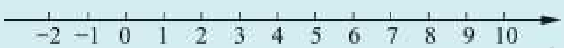
$$4,\quad -2,\quad -4.5,\quad 1\frac{1}{3},\quad 0.$$

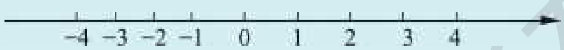
解 如图 1.2.3 所示.

图1.2.3

练习

1. 下列各图表示的数轴是否正确？为什么？

(1) 

(2) 

(3) 

2. 在数轴上表示下列各数的点分别位于原点的哪边？与原点距离多少个单位长度？

$$-3,\quad 4.2,\quad -1,\quad \frac{1}{2}.$$

3. 如图，指出数轴上的点 A、B、C、D 所表示的数.

（第 3 题）

4. 先画出数轴，再在数轴上画出表示下列各数的点，最后按数轴上从左到右的顺序，将这些数重新排列：

$$-1.8,\quad 0,\quad -3.5,\quad \frac{10}{3},\quad 6\frac{1}{2}.$$

2. 在数轴上比较数的大小

在小学里，我们已经学会比较两个正数的大小，那么，引进负数后，怎样比较两个有理数的大小呢？例如，1 与 -2 哪个大？-1 与 0 哪个大？-3 与 -4 哪个大？

探索　（1）任意写出两个正数，在数轴上画出表示它们的点，较大的数与较小的数的对应点的位置有什么关系？

（2）1 ℃ 与 -2 ℃ 哪个温度高？-1 ℃ 与 0 ℃ 哪个温度高？-3 ℃ 与 -4 ℃ 哪个温度高？这些关系在气温计上表现为怎样的情形？

把气温计横过来放，就像一条数轴．从这个操作中，能得到怎样的启发？

概括　在数轴上表示的两个数，右边的数总比左边的数大.

由此容易得到如下数的大小比较法则：

正数都大于 0，负数都小于 0，正数都大于负数.

▶ **例 2** 将下列各数按从小到大的顺序排列，并用“<”号连接起来：

$$3,\ 0,\ 1\frac{5}{6},\ -4.$$

解 容易知道 $1\frac{5}{6}<3$，再由数的大小比较法则，得

$$-4<0<1\frac{5}{6}<3.$$

在数轴上画出表示这些数的点，再比较大小，结果怎样?

▶ **例 3** 比较下列各数的大小：

$$-1.3,\ 0.3,\ -3,\ -5.$$

解 将这些数分别在数轴上表示出来，如图 1.2.4 所示.

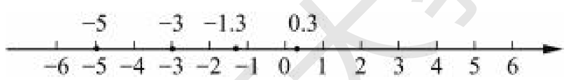


图1.2.4

可以看出 $$-5<-3<-1.3<0.3.$$

练习

1. 判断下列有理数的大小比较是否正确，并说明理由：

(1) $2.9>-3.1$； (2) $0<-14$；

(3) $-10>-9$； (4) $-5.4<-4.5$.

2. 用“<”号或“>”号填空：

(1) 3.6 ________ 2.5； (2) −3 ________ 0；

(3) −16 ________ −1.6； (4) +1 ________ −10；

(5) −2.1 ________ +2.1； (6) −9 ________ −7.

习题1.2

A 组

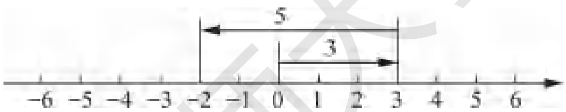
1. 如图，指出数轴上的点 A、B、C、D 所表示的数.

（第 1 题）

2. 画出数轴，并在数轴上画出表示下列各组数的点：

（1）-2.1，-3，0.5，$4\frac{1}{2}$；　　　　（2）-50，250，0，-400.

3. 如图，一个点从数轴上的原点开始，先向右移动 3 个单位长度，再向左移动 5 个单位长度，可以看出，终点表示的数是 -2.



（第 3 题）

已知 A、B 是数轴上的点，请参照题图，完成下列填空：

（1）如果点 A 表示数 -3，将点 A 向右移动 7 个单位长度，那么终点表示的数是________；

（2）如果点 A 表示数 3，将点 A 向左移动 7 个单位长度，再向右移动 5 个单位长度，那么终点表示的数是________；

（3）如果将点 B 向右移动 3 个单位长度，再向左移动 5 个单位长度，终点表示的数是 0，那么点 B 表示的数是________.

4. 在数轴上分别画出表示下列每对数的点，并比较它们的大小：

（1）-8，-6；　　（2）-5，0.1；　　（3）$-\frac{1}{4}$，0；

（4）-4.2，-5.1；　　（5）$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{2}$；　　（6）$+\frac{1}{5}$，0.

5. 把下列各组数分别在数轴上表示出来，并按从小到大的顺序排列，用“$<$”号连接起来：

（1）1，-2，3，-4；　　　　（2）$-\frac{1}{3}$，0，-3，0.2.

6. 下表是某年 1 月份我国几个城市的平均气温，请将各城市的平均气温按从高到低的顺序排列.

北　京	上　海	沈　阳	广　州	济　南
$-5.6\ ^{\circ}\mathrm{C}$	$2.3\ ^{\circ}\mathrm{C}$	$-16.8\ ^{\circ}\mathrm{C}$	$16.6\ ^{\circ}\mathrm{C}$	$-3.2\ ^{\circ}\mathrm{C}$

B 组

7. 写出满足下列要求的数：

（1）在数轴上与原点的距离等于 4.2 个单位长度的点所表示的数；

（2）在数轴上与表示 -3 的点的距离等于 4 个单位长度的点所表示的数.

8. 下列各数是否存在？如果存在，把它们找出来：

（1）最小的正整数；

（2）最小的负整数；

（3）最大的负整数；

（4）最小的整数.

1.3　相反数

做一做

在数轴上画出表示以下两对数的点：

$$-6 \text{ 和 } 6,\quad 1.5 \text{ 和 } -1.5.$$

这两对点有什么共同之处？

如图 1.3.1，在数轴上，-6 和 6 所对应的点位于原点的两旁，且与原点的距离相等，也就是说，它们相对于原点的位置只有方向不同．1.5 和 -1.5 所对应的点也是这样的．

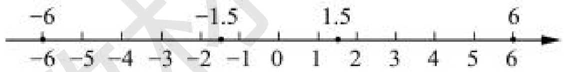


图1.3.1

容易看出，每对数中的两个数，都只有正负号不同．

概括 像 6 和 -6、1.5 和 -1.5 那样，只有正负号不同的两个数称互为**相反数**(opposite number)，也就是说，其中一个数是另一个数的相反数．这里，6 和 -6 互为相反数，即 6 是 -6 的相反数，-6 是 6 的相反数．

在数轴上，表示互为相反数的两个点分别位于原点的两旁，且与原点的距离相等．

我们规定：**0 的相反数是 0**．

▶ **例 1** 分别写出下列各数的相反数：

$$+5,\quad -7,\quad -3\frac{1}{2},\quad 11.2.$$

解 $+5$ 的相反数是 -5，-7 的相反数是 7，$-3\frac{1}{2}$ 的相反数是 $3\frac{1}{2}$，11.2 的相反数是 -11.2．

我们通常在一个数的前面添上“$-$”号，表示这个数的相反数．例如，-4、$+5.5$ 的相反数分别为：

数 a 的相反数记作 $-a$．

$$-(-4)=4,\quad -(+5.5)=-5.5.$$

在一个数的前面添上“+”号，仍表示这个数本身．例如：

$$+(-4)=-4,\quad +(+12)=12.$$

例 2 化简：

(1) $-(+10)$；(2) $+(-0.15)$；

(3) $+(+3)$；(4) $-(-20)$.

解 (1) $-(+10)=-10$. (2) $+(-0.15)=-0.15$.

(3) $+(+3)=+3=3$. (4) $-(-20)=20$.

练习

1. 填空：

(1) 2.5 的相反数是______；(2) ______是 -100 的相反数；

(3) $-5\frac{1}{5}$ 是______的相反数；(4) ______的相反数是 -1.1；

(5) 8.2 和______互为相反数.

2. 化简：

(1) $-(+0.78)$；(2) $+\left(+9\frac{1}{5}\right)$；

(3) $-(-3.14)$；(4) $+(-10.1)$.

3. 下列说法是否正确？为什么？

(1) 正负号相反的两个数称互为相反数；

(2) 相反数和我们以前学过的倒数是一样的；

(3) 一个数的相反数的相反数等于这个数本身.

习题1.3

A 组

1. 分别写出下列各数的相反数：

$$-2.5,\quad 1,\quad 0,\quad 3\frac{1}{2},\quad -10.$$

2. 画出数轴，并在数轴上表示下列各数及它们的相反数：

$$4\frac{1}{4},\quad -2,\quad 0,\quad -3.75.$$

3. 化简：

(1) $-(-16)$； (2) $-(+25)$；

(3) $+(-12)$； (4) $+(+2.1)$；

(5) $-(+33)$； (6) $-\left(-\frac{1}{10}\right)$.

B 组

4. 试回答下列问题：

(1) 什么数的相反数大于它本身？

(2) 什么数的相反数等于它本身？

(3) 什么数的相反数小于它本身？

5. 在数轴上表示正数 a 及其相反数的两个点之间的距离是多少？

1.4 绝对值

在一些量的计算中，有时并不注重其方向. 例如，计算汽车行驶所耗的汽油量时，需要关注的是汽车行驶的路程，而无须关注其行驶的方向.

在讨论数轴上的点与原点的距离时，只需要观察它与原点之间相隔多少个单位长度，而与它位于原点哪一边无关.

我们把在数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫做数 a 的**绝对值**(absolute value)，记作 $|a|$.

例如，在数轴上表示 $+5$ 的点与原点的距离是 5 个单位长度，所以 $+5$ 的绝对值是 5，记作 $|+5|=5$； 在数轴上表示 -6 的点与原点的距离是 6 个单位长度，所以 -6 的绝对值是 6，记作 $|-6|=6$.

试一试

化简：

(1) $|+2|=$______，$\left|\dfrac{1}{5}\right|=$______，$|+8.2|=$______；

(2) $|0|=$______；

(3) $|-3|=$______，$|-0.2|=$______，$|-8.2|=$_______.

概括

由绝对值的意义，我们可以知道：

1. 一个正数的绝对值是它本身；

2. 0 的绝对值是 0；

3. 一个负数的绝对值是它的相反数.

绝对值等于它本身的数有哪些？

试一试

你能将上面的结论用数学式子表示吗？

(1) 当 $a>0$ 时，$|a|=$________；

(2) 当 $a=0$ 时，$|a|=$________；

(3) 当 $a<0$ 时，$|a|=$________.

由此可以看出，任何一个有理数的绝对值总是正数或 0(通常也称非负数). 即对任意的有理数 a，总有

$$|a|\geqslant 0.$$

▶ **例 1** 求下列各数的绝对值：

$$-\frac{15}{2},\quad +\frac{1}{10},\quad -4.75,\quad 10.5.$$

解 $\left|-\frac{15}{2}\right|=\frac{15}{2}$，$\left|+\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}$，

$|-4.75|=4.75$，$|10.5|=10.5$.

▶ **例 2** 化简：

(1) $\left|-\left(+\frac{1}{2}\right)\right|$；

(2) $-\left|-1\frac{1}{3}\right|$.

解 (1) $\left|-\left(+\frac{1}{2}\right)\right|=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

(2) $-\left|-1\frac{1}{3}\right|=-1\frac{1}{3}$.

练习

1. 求下列各数的绝对值：

$$-5,\quad 4.5,\quad -0.5,\quad +1,\quad 0.$$

2. 填空：

(1) -3 的正负号是______，绝对值是______；

(2) 10.5 的正负号是______，绝对值是______；

(3) 绝对值是 7 的正数是______；

(4) 绝对值是 5.1 的负数是______.

3. 回答下列问题：

(1) 绝对值是 12 的数有几个？是什么？

(2) 绝对值是 0 的数有几个？是什么？

(3) 有没有绝对值是 -3 的数？为什么？

习题1.4

A 组

1. 在数轴上表示下列各数，并分别写出它们的绝对值：

$$-\frac{3}{2},\quad 5,\quad 0,\quad -2,\quad 4.2.$$

2. 化简：

(1) $-\left|-\frac{2}{3}\right|$;

(2) $+|-14|$;

(3) $\left|-\left(+3\frac{1}{2}\right)\right|$;

(4) $|-(-6.5)|$.

3. 计算：

(1) $|+6|+|-5|$;

(2) $|-3.3|-|-2.1|$;

(3) $|-4.5|\times|+0.2|$;

(4) $\left|\frac{3}{2}\right|\div\left|-\frac{2}{3}\right|$.

B 组

4. 下列说法是否正确？为什么？

(1) 有理数的绝对值一定是正数；

(2) 如果两个数的绝对值相等，那么这两个数相等；

(3) 如果一个数是正数，那么这个数的绝对值是它本身；

(4) 如果一个数的绝对值是它本身，那么这个数是正数.

5. 某地加强高铁沿线环境整治，进行巡回检查维护．境内高铁线路呈东西走向，全长近 200 km．某天，巡护车辆从护路联防站出发，按向东为正方向行驶，当天的行驶记录如下(单位：km)：+75，−90，−38，+20，−70，+120，+100，−117．如果车辆行驶每千米的耗油量为 0.08 L，问：当天巡护车辆耗油多少升？

1.5 有理数的大小比较

由 1.2 节我们知道：在数轴上表示的两个有理数，右边的数总比左边的数大；正数都大于 0，负数都小于 0，正数都大于负数.

那么，怎样直接比较两个负数的大小呢？

例如，-3 与 -5 哪个大？ -1.3 与 -3 哪个大？

探索 在 1.2 节的例 3 中，我们在图 1.2.4 所示的数轴上，画出了表示 -1.3、-3 和 -5 的点. 通过观察，得到

$$-5<-3,\quad -3<-1.3.$$

从中你能概括出直接比较两个负数大小的法则吗？说说你的道理.

概括 在数轴上，表示两个负数的两个点中，与原点距离较远的那个点在左边，也就是绝对值大的点在左边. 所以，**两个负数，绝对值大的反而小.**

你能利用“比较 0 °C 以下两个温度高低的方法”来解释这个法则吗？

例如，比较 $-\frac{3}{4}$ 与 $-\frac{3}{2}$ 的大小，我们可以分两步进行：

（1）分别求出它们的绝对值，并比较其大小：

$$\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4},\quad \left|-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2},$$

$$\frac{3}{2}>\frac{3}{4};$$

（2）根据“两个负数，绝对值大的反而小”，得出结论：

$$-\frac{3}{4}>-\frac{3}{2}.$$

▶ **例** 比较下列各对数的大小：

(1) -1 与 -0.01；

(2) $-|-2|$ 与 0；

(3) $-\left(-\frac{1}{9}\right)$ 与 $-\left|-\frac{1}{10}\right|$；

(4) $-\frac{3}{4}$ 与 $-\frac{2}{3}$.

解 (1) 这是两个负数比较大小，因为

$$|-1|=1,\quad |-0.01|=0.01,$$

且

$$1>0.01,$$

所以

$$-1<-0.01.$$

(2) 化简

$$-|-2|=-2.$$

因为负数都小于0，所以

$$-|-2|<0.$$

(3) 分别化简两数，得

$$-\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9},\quad -\left|-\frac{1}{10}\right|=-\frac{1}{10}.$$

因为正数都大于负数，所以

$$-\left(-\frac{1}{9}\right)>-\left|-\frac{1}{10}\right|.$$

(4) 这是两个负分数比较大小，因为

$$\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}=\frac{9}{12},\quad \left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}=\frac{8}{12},$$

从而

$$\left|-\frac{3}{4}\right|>\left|-\frac{2}{3}\right|,$$

所以

$$-\frac{3}{4}<-\frac{2}{3}.$$

练习

1. 用“<”号或“>”号填空：

（1）因为 $\left|-\frac{5}{3}\right|$______$\left|-\frac{3}{5}\right|$，所以 $-\frac{5}{3}$______$-\frac{3}{5}$；

（2）因为 $|-10|$______$|-100|$，所以 -10______-100.

2. 判断下列大小比较是否正确：

（1）$|-0.23|<|-0.32|$；（2）$|-3|<|+3|$；

（3）$\left|+\frac{1}{7}\right|>\left|-\frac{1}{6}\right|$；（4）$\left|-\frac{1}{2}\right|<\left|-\frac{1}{3}\right|$.

3. 比较下列各对数的大小：

（1）$-\frac{3}{4}$ 与 $-\frac{4}{5}$；（2）$-\frac{5}{8}$ 与 -0.618.

4. 回答下列问题：

（1）大于 -4 的负整数有哪几个？

（2）小于 4 的正整数有哪几个？

（3）大于 -4 且小于 4 的整数有哪几个？

习题1.5

A 组

1. 比较下列各对数的大小：

（1）-9.1 与 -9.099；（2）-8 与 $|-8|$；

（3）$-\frac{5}{6}$ 与 $-\frac{7}{8}$；（4）$-|-3.2|$ 与 $-(+3.2)$.

2. 将下列各数按从小到大的顺序排列，并用“<”号连接起来：

$$0,\quad -3.14,\quad -\frac{22}{7},\quad 2.7,\quad -4,\quad 0.14.$$

3. 下列说法是否正确？为什么？

在数轴上，将表示一个数的点向左移动，终点所表示的数总比原来的数小.

B 组

4. 写出绝对值小于 5 的所有整数，并在数轴上表示出来.

5. 回答下列问题：

（1）有没有最小的正数？有没有最大的负数？为什么？

（2）有没有绝对值最小的有理数？若有，请把它写出来.

1.6 有理数的加法

1. 有理数的加法法则

问题 小明在一条东西向的跑道上，先走了 20 m，又走了 30 m，能否确定他现在位于原来位置的哪个方向，与原来位置相距多少米？

我们知道，求两次运动的总结果，可以用加法来解答. 可是上述问题不能得到确定的答案，因为小明最后所在的位置与行走方向有关.

探索 我们必须把这一问题说得明确些. 不妨规定向东为正，向西为负.

（1）若两次都是向东走，很明显，一共向东走了 50 m . 写成算式是

$$(+20)+(+30)=+50,$$

即小明位于原来位置的东边 50 m 处.

这一运算过程在数轴上可表示为图 1.6.1 .

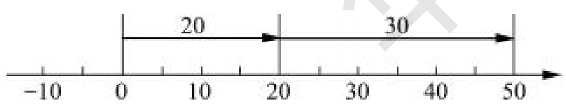


图1.6.1

（2）若两次都是向西走，则小明现在位于原来位置的西边 50 m 处．写成算式是

$$(-20)+(-30)=-50.$$

（3）若第一次向东走 20 m，第二次向西走 30 m，在数轴上(图 1.6.2)，我们可以看到，小明位于原来位置的西边 10 m 处．

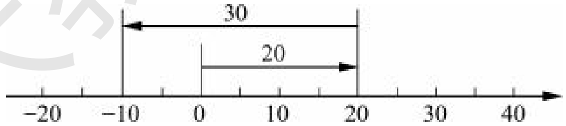


图1.6.2

写成算式是

$$(+20)+(-30)=-10.$$

（4）若第一次向西走 20 m，第二次向东走 30 m，则小明位于原来位置的（　　　）边（　　　）m 处．写成算式是

$$(-20)+(+30)=(\quad\quad).$$

试一试，画出数轴，在括号内填上答案．

后两种情形中两个加数的正负号不同(通常可称为异号)，让我们再试几次(下列算式中，各个加数的正负号和绝对值仍分别表示运动的方向和路程)：

$$(+4)+(-3)=(\quad\quad),$$
$$(+3)+(-10)=(\quad\quad),$$
$$(-5)+(+7)=(\quad\quad),$$
$$(-6)+2=(\quad\quad).$$

还有两种特殊情形：

第一次向西走了 30 m，第二次向东走了 30 m．写成算式是

$$(-30)+(+30)=(\quad\quad);$$

第一次向西走了 30 m，第二次没走．写成算式是

$$(-30)+0=(\quad\quad).$$

从上述情形所写出的算式中，你能总结出一些规律吗？

概括

综合以上情形，有如下有理数的加法法则：

1. 同号两数相加，取与加数相同的正负号，并把绝对值相加；

2. 绝对值不相等的异号两数相加，取绝对值较大的加数的正负号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值；

3. 互为相反数的两个数相加得 0；

4. 一个数与 0 相加，仍得这个数.

这里从运算角度反映了相反数的一个特性.

注意

一个有理数由正负号和绝对值两部分组成，进行加法运算时，应注意先确定和的正负号，再确定绝对值.

▶ **例 1** 计算：

(1) $(+2)+(-11)$；

(2) $(-12)+(+12)$；

(3) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\left(-\dfrac{2}{3}\right)$；

(4) $(-3.4)+4.3$.

解 (1) $(+2)+(-11)=-(11-2)=-9$.

(2) $(-12)+(+12)=0$.

(3) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\right)=-1\dfrac{1}{6}$.

(4) $(-3.4)+4.3=+(4.3-3.4)=0.9$.

试说出每道小题计算的依据.

有理数的加法法则，还可以帮助我们进一步理解相反数的意义，它告诉我们：**两个数互为相反数的特征是这两个数的和为 0 .**

这是什么意思呢？一方面，由法则 3，如果两个数 a、b 互为相反数，那么 $a+b=0$；另一方面，如果 $a+b=0$，那么 a、b 互为相反数. 这是因为，如果

a、b 不互为相反数，那么无论它们是同号、异号（这时绝对值不相等）还是只有一个数为 0，由法则 1、2、4 知，它们的和都不可能为 0.

练习

1. 填表：

加　数	加　数	和的组成		和
		正负号	绝对值	
-12	3	$-$	$12-3$	-9
18	8			
-9	16			
-9	-5			

2. 计算：

（1）$10+(-4)$；　　（2）$(+9)+7$；

（3）$(-15)+(-32)$；　　（4）$(-9)+0$；

（5）$100+(-100)$；　　（6）$(-0.5)+4.4$；

（7）$(-1.5)+(1.25)$；　　（8）$\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\left(-\dfrac{1}{6}\right)$.

3. 填空：

（1）$(\quad)+(-3)=-8$；

（2）$(\quad)+(-3)=8$；

（3）$(-3)+(\quad)=-1$；

（4）$(-3)+(\quad)=0$.

4. 回答下列问题：

（1）两个正数相加，和是否一定大于每个加数？

（2）两个有理数相加，和是否一定大于每个加数？

2. 有理数加法的运算律

在小学里我们知道，数的加法满足交换律，例如

$$5+3.5=3.5+5;$$

还满足结合律，例如

$$(5+3.5)+2.5=5+(3.5+2.5).$$

引进了负数以后，这些运算律是否还成立呢？也就是说，上面两个等式中，将 5、3.5 和 2.5 换成任意的有理数，是否仍然成立呢？

探索 （1）任意选择两个有理数(至少有一个是负数)，分别填入下列□和○内，并比较两个运算结果：

$$\square+\bigcirc \text{和} \bigcirc+\square;$$

（2）任意选择三个有理数(至少有一个是负数)，分别填入下列□、○和◇内，并比较两个运算结果：

$$(\square+\bigcirc)+\diamond \text{和} \square+(\bigcirc+\diamond).$$

你能发现什么？

概括 有理数的加法仍满足交换律和结合律.

加法交换律：两个数相加，交换加数的位置，和不变.

$$\boxed{a+b=b+a.}$$

加法结合律：三个数相加，先把前两个数相加，或者先把后两个数相加，和不变.

$$\boxed{(a+b)+c=a+(b+c).}$$

这样，多个有理数相加，可以任意交换加数的位置，也可以先把其中的几个数相加，使计算简化.

▶ **例 2** 计算：

(1) $(+26)+(-18)+5+(-16)$;

(2) $(-1.75)+1.5+(+7.3)+(-2.25)+(-8.5)$.

解 (1) $(+26)+(-18)+5+(-16)$

$=(26+5)+[(-18)+(-16)]$

$=31+(-34)$

$=-(34-31)$

$=-3.$

(2) $(-1.75)+1.5+(+7.3)+(-2.25)+(-8.5)$

$=[(-1.75)+(-2.25)]+[1.5+(-8.5)]+7.3$

$=(-4)+(-7)+7.3$

$=(-4)+[(-7)+7.3]$

$=(-4)+0.3$

$=-3.7.$

▶ **例 3** 10 筐苹果，以每筐 30 kg 为基准，超过的千克数记作正数，不足的千克数记作负数，记录如下：

2， −4， 2.5， 3， −0.5， 1.5， 3， −1， 0， −2.5.

问：这 10 筐苹果总共重多少？

解 $2+(-4)+2.5+3+(-0.5)+1.5+3+(-1)+0+(-2.5)$

$=(2+3+3)+(-4)+[2.5+(-2.5)]+[(-0.5)+(-1)+1.5]$

$=8+(-4)=4.$

$30\times 10+4=304(\text{kg}).$

答：这 10 筐苹果总共重 304 kg.

回顾例 2、例 3 的解答，思考：将怎样的加数结合在一起，可使运算简便？

练习

1. 计算：

(1) $(-7)+(+10)+(-11)+(-2)$；

(2) $2+(-3)+(+4)+(-5)+6$；

(3) $(-9.6)+1.5+(-0.4)+(-0.3)+8.5$.

2. 某天早晨的气温是 $-3\,^{\circ}\mathrm{C}$，到中午升高了 $5\,^{\circ}\mathrm{C}$，到晚上又降低了 $3\,^{\circ}\mathrm{C}$，到午夜又降低了 $4\,^{\circ}\mathrm{C}$. 求午夜时的气温.（提示：降低了 $3\,^{\circ}\mathrm{C}$ 就是升高了 $-3\,^{\circ}\mathrm{C}$）

习题1.6

A 组

1. 计算：

(1) $(-12)+(+3)$；

(2) $(+15)+(-4)$；

(3) $(-16)+(-8)$；

(4) $(+23)+(+24)$；

(5) $(-102)+(+102)$；

(6) $(-32)+(-11)$；

(7) $(-35)+0$；

(8) $78+(-85)$.

2. 计算：

(1) $(-0.9)+(+1.5)$；

(2) $(+6.5)+3.7$；

(3) $1.5+(-8.5)$；

(4) $(-4.1)+(-1.9)$；

(5) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)+\left(-\dfrac{1}{6}\right)$；

(6) $(-4.2)+4.25$.

3. 计算：

(1) $(+14)+(-4)+(-2)+(+26)+(-3)$；

(2) $(-83)+(+26)+(-41)+(+15)$；

(3) $(-1.8)+(+0.7)+(-0.9)+1.3+(-0.2)$；

(4) $\dfrac{1}{4}+\left(-3\dfrac{1}{3}\right)+\left(+4\dfrac{3}{4}\right)+\left(-6\dfrac{2}{3}\right)$.

B 组

4. 列式并计算：

（1）$+1.2$ 与 -3.1 的绝对值的和；

（2）$4\frac{2}{3}$ 与 $-\frac{1}{3}$ 的和的相反数.

5. 应用有理数的加法解下列各题：

（1）仓库内原存有某种原料 3 500 kg，一周内存入和领出情况如下(存入为正，单位：kg)：

$$1\,500,\quad -300,\quad -650,\quad 600,\quad -1\,800,\quad -250,\quad -200.$$

问：第 7 天末仓库内还存有这种原料多少千克？

（2）某公路养护小组乘车沿一条南北向公路巡视维护．某天早晨从 A 地出发，晚上最后到达 B 地．约定向北为正，当天的行驶记录如下(单位：km)：

$$+18,\quad -9,\quad +7,\quad -14,\quad -6,\quad +13,\quad -6,\quad -8.$$

问：B 地在 A 地的哪个方向？它们相距多少千米？如果汽车行驶每千米路程耗油 a L，那么该天共耗油多少升？

1.7 有理数的减法

问题 珠穆朗玛峰和吐鲁番盆地的海拔高度分别是 8 848.86 m 和 -154.31 m，你知道珠穆朗玛峰比吐鲁番盆地高多少吗？

这一问题通常可列出算式

$$8\,848.86-(-154.31).$$

那么，怎样进行有理数的减法呢？我们不妨先看一个简单的计算问题.

计算：

$$(-8)-(-3).$$

根据减法的意义，这就是要求一个数“？”，使

$$(\ ?\ )+(-3)=-8.$$

根据有理数的加法运算，有

$$(-5)+(-3)=-8,$$

所以

$$(-8)-(-3)=-5. \qquad ①$$

这样做减法太繁了，能不能总结出一个法则直接进行计算？

试一试

填空：$(-8)+(\qquad)=-5$.

容易得到

$$(-8)+(+3)=-5. \qquad ②$$

比较①②两式，我们发现：-8“减去 -3”与“加上 $+3$”的结果是相同的，即

$$(-8)-(-3)=(-8)+(+3).$$

一般地，对于任意的有理数 a、b，由减法的意义，$a-b$ 就是要求一个数“？”，使

$$(\ ?\ )+b=a.$$

因为

$$\begin{aligned}&[a+(-b)]+b\\ =&a+[(-b)+b]\text{（加法结合律）}\\ =&a+0\text{（加法法则 3）}\\ =&a\text{（加法法则 4）},\end{aligned}$$

所以 $$a-b=a+(-b).$$

这就得到有理数的减法法则：

减去一个数，等于加上这个数的相反数.

> 你能利用本节开头的问题，来解释这个法则吗？

例 计算：

(1) $(-32)-(+5)$；

(2) $7.3-(-6.8)$；

(3) $(-2)-(-25)$；

(4) $12-21$.

解

减号变加号

(1) $(-32)-(+5)=(-32)+(-5)=-37$.

减数变相反数

减号变加号

(2) $7.3-(-6.8)=7.3+6.8=14.1$.

减数变相反数

(3) $(-2)-(-25)=(-2)+25=23$.

(4) $12-21=12+(-21)=-9$.

练习

1. 在下列括号内填上适当的数：

(1) $(-2)-(-3)=(-2)+(\quad)$；

(2) $0-(-4)=0+(\quad)$；

(3) $(-6)-3=(-6)+(\quad)$；

(4) $1-(+39)=1+(\quad)$.

2. 计算：

(1) $(+3)-(-2)$；

(2) $(-1)-(+2)$；

(3) $0-(-3)$；

(4) $1-5$；

(5) $(-23.6)-(-12.4)$；

(6) $\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)$.

3. 填空：

（1）温度 3 °C 比 -8 °C 高 ________ °C；

（2）温度 -9 °C 比 -1 °C 低 ________ °C；

（3）海拔 -20 m 比 -30 m 高 ________ m；

（4）从海拔 22 m 到 -10 m，下降了 ________ m.

习题1.7

A 组

1. 计算：

（1）$(-14)-(+15)$；（2）$(-14)-(-16)$；

（3）$(+12)-(-9)$；（4）$12-(+17)$；

（5）$0-(+52)$；（6）$108-(-11)$.

2. 计算：

（1）$4.8-(+2.3)$；（2）$(-1.24)-(+4.76)$；

（3）$(-3.28)-1$；（4）$2-\left(-3\dfrac{1}{2}\right)$.

3. 计算：

（1）$[(-4)-(+7)]-(-5)$；（2）$3-[(-3)-12]$；

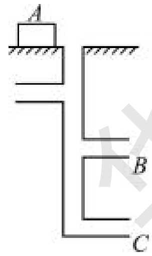
（3）$8-(9-10)$；（4）$(3-5)-(6-10)$.

4. 下表是某地连续 5 天内每天的最高气温和最低气温记录，在这 5 天中，哪天的温差(最高气温与最低气温的差)最大？哪天的温差最小？

	第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	第 5 天
最高气温/°C	-1	5	6	8	11
最低气温/°C	-7	-3	-4	-1	2

B 组

5. 如图为某一矿井的示意图：以地面为基准面，A 处的高度是 $+4.2\text{ m}$，B、C 处的高度分别是 -15.6 m 和 -30.5 m. A 处比 B 处高多少米？比 C 处呢？



（第 5 题）

6. 求出下列每对数在数轴上的对应点之间的距离：

(1) 3 与 -2.2；　　(2) 4.75 与 2.25；

(3) -4 与 -4.5；　　(4) $-3\frac{2}{3}$ 与 $2\frac{1}{3}$.

你能发现所得的距离与这两个数的差有什么关系吗？

1.8 有理数的加减混合运算

1. 加减法统一成加法

算式 $(-8)-(-10)+(-6)-(+4)$ 是有理数的加减混合运算，可以按照运算顺序，从左到右逐步计算；也可以应用有理数的减法法则，把它改写成 $(-8)+(+10)+(-6)+(-4)$，统一为只有加法运算的和式.

在一个和式里，通常把各个加数的括号和它们前面的加号省略不写. 如上式可写成省略加号的和的形式：

$$-8+10-6-4.$$

这个式子仍可看作和式，读作“负 8、正 10、负 6、负 4 的和”. 从运算意义看，上式也可读作“负 8 加 10 减 6减 4”.

例 1 把 $\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)-\left(+\frac{1}{5}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)-(+1)$ 写成省略加号的和的形式，并把它读出来.

解 $\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)-\left(+\frac{1}{5}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)-(+1)$

$=\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(+\frac{1}{3}\right)+(-1)$

$=\frac{2}{3}-\frac{4}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-1.$

和式中第一个加数若是正数，正号也可以省略不写.

读作“$\frac{2}{3}$、负$\frac{4}{5}$、负$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{3}$、负 1 的和”，也可读作“$\frac{2}{3}$减$\frac{4}{5}$减$\frac{1}{5}$加$\frac{1}{3}$减 1”.

练习

1. 把下列各式写成省略加号的和的形式，并说出它们的两种读法：
   (1) $(-12)-(+8)+(-6)-(-5)$；
   (2) $(+3.7)-(-2.1)-1.8+(-2.6)$.
2. 按运算顺序直接计算：
   (1) $(-16)+(+20)-(+10)-(-11)$；
   (2) $\left(+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(+\frac{1}{6}\right)$.

2. 加法运算律在加减混合运算中的应用

因为有理数的加减法可以统一成加法，所以在进行有理数的加减混合运算时，可以适当应用加法运算律，简化计算.

▶ **例 2** 计算：

(1) $-24+3.2-16-3.5+0.3$；

(2) $0-21\frac{2}{3}+\left(+3\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(+\frac{1}{4}\right)$.

解 （1）因为原式表示 -24、3.2、-16、-3.5、0.3 的和，所以可将加数适当交换位置，并作适当的结合进行计算，即

$$\begin{aligned}&-24+3.2-16-3.5+0.3\\=&(-24-16)+(3.2+0.3)-3.5\\=&-40+(3.5-3.5)\\=&-40+0\\=&-40.\end{aligned}$$

这样做有什么好处？你还有其他解法吗？

（2）
$$\begin{aligned}&0-21\frac{2}{3}+\left(+3\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(+\frac{1}{4}\right)\\=&0-21\frac{2}{3}+\left(+3\frac{1}{4}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)\\=&-21\frac{2}{3}+3\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\\=&\left(-21\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(3\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\\=&-21+3\\=&-18.\end{aligned}$$

练习

1. 下列变形是否正确？如果不正确，错在哪里？

（1）$1-4+5-4=1-4+4-5$；

（2）$1-2+3-4=2-1+4-3$；

（3）$4.5-1.7-2.5+1.8=4.5-2.5+1.8-1.7$；

（4）$-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$.

2. 计算：

（1）$0-1+2-3+4-5$；

（2）$-4.2+5.7-8.4+10.2$；

（3）$-30-11-(-10)+(-12)+18$；

（4）$3\frac{1}{2}-\left(-2\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}-\left(+\frac{1}{6}\right)$.

阅读材料

《九章算术》和“正负术”

《九章算术》是中国古代数学最重要的经典著作之一．这部著作的成书年代，根据现在的考证，最迟在公元1世纪，但其中有些数学内容，可以追溯到周代(公元前11世纪至公元前3世纪)．《九章算术》采用问题集的形式编写，全书共有246个问题，分成方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股九章，其中所包含的数学成就是十分丰富的．

引进和使用负数是《九章算术》的一项突出贡献，比如《九章算术》中第八章(《方程》篇)的第8题关于三元一次方程组的建立和求解，叙述了这样的问题：

今有卖牛二、羊五，以买十三豕(shǐ，猪)，有余钱一千．卖牛三、豕三，以买九羊，钱适足．卖羊六、豕八，以买五牛，钱不足六百．问牛、羊、豕价各几何？

在解决这个问题的过程中，把卖牲畜得到的钱算作正，把买牲畜付出的钱算作负．在这一篇中，当用遍乘直除算法消元(即用加减消元法解一次方程组)时，可能出现减数大于被减数的情形，为此，就需要引进负数．《九章算术》在《方程》篇中还提出了如下的“正负术”：

同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之．

其异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之．

这实际上就是正负数和0的加减运算法则．“同名”“异名”分别指同号、异号；“相益”“相除”分别指两数的绝对值相加、相减．

前四句说的是正数、负数和0的减法法则，翻译成现在的语言就是：同号两数相减，将绝对值相减(得到差的绝对值)；异号两数相减，将绝对值相加(得到差的绝对值)；0减去正数得到(与它相反的)负数，0减去负数得到(与它相反的)正数．

后四句说的就是正数、负数和0的加法法则．你能把它们翻译成现在的语言吗？

不难看出，这与我们所学的有理数加减法法则是完全一致的．

《九章算术》以后，魏晋时期的数学家刘徽(约 225—约 295)对负数的出现作了很自然的解释——“两算得失相反，要令正负以名之”，并主张在筹算中用红筹代表正数，用黑筹代表负数.

在国外，负数的出现和使用要比我国迟好几百年，直到 7 世纪时印度数学家才开始使用负数．而在欧洲，直到 16 世纪，韦达(F. Viète，1540—1603)还拒绝使用负数.

习题1.8

A 组

1. 计算：

(1) $(-7)-(-10)+(-8)-(+2)$；　(2) $1+\left(-1\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{1}{4}\right)$；

(3) $\left(+\frac{1}{2}\right)-\left[(-2)+\left(+\frac{1}{2}\right)\right]$；　(4) $(-1.2)+[1-(-0.3)]$.

2. 将下列各式写成省略加号的和的形式，并按要求交换加数的位置：

(1) $(+16)+(-29)-(-7)-(+11)+(+9)$；

(使正负号相同的加数结合在一起)

(2) $(-3.1)-(-4.5)+(+4.4)-(+1.3)+(-2.5)$；

(使和为整数的加数结合在一起)

(3) $\left(+1\frac{1}{2}\right)-(+5)+\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(+\frac{1}{4}\right)+\left(-5\frac{2}{3}\right)$；

(使分母相同或便于通分的加数结合在一起)

(4) $(-2.4)-(-4.7)-(+0.5)+(+3.4)+(-3.5)$.

(使计算简便)

3. 计算：

(1) $-3-4+19-11+2$；　(2) $10-24-15+26-42+18$；

(3) $-4.2+5.7-7.6+10.1-5.5$；　(4) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$；

(5) $(-52)+(-19)-(+37)-(-24)$;

(6) $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-3\frac{1}{4}\right)+\left(+2\frac{3}{4}\right)-\left(+5\frac{1}{2}\right)$.

B 组

4. 计算：

(1) $13-[26-(-21)+(-18)]$;

(2) $[1.4-(-3.6+5.2)-4.3]-(-1.5)$;

(3) $\left|-2\frac{1}{4}\right|-\left(-\frac{3}{4}\right)+1-\left|1-\frac{1}{2}\right|$.

5. 列式并计算：

(1) 什么数与 $-\frac{5}{12}$ 的和等于 -1？

(2) -1 减去 $-\frac{5}{6}$ 与 $\frac{1}{6}$ 的和，所得的差是多少？

(3) -4、5、-7 这三个数的和比这三个数的绝对值的和小多少？

(4) 求 1，-2，3，-4，…，99，-100 这 100 个整数的和.

1.9 有理数的乘法

1. 有理数的乘法法则

问题 1 一只小虫沿一条东西向的路线，以 3 m/min 的速度向东爬行 2 min，那么它现在位于原来位置的哪个方向？相距多少米？

我们知道，这个问题可以用乘法来解答：

$$3\times 2=6,$$

即小虫位于原来位置的东边 6 m 处.

能用数轴表示这一事实吗？动手画一画.

注意：这里我们规定向东为正，向西为负.

如果上述问题变为：

问题 2 小虫向西以 3 m/min 的速度爬行 2 min，那么结果有何变化？

这时小虫位于原来位置的西边 6 m 处．写成算式是：

$$(-3)\times 2=-6.$$

比较问题 1、问题 2 中的两个算式：左边的乘数有什么不同，所得的积又有什么改变？你有什么发现？

当我们把“$3\times 2=6$”中的一个乘数“3”换成它的相反数“-3”时，所得的积是原来的积“6”的相反数“-6”．一般地，我们有：

两数相乘，若把一个乘数换成它的相反数，则所得的积是原来的积的相反数．

试一试：$3\times(-2)=?$

与 $3\times 2=6$ 相比较，这里把一个乘数“2”换成了它的相反数“-2”，所得的积应是原来的积“6”的相反数“-6”，即

$$3\times(-2)=-6.$$

把它与 $3\times(-2)=-6$ 对比，结果怎样？

再试一试：$(-3)\times(-2)=?$

把它与 $(-3)\times 2=-6$ 对比，这里把一个乘数“2”换成了它的相反数“-2”，所得的积应是原来的积“-6”的相反数“6”，即

$$(-3)\times(-2)=6.$$

此外，两数相乘时，如果有一个乘数是 0，那么所得的积也是 0．例如：

$$(-3)\times 0=0,\quad 0\times(-2)=0.$$

概括 综合以上各种情况，有如下有理数的乘法法则：

两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘；

任何数与 0 相乘，都得 0 .

例如：

$$(-5)\times(-3),$$ 同号两数相乘

$$(-5)\times(-3)=+(\quad),$$ 得正

$$5\times3=15,$$ 把绝对值相乘

所以 $$(-5)\times(-3)=15.$$

再如：

$$(-6)\times4,$$ 异号两数相乘

$$(-6)\times4=-(\quad),$$ 得负

$$6\times4=24,$$ 把绝对值相乘

所以 $$(-6)\times4=-24.$$

▶ **例 1** 计算：

(1) $(-5)\times(-6)$；

(2) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{4}$.

解 (1) $(-5)\times(-6)=30$.

(2) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{8}$.

练习

1. 确定下列各乘积的正负号：

(1) $5\times(-3)$；　　(2) $(-3)\times3$；

(3) $(-2)\times(-7)$；　　(4) $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}$.

2. 计算：

(1) $3\times(-4)$；　　(2) $2\times(-6)$；

(3) $(-6)\times2$；　　(4) $6\times(-2)$；

(5) $(-6)\times0$；　　(6) $0\times(-6)$；

(7) $(-4)\times0.25$；　　(8) $(-0.5)\times(-8)$；

(9) $\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{4}\right)$；　　(10) $(-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$.

3. 计算：

(1) $3\times(-1)$；　　(2) $(-5)\times(-1)$；

(3) $\frac{1}{4}\times(-1)$；　　(4) $0\times(-1)$；

(5) $(-6)\times1$；　　(6) 2×1；

(7) 0×1；　　(8) $1\times(-1)$.

4. 做完第3题，你能发现什么规律？一个数与 -1 相乘，积是什么？一个数与1相乘呢？

2. 有理数乘法的运算律

在小学里我们知道，数的乘法满足交换律，例如

$$3\times5=5\times3;$$

还满足结合律，例如

$$(3\times5)\times2=3\times(5\times2).$$

引进了负数以后，这些运算律是否还成立呢？也就是说，上面两个等式中，将3、5、2换成任意的有理数，是否仍然成立？

探索　(1) 任意选择两个有理数(至少有一个是负数)，分别填入下列□和○内，并比较两个运算结果：

$$\square \times \bigcirc \text{和} \bigcirc \times \square;$$

（2）任意选择三个有理数(至少有一个是负数)，分别填入下列□、○和◇内，并比较两个运算结果：

$$(\square \times \bigcirc) \times \diamond \text{和} \square \times (\bigcirc \times \diamond).$$

你能发现什么?

概括

有理数的乘法仍满足交换律和结合律.

乘法交换律：两个数相乘，交换乘数的位置，积不变.

$$ab = ba.$$

乘法结合律：三个数相乘，先把前两个数相乘，或者先把后两个数相乘，积不变.

$$(ab)c = a(bc).$$

根据乘法交换律和乘法结合律，三个或三个以上的有理数相乘，可以任意交换乘数的位置，也可以先把其中的几个数相乘.

计算 $(-2) \times 5 \times (-3)$，有哪些不同的算法？哪种算法比较简便？

▶ **例 2** 计算：$(-10) \times \frac{1}{3} \times 0.1 \times 6$.

解 $(-10) \times \frac{1}{3} \times 0.1 \times 6$

$= [(-10) \times 0.1] \times \left(\frac{1}{3} \times 6\right)$

$= (-1) \times 2$

$= -2.$

从例 2 的解答过程中，你能得到什么启发？试直接写出下列各式的结果：

$(-10)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times0.1\times6=$ ________；

$(-10)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-0.1)\times6=$ ________；

$(-10)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-0.1)\times(-6)=$ ________.

观察以上各式，你能发现几个不等于 0 的有理数相乘时，积的正负号与各乘数的正负号之间的关系吗？

一般地，我们有：

几个不等于 0 的数相乘，积的正负号由负乘数的个数决定，当负乘数的个数为奇数时，积为负；当负乘数的个数为偶数时，积为正.

几个不等于 0 的数相乘，首先确定积的正负号，然后把绝对值相乘.

试一试

直接写出下列各式的结果：

(1) $(-5)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times3\times(-2)\times2=$ ________；

(2) $(-5)\times(-8.1)\times3.14\times0=$ ________.

几个数相乘，有一个乘数为 0，积就为 0 .

▶ **例 3** 计算：

(1) $8+\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-8)\times\frac{3}{4}$；

(2) $(-3)\times\frac{5}{6}\times\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{1}{4}\right)$；

(3) $\left(-\frac{3}{4}\right)\times5\times0\times\frac{7}{8}$.

解 (1) $8+\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-8)\times\frac{3}{4}$

$=8+\frac{1}{2}\times 8\times\frac{3}{4}$

$=8+3=11.$

(2) $(-3)\times\frac{5}{6}\times\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{1}{4}\right)$

$=-3\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}$

$=-\frac{1}{2}.$

(3) $\left(-\frac{3}{4}\right)\times 5\times 0\times\frac{7}{8}=0.$

思考 三个数相乘，如果积为负，其中可能有几个乘数为负数？四个数相乘，如果积为正，其中可能有几个乘数为负数？

练习

1. 计算：

(1) $(-4)\times(-7)\times(-25)$；

(2) $\left(-\frac{3}{5}\right)\times 8\times\left(-\frac{4}{3}\right)$；

(3) $(-0.5)\times(-1)\times\frac{3}{4}\times(-8)$.

2. 计算：

(1) $(-5)-(-5)\times\frac{1}{5}\times(-4)$；

(2) $(-1)\times(-7)+6\times(-1)\times\frac{1}{2}$；

(3) $(-3)\times(-7)-3\times(-6)$；

(4) $1-(-1)\times(-1)-(-1)\times 0\times(-1)$.

小学里我们还学过乘法对加法的分配律，例如

$$6\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=6\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{3}.$$

引进了负数以后，分配律是否还成立呢?

探索 任意选取三个有理数(至少有一个是负数)，分别填入下列□、○和◇内，并比较两个运算结果：

□ ×(○ + ◇) 和 □ × ○ + □ × ◇.

你能发现什么?

概括 有理数的运算仍满足分配律.

分配律：一个数与两个数的和相乘，等于把这个数分别与这两个数相乘，再把积相加.

$$a(b+c)=ab+ac.$$

▶ **例 4** 计算：

(1) $30\times\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)$； (2) $4.98\times(-5)$.

解 (1) $30\times\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)$

$=30\times\frac{1}{2}-30\times\frac{2}{3}+30\times\frac{2}{5}$

$=15-20+12$

$=7.$

(2) $4.98\times(-5)$

$=(5-0.02)\times(-5)$

$=-25+0.1$

$=-24.9.$

▶ **例 5** 计算：

(1) $\frac{3}{4}\times\left(8-\frac{4}{3}-\frac{14}{15}\right)$；

(2) $8\times\left(-\frac{2}{5}\right)-(-4)\times\left(-\frac{2}{9}\right)+(-8)\times\frac{3}{5}$.

解 (1) $\frac{3}{4}\times\left(8-\frac{4}{3}-\frac{14}{15}\right)$

$$=\frac{3}{4}\times 8-\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}-\frac{3}{4}\times\frac{14}{15}$$

$$=6-1-\frac{7}{10}$$

$$=4\frac{3}{10}.$$

(2) $8\times\left(-\frac{2}{5}\right)-(-4)\times\left(-\frac{2}{9}\right)+(-8)\times\frac{3}{5}$

$$=(-8)\times\frac{2}{5}+(-8)\times\frac{3}{5}-4\times\frac{2}{9}$$

$$=(-8)\times\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)-\frac{8}{9}$$

$$=-8-\frac{8}{9}$$

$$=-8\frac{8}{9}.$$

你还有其他的解法吗？

由上面的例子可以看出，适当运用运算律，可使运算简便．有时需要先把算式变形，再运用分配律，如例 4(2)；有时可以反向运用分配律，如例 5(2)．

练习

1. 计算：

(1) $(-6)\times\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$；

(2) $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\times 12$；

(3) $(-1\,002)\times 17$.

2. 计算：

(1) $\left(\frac{7}{9}-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}\right)\times 36$；

(2) $9\frac{5}{6}\times 6$.

读一读

队列操练中的数学趣题

在一次队列操练活动中，某班45名学生面向老师站成一行横队．老师每次让其中任意6名学生向后转(不论原来方向如何)，能否经过若干次后，全体学生都背向老师站立？如果能的话，请你设计一种方案；如果不能，请说明理由．

这个问题似乎与数学无关，却又难以入手．注意到学生站立有两个方向，与具有相反意义的量有关，向后转又可想象为进行一次运算，或者说改变一次正负号．我们能否设法联系有理数的知识进行讨论？

让我们再发挥一下想象力：假设每名学生胸前有一块号码布，上面写"+1"，背后有一块号码布，上面写"−1"，那么一开始全体学生面向老师，胸前45个+1的"乘积"是+1．如果最后学生全部背向老师，那么45个−1的"乘积"是−1．

再来观察每次6名学生向后转进行的是什么"运算"．我们也设想老师不叫"向后转"，而称这6名学生面向老师的数字都"乘以−1"．

这样问题就解决了：每次"运算"乘以6个−1，即乘以+1，故45个数的乘积不变(数学上称不变量)，始终是+1．所以要乘积变为−1是不可能的．

一道难题，应用有理数的简单运算后被别出心裁地解决了．

习题1.9

A 组

1. 计算：

(1) $(-6)\times(-7)$；

(2) $(-5)\times 12$；

(3) $0.5\times(-0.4)$；

(4) $-4.5\times(-0.32)$.

2. 计算：

(1) $\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{7}\right)$；

(2) $\left(-\frac{5}{6}\right)\times\left(-\frac{3}{10}\right)$；

(3) $-\frac{4}{15}\times 5$；

(4) $(-0.3)\times\left(-\frac{10}{7}\right)$.

3. 计算：

(1) $-2\times(-3)\times(-4)$；

(2) $6\times(-7)\times(-5)$；

(3) $100\times(-1)\times(-0.1)$；

(4) $(-8)\times\frac{3}{16}\times(-1)\times\frac{1}{2}$；

(5) $21\times(-71)\times 0\times 43$；

(6) $-9\times(+11)-12\times(-8)$.

B 组

4. 计算：

(1) $\left(-\frac{1}{20}\right)\times\frac{5}{4}\times(-8)$；

(2) $\frac{5}{6}\times\left(-2\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{5}$.

5. 计算：

(1) $\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{7}-\frac{2}{5}\right)\times 105$；

(2) $-\frac{3}{4}\times 5.5-0.75\times\left(-\frac{7}{2}\right)$.

1.10 有理数的除法

小学里已学过数的除法．回想一下，除法的意义是什么？它与乘法有什么关系？

试一试：$(-6)\div 2=?$

根据除法的意义，这就是要求一个数“？”，使

$$(\ ?\ )\times 2=(-6).$$

根据有理数的乘法法则，有

$$(-3)\times 2=-6,$$

所以

$$(-6)\div 2=-3.$$

另外，我们还知道

$$(-6)\times\frac{1}{2}=-3.$$

比较以上两式，即有

$$(-6)\div 2=(-6)\times\frac{1}{2}.$$

这表明，除法可以转化为乘法进行运算．

做一做

填空：

(1) $8\div(-2)=8\times(\quad)$；

(2) $6\div(-3)=6\times(\quad)$；

(3) $(-6)\div(\quad)=(-6)\times\frac{1}{3}$；

(4) $(-6)\div(\quad)=(-6)\times\frac{2}{3}$.

做完上述填空后，你有什么发现？

小学里我们学过倒数，对于有理数仍然有：

乘积是 1 的两个数互为倒数(reciprocal)．

例如，-2 与 $-\frac{1}{2}$ 互为倒数，$-\frac{2}{3}$ 与 $-\frac{3}{2}$ 互为倒数.

这样，有理数的除法可以转化为乘法：

除以一个数等于乘以这个数的倒数.

为什么 0 不能作除数?

注意 **0 不能作除数.**

例 1 计算：

(1) $(-18)\div 6$；(2) $\left(-\frac{1}{5}\right)\div\left(-\frac{2}{5}\right)$；(3) $\frac{6}{25}\div\left(-\frac{4}{5}\right)$.

解 (1) $(-18)\div 6=(-18)\times\frac{1}{6}=-3$.

(2) $\left(-\frac{1}{5}\right)\div\left(-\frac{2}{5}\right)=\left(-\frac{1}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

(3) $\frac{6}{25}\div\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{6}{25}\times\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{3}{10}$.

因为除法可以转化为乘法，所以与乘法类似，我们也有如下**有理数的除法法则**：

两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除；

0 除以任何一个不等于 0 的数，都得 0 .

知道了有理数的除法法则以后，我们很容易看出，有理数都可以表示成两个整数之商．任何整数都是它除以 1 所得的商；任何正分数(带分数先化成假分数)都是它的分子除以分母所得的商；任何负分数也可以被看成两个整数(其中一个是负整数)的商，例如，$-3\frac{1}{7}=-\frac{22}{7}=\frac{-22}{7}=\frac{22}{-7}$，它是 -22 与 7 或 22 与 -7 的商.

这段文字及后面的例题揭示了有理数的本质.

例 2 化简下列分数：

(1) $\frac{-12}{3}$；

(2) $\frac{-24}{-16}$.

解 (1) $\frac{-12}{3}=(-12)\div 3=-(12\div 3)=-4$.

(2) $\frac{-24}{-16}=(-24)\div(-16)=24\div 16=1\frac{1}{2}$.

分数可以理解为两个整数的商，解答也可以这样书写：

(1) $\frac{-12}{3}=-\frac{12}{3}$
$=-4$；

(2) $\frac{-24}{-16}=\frac{24}{16}$
$=1\frac{1}{2}$.

例 3 计算：

(1) $\left(-\frac{3}{5}\right)\div\left(-\frac{3}{2}\right)$；

(2) $-\frac{1}{2}\div\frac{7}{8}\times\left(-\frac{3}{4}\right)$.

解 (1) $\left(-\frac{3}{5}\right)\div\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{5}\div\frac{3}{2}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$.

(2) $-\frac{1}{2}\div\frac{7}{8}\times\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{8}{7}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{7}$.

先定正负号，再算绝对值.

练习

1. 写出下列各数的倒数：

(1) $\frac{5}{6}$； (2) $-\frac{3}{7}$； (3) -5；

(4) 1； (5) -1； (6) 0.2 .

2. 计算：

(1) $36\div(-3)$； (2) $(-2)\div\frac{1}{2}$；

(3) $0\div(-5)$； (4) $8\div(-0.2)$；

(5) $\left(-\frac{7}{8}\right)\div\left(-\frac{3}{4}\right)$； (6) $(-6)\div(-4)\div\left(-\frac{3}{5}\right)$.

3. 下列计算正确吗？为什么？

$$(-3)\div\frac{1}{4}\div\frac{1}{4}=(-3)\div\left(\frac{1}{4}\div\frac{1}{4}\right)=(-3)\div 1=-3.$$

习题1.10

A 组

1. 写出下列各数的倒数：

(1) -15；　(2) 0.25；

(3) $3\frac{1}{3}$；　(4) $-5\frac{2}{5}$.

2. 计算：

(1) $(-42)\div 12$；　(2) $(-56)\div(-14)$；

(3) $-18\div 0.6$；　(4) $\frac{3}{5}\div(-1)$；

(5) $-\frac{1}{4}\div\frac{3}{2}$；　(6) $-0.25\div\left(-\frac{3}{8}\right)$.

3. 化简下列分数：

(1) $\frac{-21}{7}$；　(2) $\frac{2}{-12}$；　(3) $\frac{-54}{-8}$.

B 组

4. 计算：

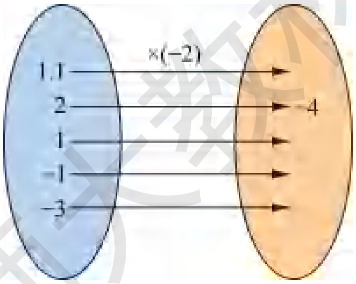
(1) $\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\div\left(-2\frac{1}{4}\right)$；

(2) $-6\div(-0.25)\times\frac{11}{24}$；

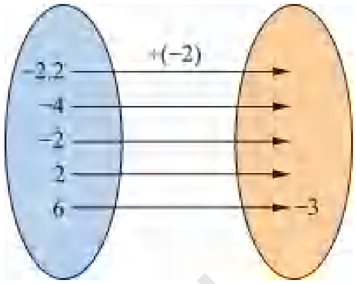
(3) $\left(-\frac{2}{3}\right)\div\frac{1}{3}\div\left(-\frac{1}{2}\right)$.

5. (1) 把图①中第一个圈里的每一个数，分别乘以 -2，将结果写在第二个圈里对应的位置；

(2) 把图②中第一个圈里的每一个数，分别除以 -2，将结果写在第二个圈里对应的位置.



①



②

(第 5 题)

1.11 有理数的乘方

在小学里，我们已经学过：

$a\cdot a$ 记作 a^2，读作 a 的平方(或 a 的 2 次方)；

$a\cdot a\cdot a$ 记作 a^3，读作 a 的立方(或 a 的 3 次方).

一般地，n 个相同的乘数 a 相乘：

$$\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个},$$

记作 a^n .

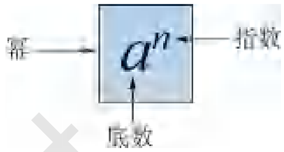
> 你能利用正方形的面积和正方体的体积来解释平方、立方的意义吗?

例如

$$2\times2\times2=2^3,$$

$$(-2)(-2)(-2)(-2)=(-2)^4.$$

这种求几个相同乘数的积的运算，叫做**乘方**(involution)，乘方的结果叫做**幂**(power). 在 a^n 中，a 叫做**底数**(base number)，n 叫做**指数**(exponent)，a^n 读作 a 的 n 次方，当把 a^n 看作是 a 的 n 次方的结果时，也可读作 a 的 n 次幂.



例如，在 2^3 中，底数是 2，指数是 3． 2^3 读作 2 的 3 次方，或 2 的 3 次幂．

一个数可以看作这个数本身的 1 次方，a^1 就是 a，指数 1 通常省略不写．

▶ **例 1** 计算：

(1) $(-2)^3$；　　(2) $(-2)^4$；　　(3) $(-2)^5$．

解 (1) $(-2)^3=(-2)(-2)(-2)=-8$．

(2) $(-2)^4=(-2)(-2)(-2)(-2)=16$．

(3) $(-2)^5=(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)$

$=-32$．

$(-2)^4$ 与 -2^4 的意义是否相同？

根据有理数的乘法法则，我们有：

正数的任何次幂都是正数；

负数的奇次幂是负数，负数的偶次幂是正数．

练习

1. $(-4)^5$ 读作什么？其中底数是什么？指数是什么？$(-4)^5$ 是正数还是负数？

2. 计算：

(1) 10^3；　　(2) 10^5；　　(3) $(-1)^3$；

(4) $(-1)^{10}$；　　(5) $(-0.1)^3$；　　(6) $\left(-\frac{3}{2}\right)^4$；

(7) $(-2)^3\times(-2)^2$；　　(8) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^5$．

3. 3 的平方是什么？-3 的平方是什么？平方得 9 的数有几个？有没有平方得 -9 的有理数？

利用 10 的幂，有时可以方便地表示遇到的一些较大的数，如：

光的速度大约是 300 000 000 m/s；

截至 2022 年底，全世界人口数大约是 8 000 000 000 .

这样的大数，读、写都不方便，考虑到 10 的幂有如下特点：

$$10^2=100,\quad 10^3=1\,000,\quad 10^4=10\,000,\quad \cdots,$$

即一般地，10 的 n 次幂，在 1 的后面有 n 个 0 . 利用这个事实，我们可以用 10 的幂表示一些绝对值较大的数，如：

$$8\,000\,000\,000=8\times 1\,000\,000\,000=8\times 10^9,$$
$$-700\,000\,000=-7\times 100\,000\,000=-7\times 10^8.$$

一个绝对值大于 10 的数可以记成 $a\times 10^n$ 的形式，其中 $1\leqslant |a|<10$，n 是正整数. 像这样的记数法叫做**科学记数法**.

▶ **例 2**　用科学记数法表示下列各数：

（1）696 000；

（2）1 000 000；

（3）−58 000 .

解　（1）$696\,000=6.96\times 10^5$.

（2）$1\,000\,000=1\times 10^6$.

（3）$-58\,000=-5.8\times 10^4$.

思考　用科学记数法表示一个数时，10 的指数与原数的整数位数有什么关系？

练习

1. 用科学记数法表示下列各数：

（1）80 000；　（2）100 000；　（3）−12 300 000 .

2. 下列用科学记数法表示的数，原来各是什么数？

（1）2×10^5；　（2）5.18×10^3；　（3）7.04×10^6.

阅读材料

2^{64} 有多大

我们知道，$64^2 = 4\,096$，它并不是一个很大的数．我们将底数和指数交换，得到 2^{64}，你能想象它有多大吗？

传说古印度人西塔发明了国际象棋，国王因此非常高兴，决定要重赏西塔．西塔说：“陛下，本人不要您的重赏，只需您在本人的棋盘上赏一些麦子就行了．在棋盘的第 1 个格子里放 1 粒，在第 2 个格子里放 2 粒，在第 3 个格子里放 4 粒，在第 4 个格子里放 8 粒，依此类推，以后每一个格子里放的麦粒数都是前一个格子里放的麦粒数的 2 倍，直到放满 64 个格子就行了．”区区小数，几粒麦子，这有何难：“来人！”国王令人如数付给西塔．计数麦粒的工作开始了，第 1 个格子里放 1 粒，第 2 个格子里放 2 粒，第 3 个格子里放 4 粒……还没有放到第 20 个格子，一袋麦子就空了．一袋又一袋的麦子被扛到国王面前来．但是，麦粒数一格接一格飞快地增长着．国王很快就看出，即使拿出全国的粮食，也兑现不了他对西塔的诺言．原来，所需麦粒总数为

$$\begin{aligned}1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63} &= 2^{64}-1\text{（到高中后你自己就能推导出来）}\\ &= 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.\end{aligned}$$

这些麦子究竟有多少？若以每立方米仓库可存放约 1 500 万粒麦子计算，这些麦子的体积大约是 12 000 亿立方米．假如造一个高 4 米、宽 10 米的仓库存放这些麦子，那么仓库的长度大约是 0.3 亿千米，大致是地球到太阳的距离的 $\frac{1}{5}$（地球到太阳的平均距离约为 1.496 亿千米），或相当于绕地球赤道转 750 圈的长度（地球赤道的周长约为 40 076 千米），而要生产这么多麦子，全世界需要一千多年．虽然国家十分富有，但要这么多的麦子，国王是怎么也拿不出来的．

可见，$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$ 是一个很大的数．

2018 年，有人在一个名为“因特网梅森质数大搜索”的国际合作项目中发现 $2^{82\,589\,933}-1$ 是一个质数①，它有 24 862 048 位，而 2^{64} 才 20 位呢！

① 质数又称为素数．

习题1.11

A 组

1. 把下列各式写成乘方的形式：

(1) $6\times6\times6$；

(2) 2.1×2.1；

(3) $(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)$；

(4) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$.

2. 把下列各式写成乘法的形式：

(1) 3^4；　　(2) 4^3；　　(3) $(-1)^2$；　　(4) 1.1^3.

3. 用科学记数法表示下列各数：

(1) 3 210；　　(2) −50 600；　　(3) 18 000 000 .

4. 下列用科学记数法表示的数，原来各是什么数？

(1) 2×10^6；　　(2) 6.03×10^5；　　(3) -5.002×10^4.

5. 填空：

(1) 地球离太阳约有1亿5千万千米，1亿5千万用科学记数法表示为__________；

(2) 地球上煤的储量估计为15万亿吨，15万亿用科学记数法表示为__________.

B 组

6. 计算：

(1) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^2$；　　(2) $(-0.2)^3$；

(3) $-(-3)^4$；　　(4) $-(-3)^5$.

7. 2020年12月，我国科学家成功构建了76个光子的量子计算原型机“九章”．当求解5 000万个样本的高斯玻色取样问题时，“九章”只需200 s，而截至2020年世界最快的超级计算机则需要6亿年．“九章”平均每秒可处理多少个样本？（用科学记数法表示）

8. 地球绕太阳每小时转动经过的路程约为 1.1×10^5 km，声音在空气中每小时约传播 1.2×10^3 km．地球绕太阳转动的速度与声音传播的速度哪个快？

1.12 有理数的混合运算

下面的算式中有哪几种运算？

$$3+50\div 2^2\times\left(-\frac{1}{5}\right)-1.$$

这个算式中，含有有理数的加、减、乘、除、乘方等多种运算，它是有理数的混合运算.

加法和减法叫做第一级运算；乘法和除法叫做第二级运算；乘方和开方(今后将会学到)叫做第三级运算.

有理数的混合运算，应按以下顺序进行：

1. 先做乘方，再做乘除，最后做加减；

2. 同级运算，按照从左至右的顺序进行；

3. 如果有括号，就先算小括号里的，再算中括号里的，然后算大括号里的.

试一试

指出下列各算式的运算顺序：

(1) $6\div(3\times 2)$；

(2) $6\div 3\times 2$；

(3) $17-8\div(-2)+4\times(-3)$；

(4) $3^2-50\div 2^2\times\frac{1}{10}-1$；

(5) $-1\frac{2}{3}\times\left(0.5-\frac{2}{3}\right)\div 1\frac{1}{9}$；

(6) $-1-[1-(1-0.5\times 4^3)]$.

思考

(1) $2\div\left(\frac{1}{2}-2\right)$ 与 $2\div\frac{1}{2}-2$ 有什么不同?

(2) $(-2)\div(2\times3)$ 与 $(-2)\div2\times3$ 有什么不同?

例 1 计算：$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\div1\frac{1}{4}\div\frac{1}{10}$.

解 $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\div1\frac{1}{4}\div\frac{1}{10}$

$=\left(-\frac{1}{6}\right)\times\frac{4}{5}\times10=-\frac{4}{3}$.

注意 进行分数的乘、除运算时，一般要把带分数化为假分数，把除法转化为乘法.

试一试

计算：$2\frac{1}{4}\times\left(-\frac{6}{7}\right)\div\left(\frac{1}{2}-2\right)$.

练习

1. 计算：$2\times(-3)^3-4\times(-3)+15$.
2. 计算：$-1\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\div\frac{1}{9}$.
3. 计算：$[12-4\times(3-10)]\div4$.

有理数的混合运算涉及多种运算，确定合理的运算顺序是正确解题的关键，能用简便方法的尽量用简便方法．下面再看几个例子.

例 2 计算：$3+50\div 2^2\times\left(-\frac{1}{5}\right)-1$.

解 $3+50\div 2^2\times\left(-\frac{1}{5}\right)-1$

$=3+50\div 4\times\left(-\frac{1}{5}\right)-1$

$=3+50\times\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{5}\right)-1$

$=3-50\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}-1$

$=3-\frac{5}{2}-1$

$=-\frac{1}{2}$.

例 3 计算：$\left[1-\left(1-0.5\times\frac{1}{3}\right)\right]\times[2-(-3)^2]$.

解 $\left[1-\left(1-0.5\times\frac{1}{3}\right)\right]\times[2-(-3)^2]$

$=\left[1-\left(1-\frac{1}{6}\right)\right]\times(2-9)$

$=\left(1-\frac{5}{6}\right)\times(-7)$

$=\frac{1}{6}\times(-7)$

$=-\frac{7}{6}$.

例 4 计算：$\left(\frac{7}{4}-\frac{7}{8}-\frac{7}{12}\right)\div\left(-\frac{7}{8}\right)+\left(-\frac{8}{3}\right)$.

解 $\left(\frac{7}{4}-\frac{7}{8}-\frac{7}{12}\right)\div\left(-\frac{7}{8}\right)+\left(-\frac{8}{3}\right)$

$=\left(\frac{42}{24}-\frac{21}{24}-\frac{14}{24}\right)\div\left(-\frac{7}{8}\right)+\left(-\frac{8}{3}\right)$

$$= \frac{7}{24} \times \left(-\frac{8}{7}\right) + \left(-\frac{8}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{8}{3}$$

$$= -3.$$

也可以这样来算：

$$\left(\frac{7}{4} - \frac{7}{8} - \frac{7}{12}\right) \div \left(-\frac{7}{8}\right) + \left(-\frac{8}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{7}{4} - \frac{7}{8} - \frac{7}{12}\right) \times \left(-\frac{8}{7}\right) + \left(-\frac{8}{3}\right)$$

$$= \frac{7}{4} \times \left(-\frac{8}{7}\right) + \left(-\frac{7}{8}\right) \times \left(-\frac{8}{7}\right) + \left(-\frac{7}{12}\right) \times \left(-\frac{8}{7}\right) + \left(-\frac{8}{3}\right)$$

$$= -2 + 1 + \frac{2}{3} - \frac{8}{3}$$

$$= -3.$$

比较这两种算法，哪一种更简便？

练习

1. 计算：

(1) $-2 + 2 \times (-4)^2$；

(2) $-2^2 + (-7) \div \left(-\frac{7}{4}\right)$；

(3) $\left(-1\frac{1}{4}\right) \times \frac{2}{5} \times 8 - 9 \div \left(-\frac{3}{2}\right)^2$.

2. 下列计算是否正确？若不正确，试说明错在哪里，并予以改正：

(1) $74 - 2^2 \div 70 = 70 \div 70 = 1$；

(2) $2 \times 3^2 = (2 \times 3)^2 = 6^2 = 36$；

(3) $6 \div (2 \times 3) = 6 \div 2 \times 3 = 3 \times 3 = 9$；

(4) $\frac{2^2}{3} - (-2) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{9} - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} = \frac{17}{18}$.

习题1.12

A 组

1. 计算：

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$；

(2) $1\frac{5}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$；

(3) $-8+4\div(-2)$；

(4) $3\times(-4)+(-28)\div 7$；

(5) $(-7)\times(-5)-90\div(-15)$；

(6) $42\times\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)\div\left(-\frac{1}{4}\right)$.

2. 计算：

(1) $4-5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3$；

(2) $-8-3\times(-1)^3-(-1)^4$.

3. 计算：

(1) $-2^3\div\frac{4}{9}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2$；

(2) $-1^4-\frac{1}{6}\times[2-(-3)^2]$.

B 组

4. 计算：

(1) $-\frac{5}{2}+\frac{28}{5}\div(-2)\times\left(-\frac{5}{14}\right)$；

(2) $4\times(-3)^2-5\times(-3)+6$.

5. 计算：

(1) $-2+\left(1-0.2\div\frac{3}{5}\right)\times(-3)$；

(2) $1\div(-1)+0\div 4-(-4)\times(-1)$.

1.13 近似数

做一做

1. 统计班上喜欢看球赛的同学的人数.
2. 量一量本册数学教科书的宽度.

如果统计得到班上喜欢看球赛的同学的人数是 35，则 35 这个数是与实际完全符合的准确数，一个也不多，一个也不少. 如果量得教科书的宽度是 18.6 cm，由于所用刻度尺的刻度有精确度限制，而且用眼睛观察度量数据不可能做到精确，因此与实际宽度常会有一点偏差. 这里的 18.6 是一个与实际宽度非常接近的数，称为**近似数**(approximate number).

在实际生活中，我们常会遇到或用到近似数，例如，我国的陆地面积约为 960 万平方千米，小明家的写字台的长度为 120 cm，这里的 960、120 都是近似数.

你还能举出一些日常生活中遇到的近似数吗?

使用近似数就有关于近似程度的问题，也就是关于精确度的问题.

我们都知道：

$$\pi = 3.141\,59\cdots.$$

计算中，我们需对 π 取近似数：

如果结果只取整数，那么用四舍五入法应为 3，就叫做精确到个位；

如果结果取 1 位小数，那么应为 3.1，就叫做精确到十分位(或精确到 0.1)；

如果结果取 2 位小数，那么应为 3.14，就叫做精确到百分位(或精确到 0.01)；

……

概括 一般地，一个近似数四舍五入到某一位，就说这个近似数精确到那一位.

例如，小明的身高为 1.70 m，1.70 这个近似数精确到百分位.

▶ **例 1** 下列用四舍五入法得到的近似数，分别精确到哪一位？

（1） 132.4； （2） 0.057 2； （3） 7.36×10^4 .

解 （1） 132.4 精确到十分位(即精确到 0.1).

（2） 0.057 2 精确到万分位(即精确到 0.000 1).

（3） 7.36×10^4 精确到百位.

▶ **例 2** 用四舍五入法，按括号中的要求，对下列各数取近似数：

（1） 0.340 82(精确到千分位)； （2） 64.8(精确到个位)；

（3） 1.504 6(精确到 0.01)； （4） 130 542(精确到千位).

解 （1） 0.340 82 $\approx$0.341.

（2） 64.8 $\approx$ 65.

（3） 1.504 6 $\approx$1.50.

（4） 130 542 $\approx1.31\times10^5$.

近似数 1.50 与 1.5 相同吗？

注意 （1）例 2 的小题（4）中，用科学记数法，把结果写成 1.31×10^5，就确切地表示精确到千位. 而如果把结果写成 131 000，会误认为是精确到个位.

（2）有一些量，我们很难测出它们的准确值，或者没有必要算得它们的准确值，这时可以通过粗略的估算得到需要的近似数，有时近似数也并不是用四舍五入法得到的.

例如，某地遭遇水灾，约有 10 万人的生活受到影响. 政府拟从外地调运一批粮食救灾，需估计每天要调运的粮食重量. 如果按一个人平均一天需要约 0.5 kg 粮食计算，那么可以估计出每天要调运约 5 万千克粮食.

又如，某校共有 1230 名学生，想租用 45 座的客车外出秋游. 为估计需租用客车的辆数，计算得 1230 ÷ 45 = 27.33…， 这里就不能用四舍五入法取近似数，而是要用 “进一法”，即应租用 28 辆客车. 想想这是为什么？

练习

1. 请你举出几个含有准确数和近似数的实际例子.
2. 圆周率 $\pi = 3.141\,592\,653\cdots$，如果取近似数 3.142，那么它精确到哪一位？如果取近似数 3.141 6 呢？
3. 下列用四舍五入法得到的近似数，分别精确到哪一位？

   (1) 127.32；　　(2) 0.040 7；

   (3) 20.053；　　(4) 230.0；

   (5) 4.002；　　(6) 5.08×10^3.
4. 用四舍五入法，按括号中的要求，对下列各数取近似数：

   (1) 0.632 8(精确到 0.01)；　　(2) 7.912 2(精确到个位)；

   (3) 130.06(精确到十分位)；　　(4) 46 021(精确到百位).
5. 量出本册数学教科书的长度.（精确到 1 mm）

习题1.13

A 组

1. 下列各数据中，哪些数是准确数？哪些数是近似数？

   (1) 小琳称得体重为 38 kg；

   (2) 现在的气温是 -2 ℃；

   (3) 1 m 等于 100 cm；

   (4) 某汽车集团去年累计汽车销量为 280 万辆.
2. 下列用四舍五入法得到的近似数，分别精确到哪一位？

   (1) 5.67；

   (2) 0.003 010；

   (3) 1.11×10^6；

   (4) 1.200.

3. 用四舍五入法，按括号中的要求，对下列各数取近似数：

（1） 1 102.5 亿（精确到亿位）；

（2） 0.079 2（精确到 0.001）；

（3） 0.002 91（精确到万分位）；

（4） 475 301（精确到万位）.

B 组

4. 一桶玉米的质量大约为 45.2 kg . 如图，晒谷场上有一堆玉米，大约相当于 12 桶. 这堆玉米的质量大约为多少千克？（精确到 1 kg）

（第 4 题）

5. 小明和小刚测量同一根铜管的长，用四舍五入法记录测得的结果，小明测量结果的记录是 0.80 m，小刚测量结果的记录是 0.8 m. 这两个测量结果是否相同？为什么？

1.14 用计算器进行计算

问题 已知一个圆柱的底面半径为 2.32 cm，高为 7.06 cm，求这个圆柱的体积.

我们知道，圆柱的体积 = 底面积 × 高. 因此，计算这个圆柱的体积就要做这样的计算：

$$\pi \times 2.32^2 \times 7.06.$$

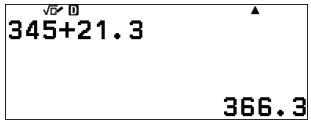
遇到复杂的计算，我们可以利用电子计算器（简称计算器）来完成.

下面我们尝试利用计算器解题.

▶ **例 1** 用计算器求 345 + 21.3 的值.

解 用计算器求 345 + 21.3 的值的按键顺序是：

3 4 5 + 2 1 . 3.



计算器显示运算式子 345 + 21.3. 再按(EXE)，显示结果为$\frac{3663}{10}$. 若需得到小数形式的结果，可继续按(格式)(∨)(小数)(EXE)，显示 366.3，即

$$345+21.3=\frac{3663}{10}=366.3.$$

注意

（1）在输入数据后，也可以直接按(↑)(EXE)（≈），得到小数形式的结果.

（2）≈ 是(EXE)键的第二功能，启用第二功能，需要先按(↑)键.

做一做

按例 1 的方法，用计算器求 105.3 − 243 的值.

▶ **例 2** 用计算器求 31.2 ÷ (−0.4) 的值.

解 用计算器求 31.2 ÷ (−0.4) 的值的按键顺序是：

(3)(1)(.)(2)(÷)(()((−))(0)(.)(4)())(EXE).

显示结果为 −78，所以

$$31.2\div(-0.4)=-78.$$

注意

（1）输入 0.4 时，也可以省去小数点前的 0，按(.)(4)即可.

（2）输入负数，如输入 −5 时，可以按((−))(5)，也可以按(−)(5).

（3）在紧接着(EXE)键前面的右括号键())可以不按.

做一做

按例 2 的方法，用计算器求 $8.2\times(-4.3)\div2.5$ 的值.

▶ **例 3** 用计算器求 $62.2+4\times7.8$ 的值.

解 用计算器求 $62.2+4\times7.8$ 的值的按键顺序是：

6 2 . 2 + 4 × 7 . 8 EXE 格式 ∨ EXE.

显示结果为 93.4，所以

$$62.2+4\times7.8=93.4.$$

做一做

按例 3 的方法，用计算器求 $(-29.4)\times2\div4.2\div(-7)$ 的值.

▶ **例 4** 用计算器求 2.7^3 的值.

解 用计算器求 2.7^3 的值，可以使用乘方的专用键 ■□. 按键顺序是：

2 . 7 ■□ 3 EXE.

显示结果为 19.683，所以

$$2.7^3=19.683.$$

注意 使用专用键 ■□ 时，可以先输入底数，再按此键，最后输入指数；也可以先按 ■□，再输入底数，然后按 ▶，之后再输入指数，最后按 EXE 求解.

做一做

1. 按例 4 的方法，用计算器求 6.3^5 的值.
2. 用计算器求本节开头所提问题中圆柱的体积.（精确到 1 cm^3）

练习

1. 用计算器计算：

(1) $27+308$；
(2) $0.75+32.04$；
(3) $3.65-72.7$；
(4) $-97.9+34.8$；
(5) $-43-(-28)$；
(6) 0.147×63；
(7) 36×125；
(8) $84\div(-24)$；
(9) $76\div(-0.19)$；
(10) $(-0.125)\times(-18)$；
(11) $83+139-328+512$；
(12) $-3.14+5.76-7.19$；
(13) $2.5\times 76\div(-0.19)$；
(14) $-125\times 0.42\div(-7)$.

2. 用计算器计算：

(1) $23\times 15+4$；
(2) $50\div 2-20\times 3$；
(3) $25\times 3\times 2+(-127)$；
(4) $0.84\div 4+0.79\times 2$；
(5) $-24\times 2+15\div 0.75$；
(6) 1.8^3；
(7) -0.12^4；
(8) 9.3^2；
(9) 5^6；
(10) $(-3)^7$.

3. 用计算器计算：

(1) $2.6\times 3-(-3)^4$；
(2) $4.5^2\times 3-(-24)\div 8$；
(3) $4+2^2\times 7-(-3)\times 6$.

阅读材料

从结绳计数到计算器

伴随着人类的诞生，数数和计数就同时出现在人类的各项活动中，成为人类文明史的重要组成部分．我国古代早有“结绳计数”的记载，即用绳子打结作为计数的手段．之后，石块、算筹等被用于劳动和生活．随着人们数学知识的增加和技术的发展，我国在元代发明了算盘及相应的珠算法．17 世纪，英国人发明了计算尺．与此同时，法国人和德国人发明了手摇计算器，用于进行数的四则运算．

如今，计算器已经成为人们工作和生活中不可或缺的工具．一台计算器具有许多功能，它看起来体积很小，但作用却极大．它既可以帮助我们进行各种复杂的数学计算，解答生活和工作中的各种数学问题，又可以帮助我们理解数学概念．有的计算器可以编制各种程序，有的还可以绘制各种图形，有的甚至可以进行式的运算，功能可谓越来越强大．

由于计算器的型号各不相同，因此使用方法也未必一样．计算器的输入方式大致可分为两类，一类是按数学的书写形式输入的，称为“数学输入”，另一类是在一行中输入数学表达式的，称为“线性输入”．例如要输入分数 $\frac{2}{3}$，用“数学输入”，是按②⊟③，屏幕显示 $\frac{2}{3}$；用“线性输入”，同样是按②⊟③，但屏幕显示 2⌟3．计算器的输出，可以分为“数学输出”“线性输出”和“小数输出”，例如计算结果为 $\frac{2}{3}$，“数学输出”显示为 $\frac{2}{3}$，“线性输出”显示为 2⌟3，“小数输出”显示为 0.6666666667．不同计算器的显示屏幕的显示行数可能不一样，有的计算器只能显示两行数据，有的计算器则能显示多行数据．许多计算器可以按不同需要输入数学式子，并拥有多行显示的屏幕，还可以翻阅前面曾经计算过的数学式子，也可以修改已输入的数学式子．

我们的航船已经浩浩荡荡地驶入了奇妙的数学世界，千万别忘了带上你的计算器，一起遨游知识的海洋．

习题1.14

A 组

1. 用计算器计算：

(1) $83+189-328+512$；

(2) $-4.21-(-22.5)+(-7.24)-29.2$；

(3) $43\times97\times985$；

(4) 8^4；

(5) $3.24\times10^3+1.2\times10^5$；

(6) $3.12\times10^6\div(-2.4\times10^2)$.

2. 如图，已知圆环的外圆半径为 46 mm，内圆半径为 27 mm，圆环的面积是多少平方毫米？（精确到百位）

（第 2 题）

B 组

3. 利用计算器进行如下计算：

任意写出一个正整数（例如 3 708），求出它的各位数字的平方和（$9+49+0+64=122$）；再对这个平方和求出各位数字的平方和 …… 如此继续下去.

你能发现什么规律？

数学活动

无限循环小数能化为分数吗

我们知道，分数都是有理数，而分数可以化为小数．在将分数转化为小数的过程中，每进行一次作商运算，得到的余数肯定比分母小．因此，经过不大于分母的作商次数，要么除尽，要么循环，即结果不是有限小数就是无限循环小数．例如我们常见的 $-\frac{1}{3}=-0.333\cdots$，通常记作 $-0.\dot{3}$；又如 $\frac{22}{7}=3.\dot{1}4285\dot{7}$．它们都是有理数．反之，有限小数都可以写成分数，那么无限循环小数是否都能化为分数呢？观察下面将一个无限循环小数化为分数的过程，并与同学讨论后面的问题．

$0.\dot{4}\dot{7}=0.474\,747\cdots$ 是一个以 47 为循环节的无限循环小数，将它扩大到 100 倍，把第一个循环节移到小数点之前，得到 $100\times0.\dot{4}\dot{7}=47.474\,7\cdots$，发现小数点后依然是循环节为 47 的无限循环小数，即仍是原数（这是“无限”的奇妙特征——部分等于全部），即 $100\times0.\dot{4}\dot{7}=47+0.\dot{4}\dot{7}$．由此可知，99 个 $0.\dot{4}\dot{7}$ 等于 47，所以 $0.\dot{4}\dot{7}=\frac{47}{99}$．

问题：

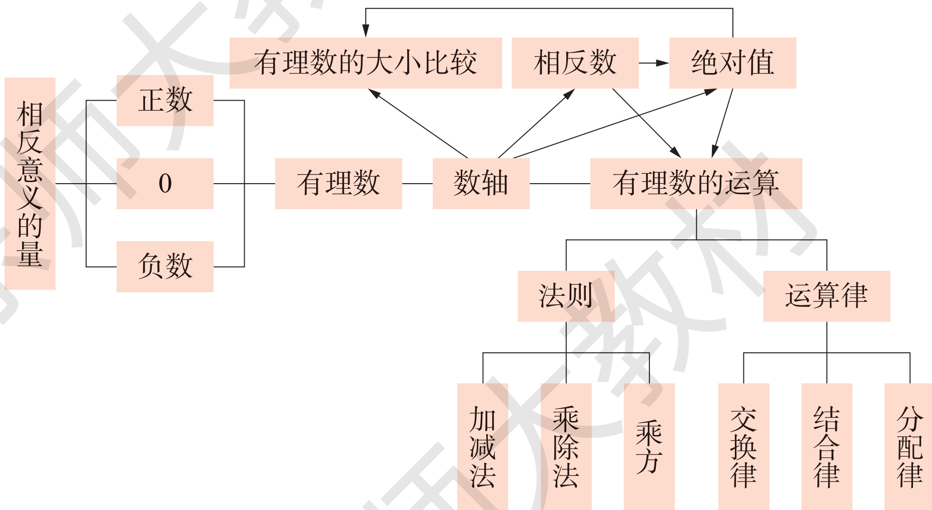
（1）这种方法是否适用于其他无限循环小数，例如 $0.\dot{7}\dot{4}$？又如 $0.\dot{8}$ 和 $0.\dot{3}2\dot{5}$ 呢？

（2）对于不是从小数点后第一位开始循环的循环小数（通常称为混循环小数），例如 $0.3\dot{2}\dot{5}$，你能想出办法将它转化为上述情形来解决吗？

（3）交流一下各自得到的结论，通过不同途径查阅相关知识，总结无限循环小数化为分数的规律．

小结

一、知识结构



二、要点

1. 本章将数集扩充到有理数集，并将数的大小比较和运算推广到有理数范围，建立它们新的意义和法则．这是一个从实际经验到数学抽象的过程．例如，从零上和零下温度的表示中抽象出负数，从比较温度的高低中认识有理数的大小比较，从气温计表示温度的启发中引出数轴的概念，并概括出有理数的大小比较法则等．

2. 用数轴上的点表示有理数，有利于直观地理解相反数和绝对值的概念，也可以帮助我们理解有理数的大小比较和运算，使数和形很好地结合起来．

3. 在研究有理数时，一般要考虑两个方面：一是数的符号；二是数的绝对值．除了考虑符号外，有理数的运算(或大小比较)往往都归结为绝对值的运算(或大小比较)，注意到绝对值是非负数，所以也就归结为用我们熟知的非负数来解决．这样的“化归”思想在数学研究中是屡见不鲜的．

4. 有理数的本质是可以写成整数之商(之比). 认识到这个本质对理解相关的问题和将来进一步扩充数集都是至关重要的. 例如, 在以后的数学学习中, 我们将会看到, 实践中还存在着不能表示成两个整数之商的数, 于是就需要进一步扩充数集.

5. 数集的扩充带来了新的变化. 例如减法, 在引进负数之前, 被减数不能小于减数, 而在有理数集中, 任意两个有理数总能进行减法运算, 而且减法可以转化为加法. 再有, 数集扩充以后, 0 不再表示 "没有", 它是一个特定的数, 在数轴上 0 表示一个重要的点——原点, 它是正数和负数的分界点. 值得关注的是, 新的数集保持了原有数集的一些重要性质, 特别是数的运算律仍然成立. 这一通性在数学的进一步研究中将起着关键作用, 在下一章的学习中马上可以看到.

6. 本章知识是在小学阶段非负数相应知识基础上的更新和重建, 类比和化归是所用的重要思想方法. 教科书在新知识的探索和归纳中重视训练推理能力, 练习和习题中也有这样的安排. 字母表示数的出现既为下一章代数式的学习做准备, 也有利于应用符号体系掌握一般规律, 为进一步提升推理论证能力打基础.

复习题

A 组

1. 下列有理数中，哪些是正数？哪些是负数？

$$2.5,\quad -8,\quad -0.7,\quad \frac{3}{2},\quad -\frac{1}{7},\quad 0.05,\quad 0$$

2. 根据下表每行中的已知数，填写该行中其他的数：

原　数	原数的相反数	原数的绝对值	原数的倒数
-2			
	-7.5		
		0	
			$\frac{10}{7}$

3. 把表示下列各数的点画在数轴上，再按从小到大的顺序，用“<”号把这些数连接起来：

$$2.5,\quad -3,\quad 5\frac{1}{2},\quad -2\frac{1}{2},\quad 0,\quad -1.6.$$

4. 按从大到小的顺序，用“>”号把下列各数连接起来：

$$-3.2,\quad \frac{1}{2},\quad 0.6,\quad -0.6,\quad 5,\quad -3.3.$$

5. 在数轴上画出所有表示大于 -5，并且小于 4 的整数的点．其中最大的一个数是多少？

6. 比较下列各对数的大小：

（1）$-\frac{6}{7}$ 与 $-\frac{7}{6}$；　　（2）-1.17 与 -1.2；　　（3）$-5\frac{4}{5}$ 与 0；

（4）$\frac{1}{10}$ 与 -2；　　（5）-0.001 与 -0.009．

7. 计算：

(1) $-100+157$；　　(2) $-18+(-32)$；

(3) $-9-27$；　　(4) $-29-(-12)$；

(5) $-8\times(-15)$；　　(6) $(-4)\div\left(-\frac{1}{4}\right)$；

(7) $-56\div(-8)$；　　(8) $72\div\left(-\frac{1}{3}\right)$；

(9) $(-0.03)\times(-100)$；　　(10) $\left(-\frac{3}{4}\right)\div\left(-5\frac{5}{8}\right)$.

8. 计算：

(1) $8+\left(-\frac{1}{4}\right)-5-(-0.25)$；　　(2) $-82+72\div36$；

(3) $(3-4-5)\div\left(-1\frac{1}{5}\right)$；　　(4) $2\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\div(-9+19)$；

(5) $(-1)\div\left(-1\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}$；　　(6) $\left(-\frac{1}{6}+\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\right)\times(-48)$；

(7) $25\times\frac{3}{4}-(-25)\times\frac{1}{2}+25\times\left(-\frac{1}{4}\right)$；

(8) $(-81)\div2\frac{1}{4}+\frac{4}{9}\div(-16)$.

9. (1) 平方等于$\frac{4}{9}$的有理数有哪几个？有没有平方等于$-\frac{4}{9}$的有理数？

(2) 立方等于27的有理数有几个？有没有立方等于-27的有理数？

10. (1) 互为相反数的两个数的和是什么？

(2) 如果两个互为相反数的数都不为0，那么它们的商是多少？

11. 用四舍五入法，按括号中的要求，对下列各数取近似数：

(1) 2.768(精确到百分位)；　　(2) 0.009 493(精确到千分位)；

(3) 8.965(精确到0.1)；　　(4) 17 289(精确到千位).

12. 用计算器计算(精确到十分位)：

(1) $56.2+7.41\times(-2.12)$；　　(2) $2.91^4-1.68$；

(3) $(3.91-1.45)^2\div(-5.62)+49.34$.

B 组

13. 根据下列语句列式，并计算：

（1）-3 与 0.3 的和乘以 2 的倒数；（2）45 加上 15 与 -3 的积；

（3）34 与 6 的商减去 $-\frac{1}{3}$；（4）$-\frac{1}{2}$ 与 -5 的差的平方.

14. （1）0 和 1 之间的数的平方比原数大还是小？立方呢？倒数呢？分别举例说明.

（2）-1 和 0 之间的数的平方比原数大还是小？立方呢？倒数呢？分别举例说明.

15. 选择题

（1）下列每对数中，不相等的一对是（　　）.

A. $(-2)^3$ 与 -2^3　　B. $(-2)^2$ 与 2^2

C. $(-2)^4$ 与 -2^4　　D. $|-2^3|$ 与 $|2|^3$

（2）计算 $(-2)^{100}+(-2)^{101}$ 所得的结果是（　　）.

A. 2^{100}　　B. -1　　C. -2　　D. -2^{100}

（3）下面各组大小关系中，正确的是（　　）.

A. $0>|-10|$　　B. $\left|-\frac{3}{101}\right|>\left|-\frac{4}{102}\right|$

C. $|-2|+35.6>|-2+35.6|$　　D. $(-2)^3>(-2)^2$

16. 计算：

（1）$2-2\div\frac{1}{3}\times3$；（2）$-\left(\frac{1}{2}\right)^2\times2^2-(-5)$；

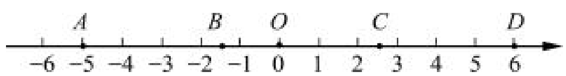
（3）$-1^3-(1+0.5)\times\frac{1}{3}\div(-4)$；（4）$-3-\left(-1-0.2\times\frac{3}{5}\right)\times(-2)$.

17. 下列说法是否正确？为什么？

（1）两个正数中，较大数的倒数反而小；

（2）两个有理数中，较大数的倒数反而小.

18. 如图，数轴上的点 A、B、O、C、D 分别表示 -5、$-1\frac{1}{2}$、0、2.5、6.



（第 18 题）

根据题图，回答下列问题：

（1）C、B 两点间的距离是多少？

（2）B、D 两点间的距离是多少？

（3）A、B 两点间的距离是多少？

19. 某检修小组乘车沿一条东西向公路检修线路，约定向东行驶为正．某天从 A 地出发到收工时，行驶记录(长度单位：km)为：

$+15, -2, +5, -3, +8, -3, -1, +11, +4, -5, -2, +7, -3, +5.$

收工时，检修小组在 A 地的哪一边？距离 A 地多远？

20. 在 $1:50\,000\,000$ 的地图上量得两地间的距离是 1.3 cm，试用科学记数法表示这两地间的实际距离．（实际距离单位：m）

21. 求高为 0.820 m、底面半径为 0.470 m 的圆柱的体积．（精确到 0.01 m^3）

22. 加工一根轴，图纸上注明它的直径是 $\phi 30^{+0.03}_{-0.02}$．其中，$\phi 30$ 表示规定的直径是 30 mm，$+0.03$ 表示合格品的直径最长只能比规定的直径长0.03 mm，-0.02 表示合格品的直径最短只能比规定的直径短0.02 mm．那么合格品的直径最长可为多少？最短可为多少？

C 组

23. 字母 a 取怎样的有理数时，下列关系式成立？

（1）$|a|=a$；　　（2）$|a|>a$；

（3）$|a|=-a$；　　（4）$a>-a$.

24. 回答下列问题：

（1）由 $|m|=|n|$，一定能得到 $m=n$ 吗？请说明理由．

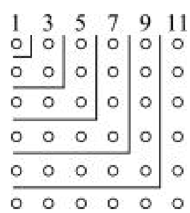
（2）由 $|m|=|n|$，一定能得到 $m^2=n^2$ 吗？请说明理由．

25. 如图，你能由此得出计算规律吗？

$$1+3+5+7+9+11=(\quad)^2.$$

由此猜测：从 1 开始的 n 个连续奇数之和等于多少？

选择 n 的一些值，用计算器计算，验证你的猜想．



（第 25 题）

第 2 章　整式及其加减

如图所示的窗框，上部分为半圆，下部分为 6 个大小一样的长方形，长方形的长与宽的比为 3∶2．如果长方形的长分别为 0.4 m、0.5 m、0.6 m 等，那么窗框所需材料的长度分别是多少？如果长方形的长为 a m 呢？

解决这个问题需要用字母或含有字母的式子表示数和数量关系.

★ 本章将学习代数式，主要研究整式及其加减法，进一步认识含有字母的数学式子，为后续学习打下基础.

2.1 列代数式

1. 用字母表示数

在小学及上一章“有理数”中，我们学习了具体的数与数之间的运算和运算律．例如加法的交换律和结合律，对所有的数的加法都适用．如果只针对具体的数来写这两个运算律，无法穷尽所有的可能．于是我们用了两个等式

$$a + b = b + a, \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

来描述这两个运算律，这里的 a、b、c 可以代表任何数，这样描述的运算律就具有普遍意义了．可见，用字母表示数能够更方便地表示一般规律．

你能用字母表示有理数的其他几个运算律吗?

一般地，用字母表示数，就是用字母代表一个确定的数，或确定范围中的一批数，甚至所有的数．表示数的字母可以作为数的“替身”参与运算，建立数与数之间的关系，表达数及其运算的性质，等等．这样，关于数的结论更加具有普适性，数学的研究和应用也变得更加方便、简洁．

让我们再看几个用字母表示数的例子：

（1）为了测试一种皮球的下落高度与弹起高度之间的关系，通过试验，得到下面一组数据（单位：cm）：

下落高度	40	50	80	100	150
弹起高度	20	25	40	50	75

如果我们用字母 b 表示下落高度的厘米数，那么对应的弹起高度为________ cm．

这里，我们用字母 b 表示下落高度以后，得出表示弹起高度的式子 $\frac{1}{2}b$，反映了这种皮球的下落高度与弹起高度之间的数量关系．

（2）某种大米每千克的售价是 4.8 元，购买这种大米 2 kg、2.5 kg、5 kg、10 kg 各需付款多少元?

购买这种大米 2 kg 需付款 $4.8\times2=9.6$(元)；

购买这种大米 2.5 kg 需付款 $4.8\times2.5=12$(元)；

购买这种大米 5 kg 需付款____________(元)；

购买这种大米 10 kg 需付款____________(元).

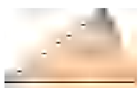
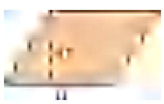
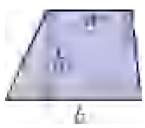
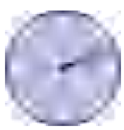
如果购买这种大米 n kg(n 为正数)，那么需付款 $4.8n$ 元.

> 用“$4.8n$”这个式子，可由购买大米的千克数(n)，算出所需的付款数.

（3）我们知道，长方形的面积等于长方形的长与宽的积. 如果用 a、b 分别表示长方形的长和宽，用 S 表示长方形的面积，则有长方形的面积公式：

$$S=ab.$$

我们可以用公式表示一些常见图形的面积，请填写下表：

图形名称	示意图	面 积 公 式
长方形		$S=ab$
正方形		
三角形		
平行四边形		
梯形		
圆		

通过这些例子，我们可以体会到，用字母表示数之后，有些数量之间的关系用含有字母的式子表示，看上去更加简明，更具有普遍意义了．

▶ **例 1** 填空：

（1）某地为了治理荒山，改造环境，在新一轮五年规划期间计划每年植树绿化荒山 n hm²[①]，那么这五年内可以植树绿化荒山________hm²；

（2）每本练习本 m 元，甲买了 5 本，乙买了 2 本，两人一共花了________元，甲比乙多花了________元；

（3）1 500 m 跑步测试，如果某同学跑完全程的成绩是 t s，那么他跑步的平均速度是________m/s．

解 （1）$5n$．

（2）$(5m+2m)$，$(5m-2m)$．

（3）$\dfrac{1\,500}{t}$．

注意

（1）式子中出现的乘号，通常写作“·”或省略不写，如这里的 $5\times n$ 通常写作 $5\cdot n$ 或 $5n$．

（2）数字与字母相乘时，数字通常写在字母前面，如 $5n$ 一般不写作 $n5$．

（3）式子中有加减运算，且后面有单位时，式子要加上括号，如 $(5m+2m)$ 元．

（4）除法运算通常写成分数形式，如 $1\,500\div t(t\neq 0)$ 通常写作 $\dfrac{1\,500}{t}(t\neq 0)$．

这里为什么要标明 $t\neq 0$？

练习

1. 填空：

（1）一打铅笔有 12 支，n 打铅笔有________支；

（2）三角形的三边长分别为 $3a$、$4a$、$5a$，这个三角形的周长为________；

① hm² 是单位“公顷”的符号．

（3）如图，某广场四角均铺上了四分之一圆形的草地，若圆形的半径为 r m，则共有草地_______ m^2.

（第 1(3) 题）

2. 我们知道：

$23 = 2 \times 10 + 3$；

$865 = 8 \times 10^2 + 6 \times 10 + 5$.

类似地，$5\,984 =$ ____ $\times 10^3 +$ ____ $\times 10^2 +$ ____ $\times 10 +$ ____.

一个三位数的个位数字为 a，十位数字为 b，百位数字为 c，这个三位数可表示为______________.

2. 代数式

做一做

填空：

（1）某种瓜子的单价为 16 元/kg，购买 n kg 需________元；

（2）小刚上学的步行速度为 5 km/h，从小刚家到学校的路程为 s km，他步行上学需走________h；

（3）每支钢笔 a 元，每支铅笔 b 元，买 2 支钢笔和 3 支铅笔共需__________元.

试再举出一些用字母表示数的实际例子.

概括　在前面的研究中，出现了一些式子，例如 $a+b$、ab、$4.8n$、$\frac{1}{2}(a+b)h$、$5m-2m$、$\frac{1\,500}{t}$ 等，它们都是由数或表示数的字母用运算符号连接所成的.

像这样，由数或表示数的字母用运算符号连接所成的式子，叫做**代数式**（algebraic expression）. 单独一个数或一个字母也是代数式.

▶ **例 2** 用代数式表示：

（1）长为 a cm、宽为 b cm 的长方形的周长是多少？

（2）开学时爸爸给小强 a 元，小强买文具用去了 b 元（$a>b$），还剩多少元？

（3）某机关单位原有工作人员 m 人，被抽调 20%下基层工作后，留在该机关单位工作的还有多少人？

（4）甲每小时走 a km，乙每小时走 b km，两人同时同地出发反向行走，t h后，他们之间的距离是多少？

解 （1）长方形的周长是它的 4 条边长之和，所以它的周长是 $2(a+b)$ cm.

（2）还剩 $(a-b)$ 元.

（3）下基层工作的人员数是机关单位原有工作人员数的 20%，为 $20\%\cdot m$，即 $\frac{1}{5}m$，所以留在该机关单位工作的还有 $\left(m-\frac{1}{5}m\right)$ 人.

我们也可以这样考虑：该机关单位原有工作人员被抽调 20%下基层工作，那么留在该机关单位工作的人数应是原有总人数的 $(1-20\%)$，所以留在该机关单位工作的还有 $(1-20\%)m$ 人，即 $\frac{4}{5}m$ 人.

> 两个答案都表示留在该机关单位工作的人数，它们应该是相等的. 以后我们能从数学运算的角度认识这个事实.

（4）t h 后，他们之间的距离是 $(at+bt)$ km.

我们也可以这样考虑：1 h 后，甲、乙之间的距离是________km，因此，t h后，他们之间的距离是________km.

练习

1. 填空：

（1）配制 a kg 浓度为 10%的盐水需要盐________kg；

（2）某同学军训期间打靶成绩为 10 环、8 环、8 环、7 环、a 环，则他的平均成绩为__________环；

(3) 甲以 a km/h、乙以 b km/h($a>b$)的速度同时同地出发，同向行走，t h 后他们之间的距离是____________km；

(4) 一枚古币的正面是一个半径为 r cm 的圆形，中间有一个边长为 a cm 的正方形孔，则这枚古币正面的面积为____________.

2. (1) 某种电视机每台定价为 m 元，商店在节日搞促销活动，降价 20%，促销期间每台实际售价多少元？

(2) 将小题(1)的解答与例 2 中小题(3)的解答比较一下，你有什么发现？有什么想法？

(3) 请尝试编制一道与小题(1)的解答类似的题目，与同伴交流.

3. 列代数式

做一做

某地区夏季高山上的气温从山脚处开始每升高 100 m 降低0.6℃. 如果山脚处的气温为 28 ℃，那么比山脚高 300 m 处的气温为____________. 一般地，比山脚高 x m 处的气温为____________.

根据题意可知，比山脚高 300 m 处的气温为 $(28-0.6\times3)$℃，即为 26.2℃. 一般地，比山脚高 x m 处的气温为 $\left(28-\frac{0.6}{100}x\right)$℃.

在解决实际问题时，常常先把问题中有关的数量用代数式表示出来，即列出代数式，使问题变得简洁，更具一般性.

例 3 设某数为 x，用代数式表示：

(1) 比该数的 3 倍大 1 的数；

(2) 该数与它的 $\frac{1}{3}$ 的和；

（3）该数与$\frac{2}{5}$的和的 3 倍；

（4）该数的倒数与 5 的差.

解 （1）$3x+1$.

（2）$x+\frac{1}{3}x$.

（3）$3\left(x+\frac{2}{5}\right)$.

（4）$\frac{1}{x}-5\ (x\neq 0)$.

▶ **例 4** 用代数式表示：

（1）a、b 两数的平方和；

（2）a、b 两数的和的平方；

（3）a、b 两数的和与它们的差的乘积；

（4）所有偶数，所有奇数.

解 （1）a^2+b^2.

（2）$(a+b)^2$.

（3）$(a+b)(a-b)$.

（4）偶数是 2 的整数倍，奇数是 2 的整数倍加 1．所以，所有偶数和所有奇数可分别表示为：$2n$（n 为整数），$2n+1$（n 为整数）.

练习

1. 用代数式表示：

（1）a 与 b 的差的 2 倍； （2）a 与 b 的 2 倍的差；

（3）a 与 b、c 两数和的差； （4）a、b 两数的差与 c 的和.

2. 填空：

（1）三个连续整数，如果中间一个整数是 n，那么第一个整数和第三个整数分别是________、________；

（2）三个连续偶数，如果中间一个偶数是 $2n$，那么它前一个偶数和后一个偶数分别是________、________.

习题2.1

A 组

1. 设 a、b、c 均为有理数，根据相应的运算律填空：

（1）$(a+b)+c=$ ____________（加法结合律）；

（2）$(ab)c=$ ____________（乘法结合律）；

（3）$a(b+c)=$ ____________（分配律）.

2. 有一根弹簧原长 10 cm，挂重物后，它的长度会伸长，请根据下面表格中的一些数据填空：

所挂重物质量/g	1	2	3	…	n
弹簧伸长量/cm	0.5	1	1.5	…	
弹簧总长度/cm	10.5	11	11.5	…	

3. 用代数式填空：

（1）七年级全体学生参加某项国防教育活动，一共分成 n 个排，每个排 3 个班，每个班 10 人，则七年级一共有________名学生；

（2）某班有少先队员 m 名，分成两个小队，第一小队有 12 名，则第二小队有________名；

（3）在一次募捐活动中，某班 35 名学生共捐款 n 元，则平均每名学生捐款________元；

（4）某班学生总数为 x，其中男生人数占学生总数的$\frac{2}{5}$，则男生人数为________，女生人数为________；

（5）一批零件共有 m 个，乙先加工 n 个零件后（$m>n$），余下的任务由甲再做 5 天完成，则甲平均每天加工的零件数是________；

（6）巧克力糖每千克 a 元，奶油糖每千克 b 元，用 6 kg 巧克力糖和 4 kg 奶油糖混合成 10 kg 混合糖，则这样得到的混合糖每千克的平均价格为________元；

（7）某种商品 n kg 的售价为 m 元，则这种商品 8 kg 的售价为________元；

（8）某车间有 m 个工人，计划 n 天做 s 个零件，则平均每个工人一天要做________个零件.

4. 用代数式表示：

（1）a 的 3 倍与 b 的一半的和；

（2）a 与 b 的差的倒数$(a \neq b)$；

（3）a 与 b 两数的平方和加上它们积的两倍；

（4）a 与 b 两数和的平方减去它们差的平方.

5. 用代数式表示：

（1）底面半径为 r、高为 h 的圆锥的体积；

（2）长、宽、高分别为 a、b、c 的长方体的表面积和体积；

（3）底面是边长为 a cm 的正方形、体积为 V cm^3 的长方体的高.

B 组

6. 试引进字母，用适当的代数式表示：

（1）能被 3 整除的整数；

（2）除以 3 余数是 2 的整数.

7. 将两个长、宽、高分别为 a、b、c 的长方体拼成一个大长方体，求拼成的大长方体的体积和表面积.

8. 已知数轴上的点 A、B 所表示的数分别为 a、b，用含 a、b 的代数式表示：

（1）A、B 两点间的距离；

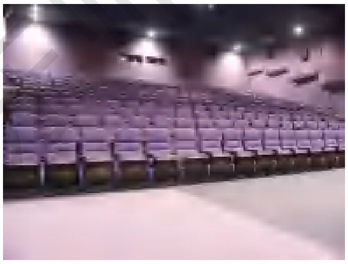
（2）到点 A、B 的距离相等的点所表示的数.

2.2 代数式的值

问题 某礼堂第 1 排有 18 个座位，往后每排比前一排多 2 个座位. 问：

（1）第 n 排有多少个座位？（用含 n 的代数式表示）

（2）第 10 排、第 15 排、第 23 排分别有多少个座位？



探索 （1）第 2 排比第 1 排多 2 个座位，它的座位数应为 $18+2=20$；

第 3 排比第 2 排多 2 个座位，它的座位数应为 $20+2=22$.

也可以这样考虑：

第 3 排是第 1 排的后 2 排，它的座位数应比第 1 排多 2×2，即为 $18+2\times 2=22$；

类似地，第 4 排是第 1 排的后 3 排，它的座位数应比第 1 排多 2×3，即为 $18+2\times 3=24$；

……

一般地，第 n 排是第 1 排的后 $(n-1)$ 排，它的座位数应比第 1 排多 $2(n-1)$，即为 $18+2(n-1)$.

（2）当 $n=10$ 时，$18+2(n-1)=18+2\times 9=36$；

当 $n=15$ 时，$18+2(n-1)=18+2\times 14=46$；

当 $n=23$ 时，$18+2(n-1)=18+2\times 22=62$.

因此，第 10 排、第 15 排、第 23 排分别有 36 个、46 个、62 个座位.

先考察特例：计算第 2 排、第 3 排、第 4 排的座位数，从中发现规律，再求出第 n 排的座位数.

由一般到特殊，即将 n 的特定值代入得到的代数式，计算出特定各排的座位数.

概括 我们看到，当 n 取不同数值时，代数式 $18+2(n-1)$ 的计算结果不同. 以上结果可以说：当 $n=10$ 时，代数式 $18+2(n-1)$ 的值是 36；当 $n=15$ 时，代数式 $18+2(n-1)$ 的值是 46；等等.

一般地，用数值代替代数式里的字母，按照代数式中的运算计算得出的结果，叫做**代数式的值**(value of algebraic expression).

▶ **例 1** 当 $a=2$，$b=-1$，$c=-3$ 时，求下列各代数式的值：

（1）b^2-4ac； （2）$(a+b+c)^2$.

解 （1）当 $a=2$，$b=-1$，$c=-3$ 时，

$$\begin{aligned} b^2-4ac &= (-1)^2-4\times 2\times(-3)\\ &= 1+24\\ &= 25. \end{aligned}$$

（2）当 $a=2$，$b=-1$，$c=-3$ 时，

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=(2-1-3)^2\\&=(-2)^2\\&=4.\end{aligned}$$

▶ **例 2** 某地积极响应党中央号召，大力推进美丽中国建设工程，去年的投资为 a 亿元，今年的投资比去年增长了 10%．如果明年的投资还能按这个速度增长，请你预测一下，该地明年的投资将达到多少亿元？如果去年的投资为 2 亿元，那么预计明年的投资是多少亿元？

解 由题意可得，今年的投资为 $a\cdot(1+10\%)$ 亿元，于是明年的投资将达到

$$a\cdot(1+10\%)\cdot(1+10\%)=1.21a(\text{亿元}).$$

如果去年的投资为 2 亿元，即 $a=2$，那么当 $a=2$ 时，

$$1.21a=1.21\times 2=2.42(\text{亿元}).$$

答：该地明年的投资将达到 $1.21a$ 亿元．如果去年的投资为 2 亿元，那么预计明年的投资是 2.42 亿元．

练习

1. 填表：

x	2	-2	$\frac{1}{2}$		
$2x$				6	
$\frac{1}{x}$					$\frac{1}{4}$
x^2					

2. 根据下列各组 x、y 的值，分别求出代数式 $x^2+2xy+y^2$ 和 $x^2-2xy+y^2$ 的值：

(1) $x=2$，$y=3$；

(2) $x=-2$，$y=-4$.

3. 已知梯形的上底 $a=2\,\text{cm}$，下底 $b=4\,\text{cm}$，高 $h=3\,\text{cm}$，利用梯形的面积公式求这个梯形的面积.

阅读材料

有趣的“$3x+1$”问题

现有两个代数式：

$$3x+1, \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}x. \qquad ②$$

如果随意给出一个正整数 x，我们可以根据代数式①或②求出一个对应值.

我们约定一个规则：若正整数 x 为奇数，我们就根据①求对应值；若正整数 x 为偶数，我们就根据②求对应值. 例如，取正整数 x 为 18，它是偶数，则应由②求得对应值为 9；而 9 是奇数，应由①求得对应值为 28；同样，28 是偶数，对应值为 14……我们感兴趣的是，从某一个正整数出发，不断地这样对应下去，会是一个什么样的结果呢？也许这是一个非常吸引人的数学游戏.

下面我们以正整数 18 为例，不断地做下去，如图 1 所示，最后竟出现了一个循环：4，2，1，4，2，1，… .

$$18\to9\to28\to14\to7\to22\to11\to34\to17\to52\to26\to13\to40\to20\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1\to4$$

图 1

再取一个正整数试试看．比如取 x 为 21，如图 2 所示，最后结果仍是一个同样的循环．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 21 \arrow[r] & 64 \arrow[r] & 32 \arrow[r] & 16 \arrow[r] & 8 \arrow[r] & 4 \arrow[rr] & & 2 \arrow[dl] \\ & & & & & & 1 \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

图 2

大家可以再随意取一些正整数试一试，结果一定同样奇妙——最后总是落入 4、2、1 循环的“黑洞”．是不是从所有的正整数出发，都落入 4、2、1 循环的“黑洞”而无一例外呢？这就是“$3x+1$”问题，在中国和日本常称之为“角谷问题”，关于其成立的猜想叫做角谷猜想，这是因为日本数学家角谷静夫(Shizuo Kakutani)对此做过研究．西方把这个猜想叫做科拉兹猜想(Collatz Conjecture)．

“$3x+1$”问题或角谷猜想通俗易懂，所以引起很多人(包括很多非数学家)的兴趣并参与其中．有人动用计算机，试遍了从 1 到 7×10^{11} 的所有整数，结果都成立．一些网络计算机平台也把“$3x+1$”问题的验证列为自由参与的研究项目．例如，美国加州伯克利开放式网络计算平台 BOINC 就曾有一个项目“3x + 1@home”，此项目于 2008 年停止后，又有平台开放了“Collatz Conjecture”项目．大量的验证都没有找到反例．

验证不可能把所有的正整数穷尽，角谷猜想成立需要一个数学证明！事实上，国内外都有人宣称证明了角谷猜想，但他们的证明都还没有获得数学界的确认．看来，“$3x+1$”问题的解决似乎还有一段不短的路要走．

习题2.2

A 组

1. 华氏温度(°F)与摄氏温度(°C)之间的转换关系为：

$$\text{华氏度数}=\text{摄氏度数}\times\frac{9}{5}+32.$$

（1）当摄氏度数为 x 时，华氏度数为____________；

（2）当摄氏度数为 20 时，华氏度数为____________.

2. 当 $a=\frac{1}{2}$，$b=2$ 时，求下列代数式的值：

（1）$(a+b)^2-(a-b)^2$；

（2）$a^2+2ab+b^2$.

3. 当 $a+b=3$ 时，求下列代数式的值：

（1）$(a+b+1)^2$；

（2）$(a+b)^2-2(a+b)+1$.

4. 如图所示，路障锥筒的上部分可近似看作一个圆锥．若该圆锥的底面直径 $d=20$ cm，高 $h=60$ cm，利用圆锥的体积公式求这个圆锥的体积．（π 取 3.14）

（第 4 题）

5. 某学校数学学期成绩的计算方法是：

平时成绩 × 40% + 期中成绩 × 30% + 期末成绩 × 30%.

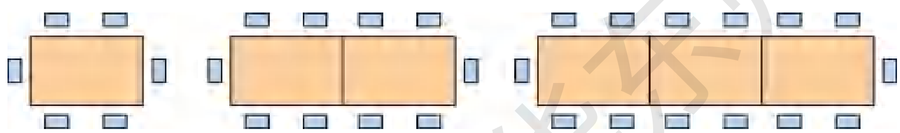
甲、乙两名学生的数学平时成绩、期中成绩和期末成绩如下表：

	平时成绩	期中成绩	期末成绩
甲	95	96	99
乙	96	98	97

则甲、乙两名学生的数学学期成绩谁更高？

B 组

6. 按如图所示的方式摆放餐桌和餐椅．



（第 6 题）

（1）n 张餐桌可以摆放多少把餐椅？

（2）8 张餐桌可以摆放多少把餐椅？10 张呢？15 张呢？

7. 如图，在某月的月历中，用一个“ + ”形框出 5 个数，设这 5 个数中最小的数为 a.

一	二	三	四	五	六	日
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

（第 7 题）

（1）框出的 5 个数中最大的数为________，框出的 5 个数的和为________.

（2）若 $a = 17$，则框出的 5 个数中最大的数为多少？框出的 5 个数的和为多少？

8. 有一组数：a，$2a$，$4a$，$8a$，…，其中从第二个数开始，每个数都是它前面那个数的 2 倍.

（1）第 $n(n \geqslant 2)$ 个数为多少？　　（2）若 $a = 4$，则第 9 个数为多少？

2.3　整　式

1．单项式

回忆　列代数式：

（1）若正方形的边长为 a，则这个正方形的面积为________；

（2）若三角形的一边长为 a，这边上的高为 h，则这个三角形的面积为________；

（3）若 m 表示一个有理数，则它的相反数是________；

（4）小馨每月从零花钱中拿出 x 元钱捐给希望工程，一年下来小馨共捐款________元.

列出的这些代数式有什么共同特点？

概括 上面所列出的代数式都是由数与字母的乘积组成的．像这样，由数与字母的乘积组成的代数式叫做**单项式**(monomial)．例如，a^2、$\frac{1}{2}ah$、$-m$ 等都是单项式．单独一个数或一个字母也是单项式.

单项式中的数因数叫做这个单项式的**系数**(coefficient)．例如，$\frac{1}{2}ah$ 的系数是$\frac{1}{2}$．特别地，因为 $a^2=1\cdot a^2$，$-m=(-1)\cdot m$，所以 a^2 的系数是 1，$-m$ 的系数是 -1.

一个单项式中，所有字母的指数的和叫做这个单项式的**次数**(degree)．例如，$\frac{1}{2}ah$ 的次数是 2，$\frac{5}{4}x^2yz$ 的次数是 4，$-m$ 的次数是 1.

注意 (1) 当一个单项式的系数是 1 或 -1 时，“1”通常省略不写，例如上面所说的 a^2 和 $-m$.

(2) 单项式的系数是带分数时，通常写成假分数的形式，例如$\frac{5}{4}x^2y$ 不要写成 $1\frac{1}{4}x^2y$.

▶ **例 1** 判断下列各代数式是不是单项式，如果不是，请说明理由；如果是，请指出它们的系数和次数：

(1) $x+1$；

(2) $-\frac{3}{2}a^2b$.

解 (1) $x+1$ 不是单项式，因为代数式中出现了加法运算.

(2) $-\frac{3}{2}a^2b$ 是单项式，它的系数是 $-\frac{3}{2}$，次数是 3.

练习

1. 判断下列代数式是不是单项式：

（1）a；（2）$-\frac{1}{2}$；（3）$x+\frac{1}{2}$；（4）$\frac{x}{3}$；（5）xy.

2. 说出下列单项式的系数和次数：

（1）$5a^2$；（2）mn；（3）$-\frac{7}{2}ab^2c$；（4）$-\frac{2x^2y}{3}$.

3. 判断下列说法是否正确，如果不正确，请说明理由：

（1）单项式 m 既没有系数，也没有次数；

（2）单项式 5×10^5t 的系数是 5 .

2. 多项式

回忆　列代数式：

（1）若三角形的三条边长分别为 a、b、c，则这个三角形的周长为________；

（2）某班有男生 x 人，女生 21 人，这个班的学生一共有________人；

（3）图 2.3.1 中阴影部分的面积为________.

列出的这些代数式有什么共同特点?

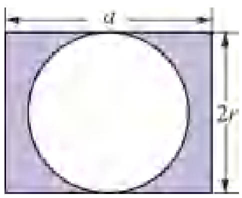


图2.3.1

概括　上面列出的代数式都是由几个单项式相加而成的．几个单项式的和叫做**多项式**（polynomial）．其中，每个单项式叫做多项式的**项**（term），不含字母的项叫做**常数项**（constant term）．例如，多项式 $3x^2-2x+5$ 有三项，它们是 $3x^2$、$-2x$、5，其中 5 是常数项．

一个多项式含有几项，就叫做几项式，特别地，只含有一项就是单项式．多项式中，次数最高项的次数，就是这个多项式的次数．例如，多项式 $3x^2-2x+5$ 是一个二次三项式．

例 2 指出下列多项式的项和次数：

(1) $a^3-a^2b+ab^2-b^3$；

(2) $3n^4-2n^2+1$．

解 (1) 多项式 $a^3-a^2b+ab^2-b^3$ 的项有 a^3、$-a^2b$、ab^2、$-b^3$，次数是 3．

(2) 多项式 $3n^4-2n^2+1$ 的项有 $3n^4$、$-2n^2$、1，次数是 4．

注意：多项式的每一项都包括它的正负号．

例 3 指出下列多项式是几次几项式：

(1) x^3-x+1；

(2) $x^3-2x^2y^2+3y^2$．

解 (1) x^3-x+1 是三次三项式．

(2) $x^3-2x^2y^2+3y^2$ 是四次三项式．

单项式与多项式统称为**整式**(integral expression)．

练习

指出下列多项式是几次几项式：

(1) $2x+1+3x^2$；

(2) $4x^4+1$；

(3) $2x^2-3xy+y^2$；

(4) $4x^3+2x-3y^2$．

3. 升幂排列和降幂排列

试一试

运用加法交换律，可以任意交换多项式各项的位置. 将多项式 x^2+x+1 中各项的位置交换，可以得到哪些不同的排列方式？在众多的排列方式中，你认为哪几种比较整齐？

概括

在众多的排列方式中，像 x^2+x+1 和 $1+x+x^2$ 这样的排列方式比较整齐.

这两种排列方式有什么特点？

这两种排列方式有一个共同特点，即它们的各项是按字母 x 的指数从大到小(或从小到大)的顺序排列的. 这样整齐的写法除了美观之外，还会为计算带来方便.

把一个多项式的各项按某一个字母的指数从大到小的顺序排列，叫做把这个多项式按这个字母的**降幂排列**. 把一个多项式的各项按某一个字母的指数从小到大的顺序排列，叫做把这个多项式按这个字母的**升幂排列**.

例如，多项式 x^2+x+1 是按 x 的降幂排列，$1+x+x^2$ 是按 x 的升幂排列.

又如，多项式 $5x^2+3x-2x^3-1$，按 x 的降幂排列是 $-2x^3+5x^2+3x-1$；按 x 的升幂排列是 $-1+3x+5x^2-2x^3$.

▶ **例 4** 把多项式 $2r-1+\frac{4}{3}r^3-r^2$ 按 r 的升幂排列.

解 按 r 的升幂排列为：

$$-1+2r-r^2+\frac{4}{3}r^3.$$

▶ **例 5** 把多项式 $a^3+b^2-3a^2b-3ab^3$ 重新排列：

(1) 按 a 的升幂排列；

（2）按 a 的降幂排列.

解 （1）按 a 的升幂排列为：

$$b^2-3ab^3-3a^2b+a^3.$$

（2）按 a 的降幂排列为：

$$a^3-3a^2b-3ab^3+b^2.$$

试试看，将这个多项式按 b 的升幂（或降幂）排列.

注意 （1）重新排列多项式时，每一项一定要连同它的正负号一起移动.

（2）含有两个或两个以上字母的多项式，通常按其中某一个字母的升幂或降幂排列.

练习

1. 把多项式 $2x^2+\frac{2}{5}x^3+x-5x^4-\frac{1}{3}$ 重新排列：

（1）按 x 的升幂排列；（2）按 x 的降幂排列.

2. 把多项式 $x^4-y^4+3x^3y-2xy^2-5x^2y^3$ 重新排列：

（1）按 x 的降幂排列；（2）按 y 的降幂排列.

习题2.3

A 组

1. 填表：

单项式	a	$-x$	$-0.25ax^2$	$\frac{1}{2}abc$	$-\frac{a^2b^3}{3}$
系　数					
次　数					

2. 指出下列多项式是几次几项式：

(1) $4a^2+3a-1$； (2) $3a-2ab+4b$.

3. 指出下列多项式的项和次数：

(1) $\frac{2}{3}xy-\frac{1}{4}$； (2) $a^2+2a^2b+ab^2-b^2$； (3) $2m^3n^3-3m^2n^2+\frac{5}{3}mn$.

4. 把多项式 $\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{3}-3x+\frac{1}{2}x^3$ 按 x 的升幂排列.

B 组

5. 写出一个所含字母为 x、y，并且次数为 5 的单项式.

6. 把多项式 $2x^3y-4y^2+5x^2$ 重新排列：

(1) 按 x 的降幂排列；

(2) 按 y 的升幂排列.

7. 写出一个同时满足下列条件的二次三项式：

①只含有字母 a 和 b；②每一项的次数都是 2；③按字母 a 的降幂排列.

2.4 整式的加减

1. 同类项

我们常常把具有相同特征的事物归为一类．在多项式的各个项中，也可以把具有某些相同特征的项归为一类．例如，多项式 $3x^2y-4xy^2-3+5x^2y+2xy^2+5$，它有 6 项，分别是

$$3x^2y,\quad -4xy^2,\quad -3,\quad 5x^2y,\quad 2xy^2,\quad 5.$$

在这 6 项中，可以把 $3x^2y$ 与 $5x^2y$ 归为一类，$-4xy^2$ 与 $2xy^2$ 归为一类，-3 与 5 归为一类.

这些被归为同一类的项有什么相同特征？

概括　$3x^2y$ 与 $5x^2y$ 所含的字母相同（都是 x、y），并且 x 的指数都是 2，y 的指数都是 1；同样，$-4xy^2$ 与 $2xy^2$ 所含的字母也相同，并且 x 的指数都是 1，y 的指数都是 2.

像这样，所含字母相同，并且相同字母的指数都相等的项叫做**同类项**（similar terms）.

所有的常数项都是同类项．例如，上述多项式中的 -3 与 5 也是同类项.

▶ **例 1**　指出下列多项式中的同类项：

（1）$3x-2y+1+3y-2x-5$；

（2）$3x^2y-2xy^2+\frac{1}{3}xy^2-\frac{3}{2}x^2y$.

解　（1）$3x$ 与 $-2x$ 是同类项，$-2y$ 与 $3y$ 是同类项，1 与 -5 是同类项.

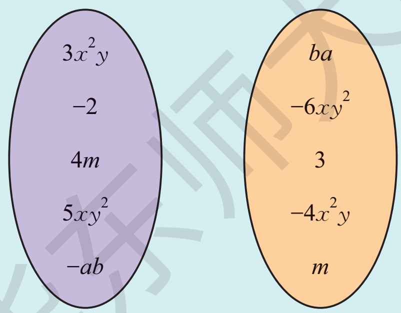
（2）$3x^2y$ 与 $-\frac{3}{2}x^2y$ 是同类项，$-2xy^2$ 与 $\frac{1}{3}xy^2$ 是同类项.

▶ **例 2**　k 取何值时，$3x^ky$ 与 $-x^2y$ 是同类项？

解　要使 $3x^ky$ 与 $-x^2y$ 是同类项，那么这两项中 x 的指数必须相等，即 $k=2$．所以当 $k=2$ 时，$3x^ky$ 与 $-x^2y$ 是同类项.

练习

1. 将如图所示的两个圈中的同类项用线连起来.
2. 写出 $3ab^2c^3$ 的一个同类项．你能写出多少个？
3. k 取何值时，$-3x^2y^k$ 与 $4x^2y^6$ 是同类项？



（第 1 题）

2. 合并同类项

如果一个多项式中含有同类项，那么我们可以把同类项合并起来，使结果得以简化.

例如，可将同类项 $3x^2y$ 与 $5x^2y$ 合并，根据分配律，有

$$3x^2y + 5x^2y = (3+5)x^2y = 8x^2y.$$

对多项式 $3x^2y - 4xy^2 - 3 + 5x^2y + 2xy^2 + 5$，我们可以先运用加法的交换律和结合律将同类项组合在一起，再根据分配律将它们合并：

$$\begin{aligned}
&\underline{3x^2y} - \underline{4xy^2} - 3 + \underline{5x^2y} + \underline{2xy^2} + 5 \\
&= 3x^2y + 5x^2y - 4xy^2 + 2xy^2 - 3 + 5 \\
&= (3x^2y + 5x^2y) + (-4xy^2 + 2xy^2) + (-3+5) \\
&= (3+5)x^2y + (-4+2)xy^2 + (-3+5) \\
&= 8x^2y - 2xy^2 + 2.
\end{aligned}$$

用记号标出各同类项，便于合并.

概括

合并同类项的法则：

把同类项的系数相加，所得的结果作为和的系数，字母和字母的指数保持不变.

▶ **例 3** 合并下列多项式中的同类项：

(1) $2a^2b - 3a^2b + \frac{1}{2}a^2b$；

(2) $a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$.

解 (1) $2a^2b - 3a^2b + \frac{1}{2}a^2b$

$$= \left(2 - 3 + \frac{1}{2}\right)a^2b$$

$$= -\frac{1}{2}a^2b.$$

(2) $a^3 \underline{-a^2b} \underline{\underline{+ab^2}} \underline{+a^2b} \underline{\underline{-ab^2}} + b^3$

$= a^3 + (-a^2b + a^2b) + (ab^2 - ab^2) + b^3$

$= a^3 + (-1+1)a^2b + (1-1)ab^2 + b^3$

$= a^3 + b^3$.

▶ **例 4** 求多项式 $3x^2+4x-2x^2-x+x^2-3x-1$ 的值，其中 $x=-3$.

解 $3x^2+4x-2x^2-x+x^2-3x-1$

$=(3-2+1)x^2+(4-1-3)x-1$

$=2x^2-1$.

当 $x=-3$ 时，原式 $=2\times(-3)^2-1=17$.

试一试，把 $x=-3$ 直接代入多项式求值．比较一下，哪个解法更简便？

先合并同类项，将多项式化简，再求值，比较简便．

我们回到本章导图中提出的问题：

▶ **例 5** 如图 2.4.1 所示的窗框，上部分为半圆，下部分为 6 个大小一样的长方形，长方形的长与宽的比为 3∶2．如果长方形的长分别为 0.4 m、0.5 m、0.6 m 等，那么窗框所需材料的长度分别是多少？如果长方形的长为 a m 呢？


图2.4.1

解 我们不妨先解答最后一问，即：如果长方形的长为 a m，求窗框所需材料的长度．

如果长方形的长为 a m，那么它的宽为 $\frac{2}{3}a$ m．由图 2.4.1 不难知道，窗框所需材料的长度为

$$9a+9\times\frac{2}{3}a+\pi a$$
$$=(9+6+\pi)a$$
$$=(15+\pi)a\text{(m)}.$$

要解答第一问，只需分别将 $a=0.4$、 0.5、 0.6 等代入上式求值即可.

例如当长方形的长为 0.4 m 时，求窗框所需材料的长度(要求精确到 0.1 m，π 取 3.14)，有

$$\begin{aligned}&(15+\pi)a\\ \approx\ &(15+3.14)\times 0.4\\ =\ &18.14\times 0.4\\ =\ &7.256\\ \approx\ &7.3(\mathrm{m}).\end{aligned}$$

所以，当长方形的长为 0.4 m 时，窗框所需材料的长度约为 7.3 m.

请同学们自己计算：当长方形的长分别为 0.5 m、0.6 m 时，窗框所需材料的长度.

练习

1. 如果两个同类项的系数互为相反数，那么合并同类项后，结果是________.

2. 先标出下列各多项式中的同类项，再合并同类项：

(1) $3x-2x^2+5+3x^2-2x-5$;

(2) $a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$;

(3) $6a^2-5b^2+2ab+5b^2-6a^2$.

3. 求下列多项式的值：

(1) $7x^2-3x^2-2x-2x^2+5+6x$，其中 $x=-2$;

(2) $5a-2b+3b-4a-1$，其中 $a=-1$， $b=2$;

(3) $2x^2-3xy+y^2-2xy-2x^2+5xy-2y+1$，其中 $x=\dfrac{22}{7}$， $y=-1$.

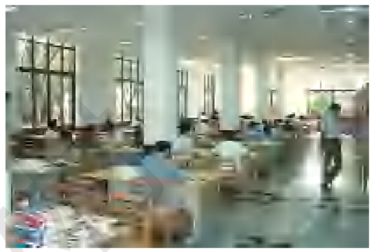
3. 去括号和添括号

在第 1 章中，我们学过有理数的加法结合律：

$$a+(b+c)=a+b+c. \qquad ①$$

对于等式①，我们可以结合下面的实例来理解：

周三下午，校图书馆内起初有 a 位同学．后来又有一些同学前来阅读，第一批来了 b 位同学，第二批又来了 c 位同学，则图书馆内共有__________位同学．我们还可以这样理解：后来两批一共来了__________位同学，因而图书馆内共有__________位同学．由于__________和__________均表示同一个量，于是，我们便可以得到等式①．



做一做

图书馆内原有 a 位同学．后来有些同学因上课要离开，第一批走了 b 位同学，第二批又走了 c 位同学．试用两种方式写出图书馆内还剩下的同学数，你能从中发现什么关系？

从上面“做一做”所得到的结果中，我们发现：

$$a-(b+c)=a-b-c. \qquad ②$$

观察①②两个等式中括号和各项正负号的变化，你能发现什么规律？

括号没了，正负号没变

（1）$a+(b+c)=a+b+c$．

去括号后，括号内各项的正负号有什么变化？

括号没了，正负号却变了

(2) $a-(b+c)=a-b-c$.

通过观察与分析，可以得到去括号法则：

括号前面是“+”号，把括号和它前面的“+”号去掉，括号里各项都不改变正负号；

括号前面是“-”号，把括号和它前面的“-”号去掉，括号里各项都改变正负号.

▶ **例 6** 去括号：

(1) $a+(b-c)$；　　(2) $a-(b-c)$；

(3) $a+(-b+c)$；　　(4) $a-(-b-c)$.

解 (1) $a+(b-c)=a+b-c$.

(2) $a-(b-c)=a-b+c$.

(3) $a+(-b+c)=a-b+c$.

(4) $a-(-b-c)=a+b+c$.

▶ **例 7** 先去括号，再合并同类项：

(1) $(x+y-z)+(x-y+z)-(x-y-z)$；

(2) $(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$；

(3) $3(2x^2-y^2)-2(3y^2-2x^2)$.

解 (1) $(x+y-z)+(x-y+z)-(x-y-z)$

$=x+y-z+x-y+z-x+y+z$

$=x+y+z$.

(2) $(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$

$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$

$=4ab$.

(3) $3(2x^2-y^2)-2(3y^2-2x^2)$

$=6x^2-3y^2-6y^2+4x^2$

$=10x^2-9y^2$.

练习

1. 去括号：

(1) $(a-b)+(-c-d)$；

(2) $(a-b)-(-c-d)$；

(3) $-(a-b)+(-c-d)$；

(4) $-(a-b)-(-c-d)$.

2. 判断下列去括号是否正确，如果不正确，请说明错在哪里，并加以改正：

(1) $a-(b-c)=a-b-c$；

(2) $-(a-b+c)=-a+b-c$；

(3) $c+2(a-b)=c+2a-b$.

3. 化简：

(1) $a^2-2(ab-b^2)-b^2$；

(2) $(x^2-y^2)-3(2x^2-3y^2)$；

(3) $7a^2b-(-4a^2b+5ab^2)-2(2a^2b-3ab^2)$.

分别把前面去括号的①②两个等式中等号的两边对调，并观察对调后两个等式中括号和各项正负号的变化，你能得出什么结论？

正负号均不变

(1) $a+b+c=a+(b+c)$.

正负号均改变

(2) $a-b-c=a-(b+c)$.

随着括号的添加，括号内各项的正负号有什么变化？

通过观察与分析，可以得到添括号法则：

所添括号前面是“+”号，括到括号里的各项都不改变正负号；

所添括号前面是“−”号，括到括号里的各项都改变正负号.

做一做

在括号内填入适当的项：

(1) $x^2 - x + 1 = x^2 - (\qquad\qquad)$；

(2) $2x^2 - 3x - 1 = 2x^2 + (\qquad\qquad)$；

(3) $(a - b) - (c - d) = a - (\qquad\qquad)$.

例 8 计算：

(1) $214a + 47a + 53a$；

(2) $214a - 39a - 61a$.

解 (1) $214a + 47a + 53a$

$= 214a + (47a + 53a)$

$= 214a + 100a$

$= 314a$.

(2) $214a - 39a - 61a$

$= 214a - (39a + 61a)$

$= 214a - 100a$

$= 114a$.

适当添加括号，可使计算简便。

注意 添括号与去括号的过程正好相反，添括号是否正确，不妨通过去括号检验一下.

练习

1. 计算：

(1) $117x + 138x - 38x$；　(2) $125x - 64x - 36x$；　(3) $136x - 87x + 57x$.

2. 在下列各式的括号内填入适当的项：

(1) $3x^2 - 2xy^2 + 2y^2 = 3x^2 - (\qquad\qquad)$；

(2) $3x^2y^2 - 2x^3 + y^3 = 3x^2y^2 - (\qquad\qquad)$；

(3) $-a^3 + 2a^2 - a + 1 = -(\qquad\qquad) - (\qquad\qquad)$.

4. 整式的加减

做一做

某中学合唱团出场时第 1 排站了 n 位同学，从第 2 排起每排都比前一排多 1 位同学，一共站了 4 排，则该合唱团一共有________位同学参加演唱.

容易知道，第 2、3、4 排的人数分别为 $n+1$、$n+2$、$n+3$. 因此该合唱团参加演唱的总人数为

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3).$$

要把这个式子进一步化简，实际上是要进行整式的加减运算.

怎样进行整式的加减运算呢？

思考 在解本节的例 7 时，我们所做的实质上就是整式的加减运算. 结合已有的知识和经验，你能总结出整式加减运算的一般步骤吗？

概括 去括号和合并同类项是整式加减的基础. 整式加减运算的一般步骤是：

先去括号，再合并同类项.

例 9 求整式 x^2-7x-2 与 $-2x^2+4x-1$ 的差.

解 $(x^2-7x-2)-(-2x^2+4x-1)$

$=x^2-7x-2+2x^2-4x+1$

$=3x^2-11x-1.$

例 10 计算：$-2y^3+(3xy^2-x^2y)-2(xy^2-y^3)$.

解
$$-2y^3+(3xy^2-x^2y)-2(xy^2-y^3)$$
$$=-2y^3+3xy^2-x^2y-2xy^2+2y^3$$
$$=xy^2-x^2y.$$

例 11 先化简，再求值：$2x^2y-3xy^2+4x^2y-5xy^2$，其中$x=1$，$y=-1$.

解
$$2x^2y-3xy^2+4x^2y-5xy^2$$
$$=(2x^2y+4x^2y)-(3xy^2+5xy^2)$$
$$=6x^2y-8xy^2.$$

当 $x=1$，$y=-1$ 时，

原式 $=6\times1^2\times(-1)-8\times1\times(-1)^2=-14$.

例 12 设 $\overline{abcd}$ 是一个四位数，如果 $a+b+c+d$ 可以被 3 整除，那么这个数可以被 3 整除．为什么？

解
$$\overline{abcd}=1\,000a+100b+10c+d$$
$$=(999a+99b+9c)+(a+b+c+d).$$

显然 $999a+99b+9c$ 能被 3 整除.

因此，如果 $a+b+c+d$ 能被 3 整除，那么 $\overline{abcd}$ 就能被 3 整除.

我们看到，用字母表示数，通过数与式的运算，还可以进行简单的代数推理，说明一些数学结论的道理.

练习

1. 填空：

(1) $3x-(-2x)=$ ________；

(2) $-2x^2-3x^2=$ ________；

(3) $-4xy-(-2xy)=$ ________.

2. 计算：

(1) $2x^2y^3+(-4x^2y^3)-(-3x^2y^3)$；

(2) $(3x^2+x-5)-(4-x+7x^2)$；

(3) $(8xy-3y^2)-5xy-2(3xy-2x^2)$.

3. 先化简，再求值：

(1) $2a^2-b^2+(2b^2-a^2)-(a^2+2b^2)$，其中 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=3$；

(2) $5(3x^2y-xy^2)-(xy^2+3x^2y)$，其中 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=-1$.

阅读材料

用分离系数法进行整式的加减运算

我们已经学过整式的加减，知道整式的加减可以归结为合并同类项．而合并同类项实际上就是“合并”各同类项的系数．因此，进行整式的加减，关键就是把各同类项的系数进行加减．

如果把两个整式的各同类项对齐，我们就可以像小学时列竖式做加减法一样，来进行整式的加减运算了．

怎样把各同类项对齐呢？其实，只要将参与运算的整式按同一个字母进行降幂排列，凡缺项则留出空位或添零，然后让常数项对齐(即右对齐)即可．例如，计算

$$(x^3-2x^2-5)+(x-2x^2-1)$$

及

$$(x^3-2x^2-5)-(x-2x^2-1)$$

时，我们可以分别用下列竖式计算：

$$\begin{array}{rrrrr} & x^3 & -\,2x^2 & & -\,5 \\ +) & & -\,2x^2 & +\,x & -\,1 \\ \hline & x^3 & -\,4x^2 & +\,x & -\,6 \end{array},\qquad \begin{array}{rrrrr} & x^3 & -\,2x^2 & & -\,5 \\ -) & & -\,2x^2 & +\,x & -\,1 \\ \hline & x^3 & & -\,x & -\,4 \end{array}.$$

我们发现，参与加减运算的整式都按同一个字母的降幂排列后，各项排列的位置对应该项字母的指数．基于这个事实，我们可以不再写出字母及其指数，只需写出系数，计算出结果后，再把字母和相应的指数补充上去，从而使演算过程简化．这种方法叫做**分离系数法**．

按分离系数法，上面第一道题的演算过程可以简化为：

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & -2 & +0 & -5 \\ +) & & -2 & +1 & -1 \\ \hline & 1 & -4 & +1 & -6 \end{array},$$

所以 $(x^3-2x^2-5)+(x-2x^2-1)=x^3-4x^2+x-6$．

第二道题也可以如此简化．

现在让我们一起尝试用上面的方法解决下列计算问题：

(1) $(2x^2-x-3)+(5-4x+x^2)$；

(2) $(3y^3-5y^2-6)-(y-2+3y^2)$．

习题2.4

A 组

1. 判断下列各题中的两项是不是同类项：

(1) 4 与 $-\frac{1}{2}$；　　(2) 3^2 与 a^2；

(3) $3mn$ 与 $3mnp$；　　(4) $2\pi x$ 与 $-3x$；

(5) $3a^2b$ 与 $3ab^2$．

2. m 和 n 分别取何值时，$2x^my^3$ 与 $-3xy^{3n}$ 是同类项？

3. 指出多项式 $3x^2-2xy+y^2-x^2+2xy$ 中的同类项．

4. 下列合并同类项是否正确？若不正确，请改正：

(1) $2x+4x=8x^2$；　　(2) $3x+2y=5xy$；

(3) $7x^2-3x^2=4$；　　(4) $9a^2b-9ba^2=0$．

5. 合并同类项：

(1) $-3a+5a-6a$；

(2) $2ax^2-3ax^2-7ax^2$；

(3) $2x^2+1-3x+7-3x^2+5x$；

(4) $7xy-x^2+2x^2-5xy-3x^2$.

6. 先合并同类项，再求各多项式的值：

(1) $4a^2-4a+1-4+12a-9a^2$，其中 $a=-1$；

(2) $9a^2-12ab+4b^2-4a^2-12ab-9b^2$，其中 $a=\frac{1}{2}$， $b=-\frac{1}{2}$.

7. 先去括号，再合并同类项：

(1) $(x-1)-(2x+1)$；

(2) $3(x-2)+2(1-2x)$；

(3) $2(2b-3a)+3(2a-3b)$；

(4) $(3x^2-xy-2y^2)-2(x^2+xy-2y^2)$.

8. 先化简，再求值：

(1) $3x^2+(2x^2-3x)-(-x+5x^2)$，其中 $x=314$；

(2) $(5xy-8x^2)-(-12x^2+4xy)$，其中 $x=-\frac{1}{2}$， $y=2$.

9. 计算：

(1) $\frac{3}{2}x^2-\left(-\frac{1}{2}x^2\right)+(-2x^2)$；

(2) $(9x^2-3+2x)+(-x-5+2x^2)$；

(3) $(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)$；

(4) $2(x-3x^2+1)-3(2x^2-x-2)$.

10. 已知 $M=3x^2-2xy+y^2$， $N=2x^2+xy-3y^2$.

(1) 求 $M-N$；

(2) 求 $M+N$.

11. 在下列各式的括号内填上恰当的项：

(1) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=x^3+($ $\qquad\qquad\qquad$ $)$；

(2) $2-x^2+2xy-y^2=2-($ $\qquad\qquad\qquad$ $)$.

B 组

12. 把多项式 $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3+1$ 写成三个整式的和，使其中一个不含字母 x，一个不含字母 y.

13. 判断下列说法是否正确，并说明理由：

（1）两个三次多项式的和仍是三次多项式；

（2）两个三项多项式的和可能是四项多项式；

（3）两个三次三项式的差不可能是三次四项式.

14. 已知 $|a|=|b|=|c|=|d|=1$，则 $a+b+c+d$ 的值是否可能为 1？若可能，写出一组 a、b、c、d 的值；若不可能，说明理由.

数学活动

居民身份证号码和学籍号

为了把众多的对象区分开来，人们常常设计使用一些编码方法.

我们国家为了区分每一个人，1987 年实行了身份证制度，每一个公民都有一个身份证号码. 从 1999 年 10 月 1 日起，身份证号码由原 15 位升至 18 位. 2004 年《中华人民共和国居民身份证法》正式施行.

教育部为了区分每一个学生，2015 年 1 月 21 日通过全国中小学生学籍信息管理系统为全国中小学生发放了正式学籍号. 学生学籍号以学生居民身份证号码为基础，从入幼儿园或入小学之初采集学籍信息后开始使用，一人一号，籍随人走，终身不变.

（1）数一数你自己的身份证号码，看看共有多少位. 你知道身份证号码的编码规则吗？

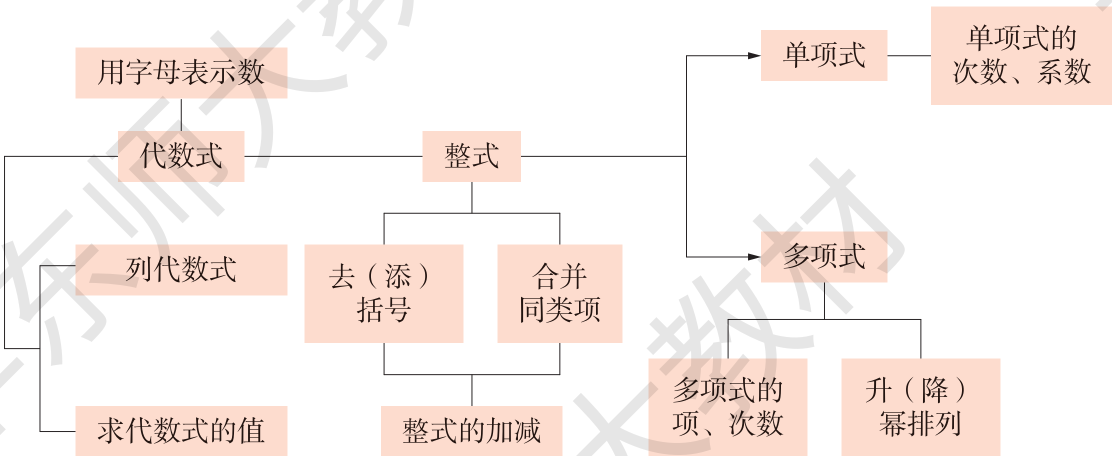
（2）你知道自己的学籍号吗？你知道学籍号的编码规则吗？

（3）除了学籍号外，我们在学校内往往还有一个自己的学号，能反映出入学年份、班级、性别等信息. 你知道自己的校内学号吗？你了解学号的编码规则吗？

（4）请你对校内学号的编码规则提出一些好的建议，让学号更加简洁有效.

小结

一、知识结构



二、要点

1. 用字母表示数，从数的研究过渡到代数式的研究，是数学发展的一次飞跃. 代数式及其运算，是进一步学习数学(方程、不等式、函数等)的基础，也是解决实际问题的工具. 学习时要注意联系实际，体会从具体到抽象、从特殊到一般的思想方法.

2. 整式包括单项式和多项式. 多项式可以看作几个单项式的和，其中的每一个单项式是多项式的项. 多项式的项(单项式)的系数包括正负号，在进行整式运算时不容忽视.

3. 整式的加减运算是本章学习的又一个重点. 去括号和合并同类项是整式加减的基础.

4. 去(添)括号时，要特别注意括号前面是“－”号的情形：去括号时，括号内的各项都改变正负号；添括号时，括到括号内的各项都改变正负号.

复习题

A 组

1. 填空：

(1) 如果 a 表示一个有理数，那么它的相反数是________；

(2) 如果 n 表示一个自然数，那么它的后一个自然数是________；

(3) 一个正方形的边长是 a cm，把这个正方形的边长增加 1 cm 后所得到的正方形的面积是________；

(4) 某商品原价是 x 元，提价 10%后的价格是________；

(5) 如果一个两位数的十位数字是 a，个位数字是 b，那么这个两位数可表示为________；

(6) 如果甲、乙两人分别从相距 s km 的 A、B 两地同时出发相向而行，他们的速度分别为 a km/h 与 b km/h，那么他们从出发到相遇所需要的时间为________.

2. 用代数式表示：

(1) a 的 3 倍与 b 的平方的差；

(2) x 与 y 平方的和；

(3) x、y 两数的平方和减去它们积的 2 倍；

(4) x 的相反数与 y 的倒数的和.

3. 填表：

x	-2	-1	0	1	2
$-2x+1$					
x^2-1					

4. 若某班同学在体育达标检测中，达标率为 p，达标人数为 n，则总人数为________. 若 $p=88\%$，$n=44$，则这个班有________人.

5. 填表：

单项式	x	$-x^2y$	$-\frac{x^2y^3}{3}$	$\frac{3}{2}ax^2$
系　数				
次　数				

6. 填表：

多项式	x^2-1	x^2-2x+3	x^2-xyz
次　数			
项　数			
项			

7. 将下列多项式按 x 的降幂排列：

(1) $3-2x^2+x$；

(2) $-2xy+x^2+y^2$；

(3) $2x-1-x^3$；

(4) $2x^2y-3xy^2-x^3+2y^3$.

8. 合并同类项：

(1) $2ax+3by-4ax+3by-2ax$；

(2) $-2x^2+x-3+x^2-3x$；

(3) $3x^2y-xy^2-2x^2y+3xy^2$.

9. 填空(去括号或添括号)：

(1) $2a+3(b-c)=$____________；

(2) $2a-3(b-c)=$____________；

(3) $x^2-xy+y^2=x^2-($________$)$；

(4) $x^2-xy+y^2=x^2+($________$)$.

10. 化简：

(1) $3x + 2x^2 - 2 - 15x^2 + 1 - 5x$；

(2) $3x^2 + 2xy - 4y^2 - 3xy + 4y^2 - 3x^2$；

(3) $-7x^2 + (6x^2 - 5xy) - (3y^2 + xy - x^2)$；

(4) $(2x^2 - 5x) - (3x + 5 - 2x^2)$.

11. 先化简，再求值：

(1) $3x^3 - [x^3 + (6x^2 - 7x)] - 2(x^3 - 3x^2 - 4x)$，其中 $x = -1$；

(2) $\frac{1}{3}x^2 - \left(3x^2 + 3xy - \frac{3}{5}y^2\right) + \left(\frac{8}{3}x^2 + 3xy + \frac{2}{5}y^2\right)$，其中 $x = -\frac{1}{2}$，$y = 2$.

B 组

12. x 表示一个两位数，y 表示一个三位数，若把 x 放在 y 的右边组成一个五位数，则这个五位数可以表示为________.

13. 代数式 $x^2 + x + 3$ 的值为 7，则代数式 $2x^2 + 2x - 3$ 的值为________.

14. 已知多项式 $A = 4x^2 - 4xy + y^2$，$B = x^2 + xy - 5y^2$. 求：

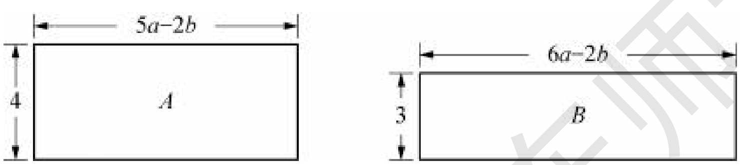
(1) $A - 3B$；　　(2) $3A + B$.

15. 把 $x - y$ 看作一个整体，化简：

(1) $5(x - y) + 2(x - y) - 4(x - y)$；

(2) $3(x - y)^2 - 4(x - y) + 7(x - y) - 6(x - y)^2$.

16. 如图，若 $a - b = 4$，求长方形 A 与 B 的面积的差.



（第 16 题）

17. 有这样一道题："求 $(2x^3 - 3x^2y - 2xy^2) - (x^3 - 2xy^2 + y^3) + (-x^3 + 3x^2y - y^3)$ 的值，其中 $x = \frac{1}{2}$，$y = -1$." 甲同学把"$x = \frac{1}{2}$"错抄成"$x = -\frac{1}{2}$"，但他计算的结果却是正确的. 这是怎么回事呢？

C 组

18. 一个两位数，它的十位数字为 a，个位数字为 b．若把它的十位数字与个位数字对调，将得到一个新的两位数．

（1）计算新数与原数的和，这个和能被 11 整除吗？为什么？

（2）计算新数与原数的差，这个差会被什么数整除？

19. 设 $\overline{abcd}$ 是一个四位数，如果 $a+c=b+d$，那么这个数一定是 11 的倍数．为什么？设 $\overline{abc}$ 是一个三位数，要使这个数是 11 的倍数，a、b、c 应满足什么条件？

20. 一棵桃树结了 m 个桃子，有三只猴子先后来摘桃．第一只猴子摘走$\frac{1}{5}$，再从树上摘一个吃掉；第二只猴子摘走剩下的$\frac{1}{5}$，再从树上摘一个吃掉；第三只猴子再摘走剩下的$\frac{1}{5}$，再从树上摘一个吃掉．用代数式表示树上最后剩下的桃子数．

（第 20 题）

第 3 章　图形的初步认识

观察我们周围的环境，就会发现建筑物的形状千姿百态.

这些千姿百态的建筑物美化了我们生活的空间，同时也带给我们许多遐想：建筑师是怎样设计创造的呢？这其中蕴涵着许多有关图形的知识.

★ 本章将认识一些常见的立体图形，进一步研究直线、射线、线段和角等最基本的几何图形的性质，为后续学习更复杂的几何图形及其性质打下基础.

3.1　生活中的立体图形

我们生活在三维世界中，随时随地看到的和接触到的物体都是立体的．有些物体，像石头、植物等千姿百态，呈现出独特的形状．而有些物体具有较为规则的形状，如人们辛勤种植收获的苹果、西瓜等水果；又如人类从古至今创造的各种建筑——古代的草堂、金字塔、土楼，以及当代的空间站、水立方、东方明珠等．

仔细观察上图中的物体，我们发现这些物体(或其一部分)可以抽象成某些立体图形，它们分别与图 3.1.1 中的一些立体图形相类似．相信你都认识这些立体图形．我们把图 3.1.1 中①②所表示的立体图形叫做**柱体**(cylinder)；④⑤所表示的立体图形叫做**锥体**(cone)；③所表示的立体图形叫做**球体**(sphere)．你能找出和这些立体图形相类似的物体吗？

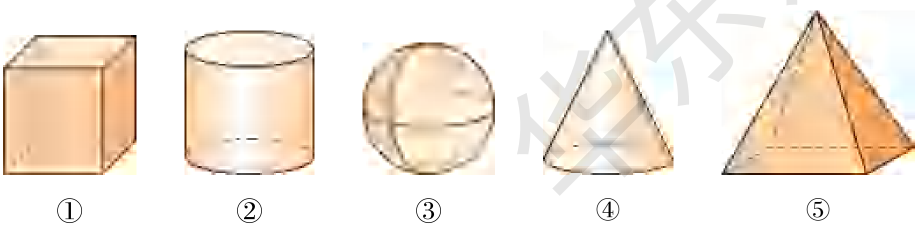


图3.1.1

我们可以发现，图 3.1.1 中的①②都是柱体，但还是有一定的差别：①所表示的图形称为**棱柱**(prism)，②所表示的图形称为**圆柱**(circular cylinder)．同样④⑤都是锥体，但④所表示的图形称为**圆锥**(circular cone)，⑤所表示的图形称为**棱锥**(pyramid)．

它们的差别在哪里？

如图 3.1.2，棱柱有三棱柱、四棱柱、五棱柱、六棱柱…… 棱锥也有三棱锥、四棱锥、五棱锥、六棱锥……

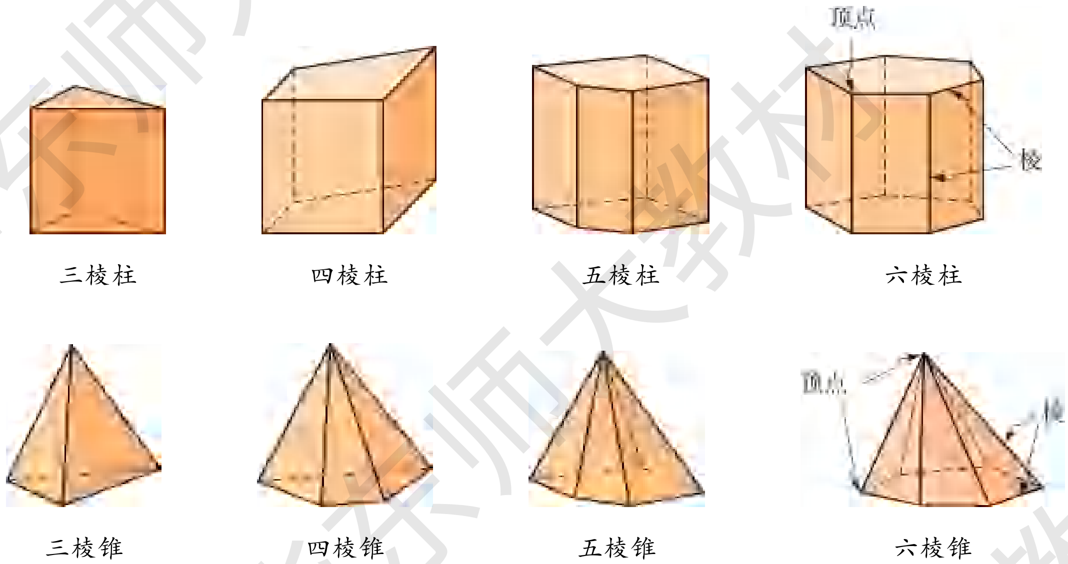


图3.1.2

在棱柱和棱锥中，相邻两个面的交线叫做**棱**(edge)，两条棱的交点叫做**顶点**(vertex)．

试一试

1. 指出图 3.1.2 中其他几个棱柱和棱锥的顶点与棱．
2. 长方体和正方体是棱柱吗？

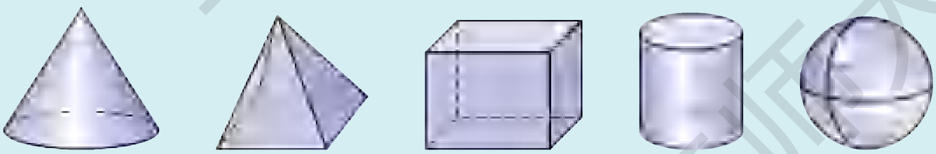
我们还可以发现，图 3.1.1 中的①⑤与②③④存在一定的差异，围成①⑤的每一个面都是平的，像这样的立体图形，又称为**多面体**(polyhedron).

思考 你能说出圆柱和棱柱的共同点与不同点吗?

练习

1. 本题的图中给出了一些实物图，也给出了一些立体图形. 试找出实物图中与立体图形相类似的实物(或实物的一部分).

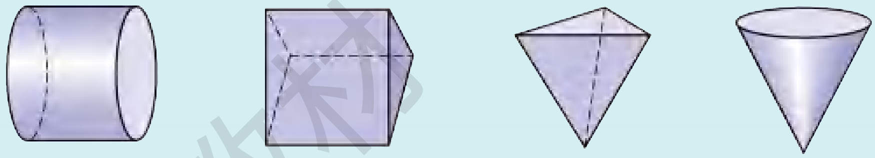
实物图



立体图形

(第 1 题)

2. 写出下列立体图形的名称.



（第 2 题）

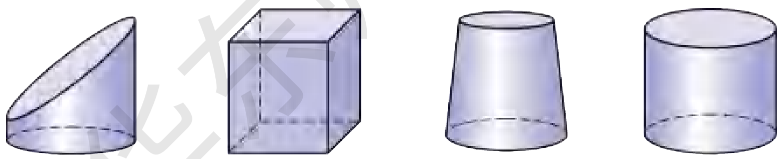
3. 五棱柱、六棱柱各有多少个面？多少条棱？多少个顶点？

习题3.1

A 组

1. 列举 5 个生活中的形状较为规则的物体，并说出和它们相类似的立体图形.

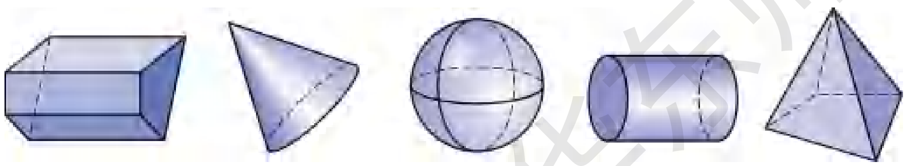
2. 下面图形中为圆柱的是________.（只填序号）



①　②　③　④

（第 2 题）

3. 把下列图形与对应的图形名称用线连起来：



圆锥　圆柱　棱柱　棱锥　球

（第 3 题）

B 组

4. 将下列所述立体图形适当分类，并说明理由：

长方体、正方体、三棱柱、四棱锥、球、圆柱、圆锥.

5. 漫步美丽的校园，你总会发现一些值得留念的建筑或雕塑. 观察一下，它们的形状是否有你所认识的立体图形，与你的同伴互相交流，记录并绘制成一份小报.

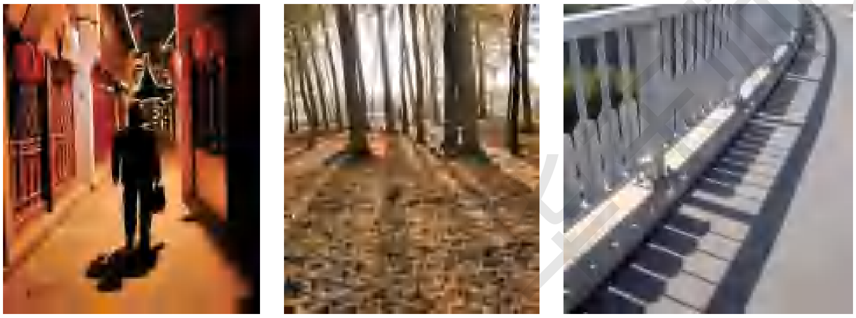
3.2 立体图形的视图

1. 由立体图形到视图

工人在建造房子之前，首先要看房子的图纸. 但在平面上画空间的物体不是一件简单的事，因为必须要把它们画得从各个角度都能看得很清楚. 为了解决这个问题，可以采用三视图法. 建筑工程师和工人为了描绘和制造各种物体，常常使用这种方法.

三视图是一种特殊的视图，而视图又来自于投影. 投影现象广泛存在于我们的日常生活中.

在阳光或者灯光下，我们会看到人影、树影或建筑物的影子等(图 3.2.1).



人影　　树影　　桥栏杆影

图3.2.1

日晷，是中国古代利用日影测定时刻的计时器．“晷”字，古意是太阳的影子．在圆形石盘上刻出时刻，中间立金属晷针，和盘面垂直．古人根据太阳的投影与地球自转所形成的日影长短的变化及方向的不同确定时刻．古代宫殿前的日晷亦为皇权的象征，一般与嘉量并列于左右，象征天地一统，江山永固．（图 3.2.2）

如图 3.2.3 所示，物体在太阳光下的影子在一天中会有时长、有时短，位置也在不断变化．

故宫日晷

图3.2.2

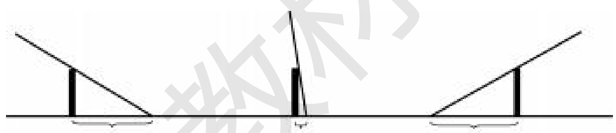


图3.2.3

物体在灯光下的影子也随物体离灯光的距离和灯光照射的角度而发生变化．

一般地，用光线照射物体在某个面（地面、墙壁、幕布等）上得到的影子叫做物体的**投影**（projection）．照射光线叫做投影线，投影所在的面叫做投影面．如图 3.2.4 所示．

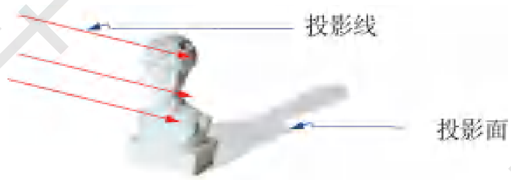


图3.2.4

由平行光线形成的投影，叫做**平行投影**（parallel projection）．物体在太阳光照射下形成的影子就是平行投影．由一点发出的光线形成的投影，叫做**中心投影**（center projection）．物体在灯泡发出的光照射下形成的影子就可以看成是中心投影．如图 3.2.5 所示．

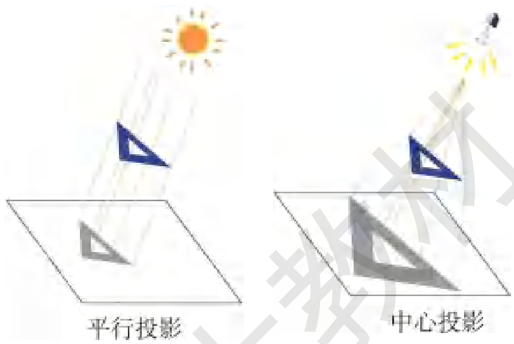


图3.2.5

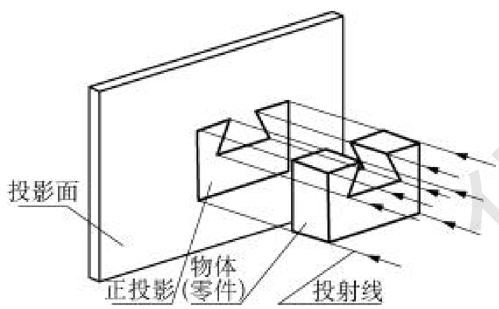


图3.2.6

当投影线垂直于投影面时，产生的平行投影称为正投影．如图 3.2.6 所示．

试一试

用手电筒照射书本，观察书本在墙面上的影子的变化：

(1) 手电筒的光线垂直射到墙面时，改变书本与手电筒的距离和书本放置的方向．

(2) 手电筒的光线斜射到墙面时，改变书本与手电筒的距离和书本放置的方向．

你会发现，物体投影的大小和形状，随着光线射入的角度及与光源距离的变化而变化．记录你的观察结果，并与同学交流．

练习

1. 举例说明生活中平行投影和中心投影的例子．
2. 路灯下，高矮相同的两个人的影子一定一样长吗？什么时候可能会一样长？试说明你的理由．

我们从某一方向观察物体时，看到的平面图形称为物体的一个**视图**(view).视图可以看作平行光线下物体的正投影，它是一种特殊的平行投影.

如图 3.2.7 是三个立体图形在一个面的视图.

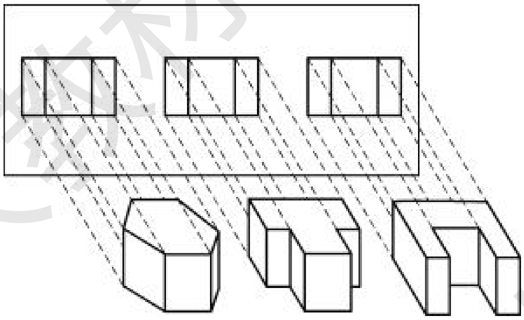


图3.2.7

同一物体从不同的方向观察，得到的视图可能不同．为全面反映物体的形状，实际生活中，常采用多个视图刻画物体的形状.

如图 3.2.8，从正面、上面和侧面(左面或右面)三个不同的方向进行观察(平行投影)，可以得到三个投影，这样就可以用平面图形去刻画一个立体图形了.

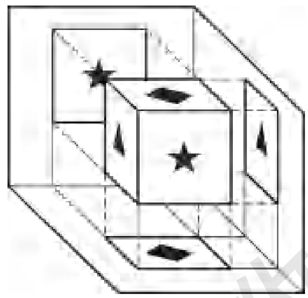


图3.2.8

从正面观察得到的投影，称为主视图；从上面观察得到的投影，称为俯视图；从侧面观察得到的投影，称为侧视图，依观察(投影)方向不同，有左视图和右视图．通常将主视图、俯视图和左(或右)视图称为一个物体的三视图.

如图 3.2.9 是一个螺栓．图 3.2.10 就是它的三视图，工人可以根据这三个图形制造出这个螺栓.

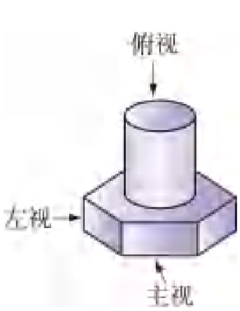


图3.2.9

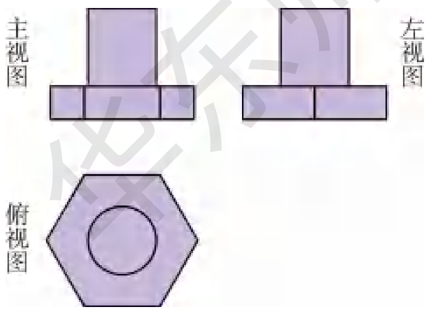


图3.2.10

▶ **例 1** 分别画出如图 3.2.11 和图 3.2.12 所示的正方体和圆柱的三视图.

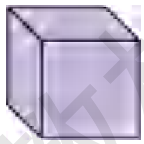


图3.2.11

图3.2.12

解 如图 3.2.13，正方体的三视图都是正方形.

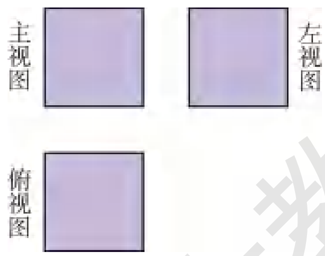


图3.2.13

如图 3.2.14，圆柱的主视图和左视图都是长方形，俯视图是圆.

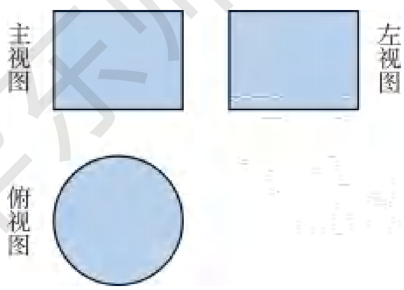


图3.2.14

试一试

观察粉笔盒、文具盒，试着画出它们的三视图.

▶ **例 2** 画出如图 3.2.15 所示的圆锥的三视图.

解 圆锥的三视图如图 3.2.16 所示.

图3.2.15

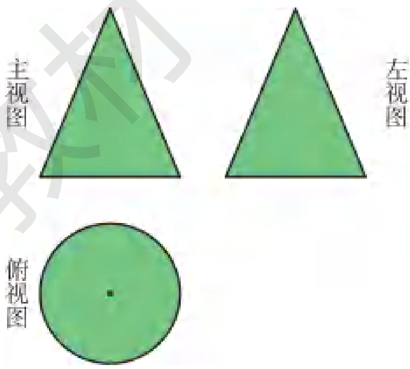


图3.2.16

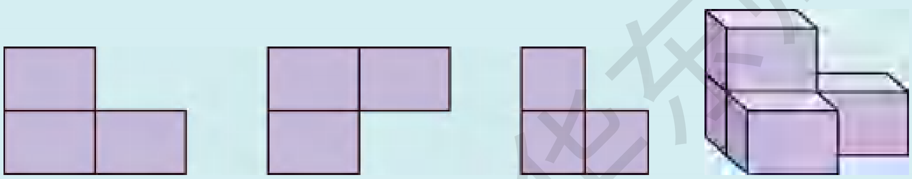
三视图法是描述立体图形的一种方法，以后，我们还会学习更多的其他方法.

练习

1. 画出下列立体图形的三视图.

（第 1 题）

2. 图中右边是由四个相同的小长方体堆成的物体，试指出左边三个平面图形分别是这个物体的三视图中的哪个视图.



（　　）　　（　　）　　（　　）

（第 2 题）

2. 由视图到立体图形

现在我们来根据视图想象物体的形状．让我们先观察一些较为简单的、熟悉的物体的视图．

► **例 3** 图 3.2.17 所示的是一些立体图形的三视图，请根据视图说出这些立体图形的名称．

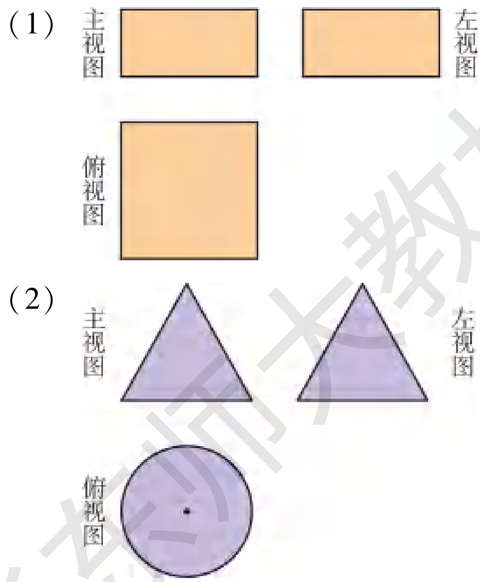


图3.2.17

解 （1）该立体图形是长方体，如图 3.2.18 所示．

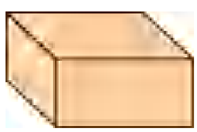


图3.2.18

（2）该立体图形是圆锥，如图 3.2.19 所示．

图3.2.19

试一试

图 3.2.20 是一个物体的三视图，试想象该物体的形状.

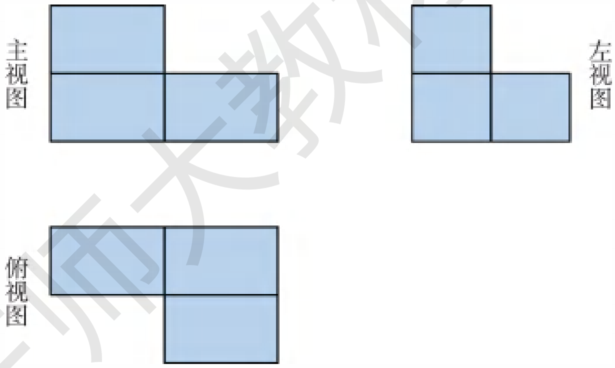


图3.2.20

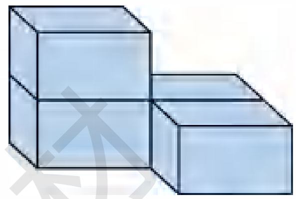
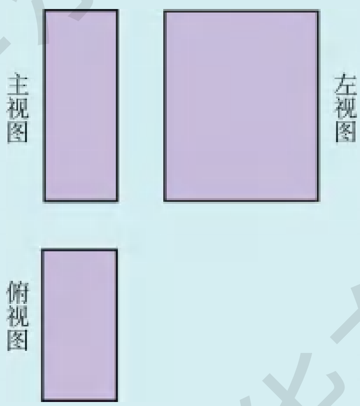


图3.2.21

你想象的该物体形状和图 3.2.21 所示的一样吗？

练习

1. 如图是一个立体图形的三视图，请说出这个立体图形的名称，并画出它的大致形状.



（第 1 题）

2. 试说出几个俯视图为一个圆的物体.

习题3.2

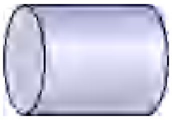
A 组

1. 根据要求画出下列立体图形的视图.

（1）

（画左视图）

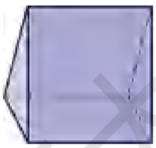
（2）



（画俯视图）

（第 1 题）

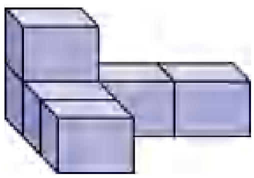
2. 画出如图所示的立体图形的三视图.



（第 2 题）

B 组

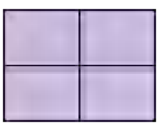
3. 如图是由 6 个相同的长方体堆成的物体，试画出这一物体的主视图.



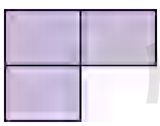
（第 3 题）

4. 改变第 3 题中物体的形状，使它的俯视图分别如图所示.

（1）



（2）



（第 4 题）

试试看，还可能得到哪些俯视图？

3.3　立体图形的表面展开图

我们知道，圆柱的侧面展开图是长方形，而在实际生活中常常需要了解整个立体图形的表面展开的形状，如包装一个长方体形状的物体，需要根据它的表面展开图来裁剪纸张．下面要讨论的是一些简单多面体的表面展开图．

试一试

图 3.3.1 至图 3.3.3 是一些多面体的表面展开图，你能说出这些多面体的名称吗？

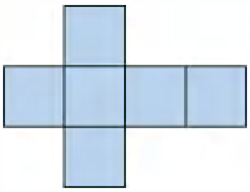


图3.3.1

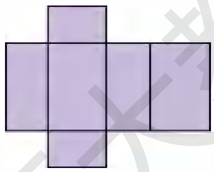


图3.3.2

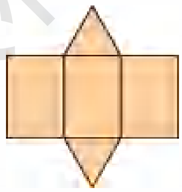


图3.3.3

同一个立体图形，按不同的方式展开得到的表面展开图是不一样的．想想看，图 3.3.4 至图 3.3.9 的图形都是正方体的表面展开图吗？

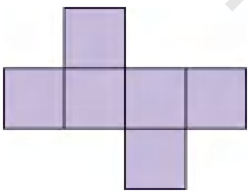


图3.3.4

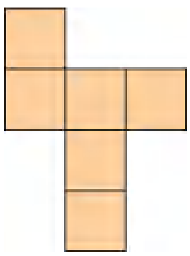


图3.3.5

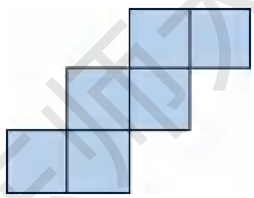


图3.3.6

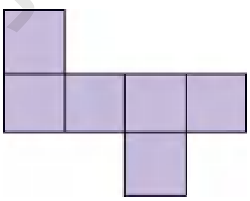


图3.3.7

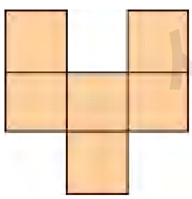


图3.3.8

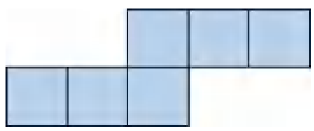
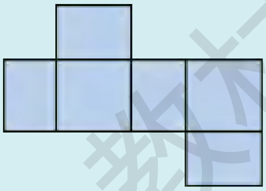


图3.3.9

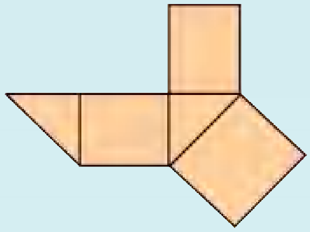
练习

1. 下列图形是某些多面体的表面展开图，请说出这些多面体的名称.

（1）



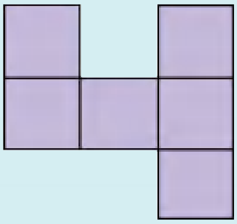
（2）



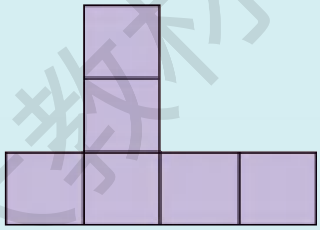
（第 1 题）

2. 下列图形都是正方体的表面展开图吗？

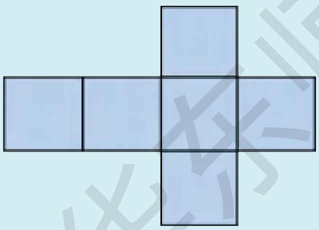
（1）



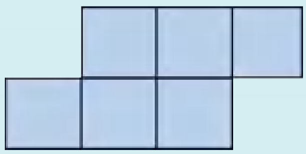
（2）



（3）

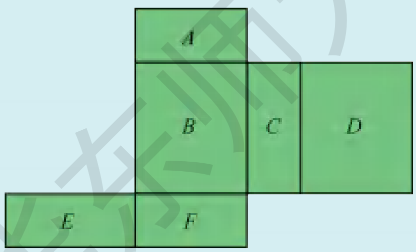


（4）



（第 2 题）

3. 一个多面体的每个面上都标注了字母，如图是该多面体的表面展开图，请根据要求回答问题：



（第 3 题）

（1）如果面 A 在多面体的底部，那么哪一面会在上面？

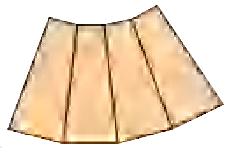
（2）如果面 F 在前面，从左面看是面 B，那么哪一面会在上面？

（3）如果从右面看是面 C，面 D 在后面，那么哪一面会在上面？

习题3.3

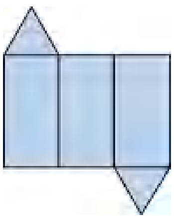
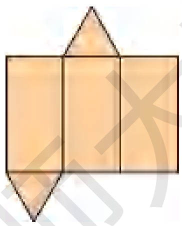
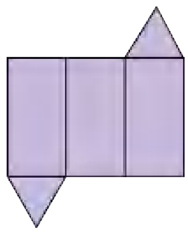
A 组

1. 下列图形中哪一个是四棱柱的侧面展开图？

（1） （2） （3）

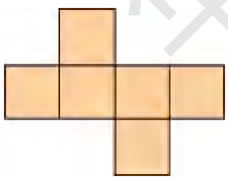
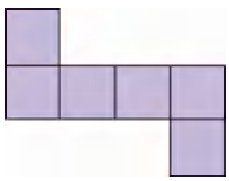
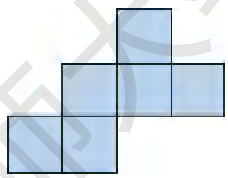
（第 1 题）

2. 下列图形中有三棱柱的表面展开图吗？

（1） （2） （3）

（第 2 题）

3. 下列图形都是由 6 个大小一样的正方形拼接而成的．你还能画出一些其他不同的拼接图形吗？这些图形中哪些可以折成正方体？

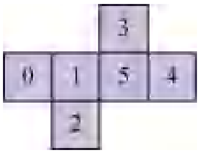
（1） （2） （3）

（第 3 题）

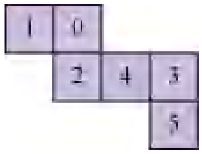
B 组

4. 将正方体的表面分别标上数字 0、1、2、3、4、5，使任两个相对面的数字之和为 5，展开后能形成下面的平面图形吗？

（1）



（2）

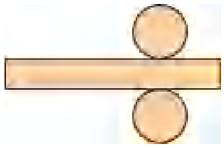


（第 4 题）

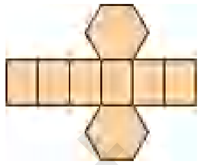
5. 下面是几个立体图形的表面展开图，试着标出这些立体图形的名字.

（1）

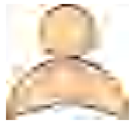
（2）



（3）



（4）



（第 5 题）

3.4　平面图形

通过前几节的学习，我们认识了由实际生活中所存在的各种物体抽象而成的许多立体图形，其中不少立体图形都是由平面图形围成的，而且可以通过某些平面图形描述它们的形状和特性，因此研究立体图形往往从平面图形开始.

观察图 3.4.1 中所示的各物体，你能画出它们的表面轮廓线的形状吗？

图3.4.1

把你画的图形和图 3.4.2 所示的图形相比较，看看你所画的是否也是这几个平面图形？

图3.4.2

这里的三角形、长方形和圆是我们早就熟悉的图形．**圆**(circle)是由曲线围成的封闭图形，而其他由线段围成的封闭图形叫做**多边形**(polygon)．按照组成多边形的边的条数，多边形可分为三角形(三边形)、四边形、五边形、六边形……

思考　图 3.4.3 中的几个图形是多边形吗？

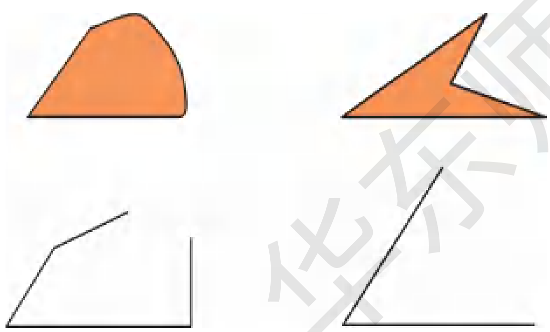


图3.4.3

图 3.4.4 所示的图形中，哪几个是四边形？

说说“是”或“不是”的理由．

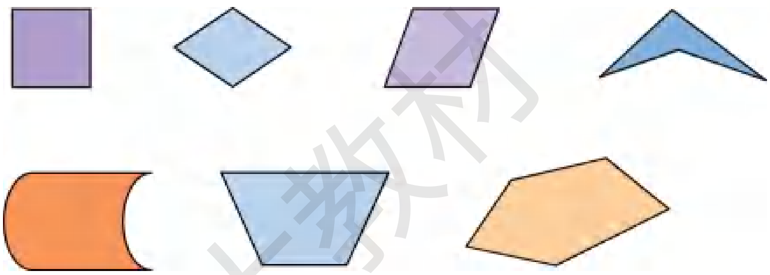


图3.4.4

在多边形中，三角形是最基本的图形．如图 3.4.5 所示，每个多边形都可以分割成若干个三角形．

数一数每个多边形中三角形的个数，你能发现什么规律？

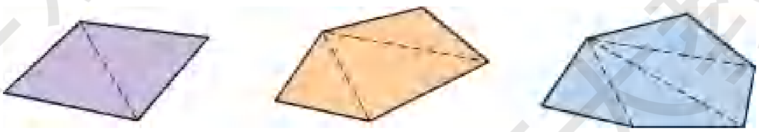


图3.4.5

试一试

生活中，经常可以看到由一些多边形或圆组成的优美图案．图 3.4.6 至图 3.4.9 是一些布料和交通标志等的图案，请你在照片上找一找你熟悉的平面图形．

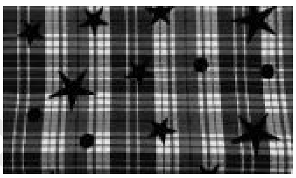


图3.4.6

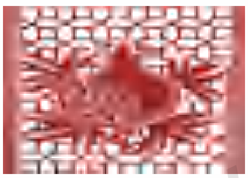


图3.4.7

图3.4.8

图3.4.9

图 3.4.6 中有长方形、正方形、五角星形和圆；图 3.4.7 中有长方形、六边形和八边形；图 3.4.8 中有长方形、梯形和圆；图 3.4.9 中有三角形和长方形.

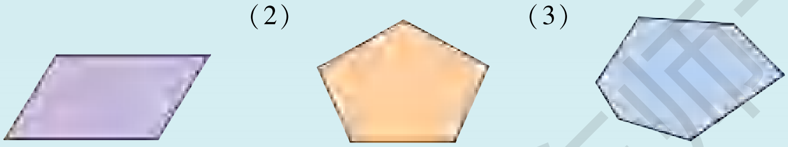
如图 3.4.10 所示，古典园林里一些窗格的图案中，有不少简单的几何图形，试找出这些图形.

图3.4.10

练习

1. 分别举出有一个表面是圆和有一个表面是四边形的两个物体的例子.
2. 按照图 3.4.5 的方式分割下面的多边形，使其由多个三角形组成.

（1） （2） （3）



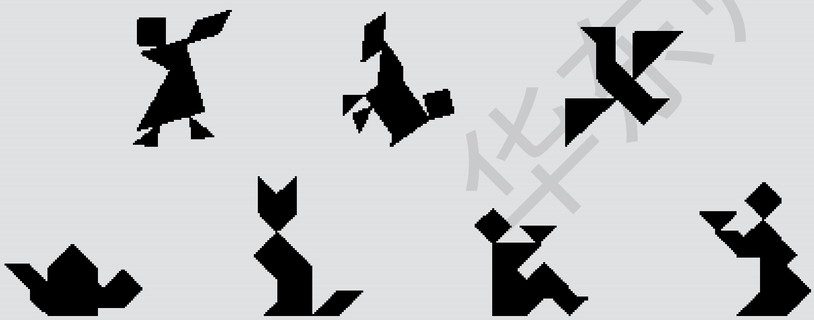
（第 2 题）

阅读材料

七巧板

你玩过七巧板吗？那是我国古代人民创造的益智玩具，流传到世界上不少国家．“七巧板”也称“七巧图”，是由七块木板构成的．相传宋朝时，有一位叫黄伯思的人，对几何图形很有研究，他热情好客，发明了一种用 6 张小桌子组成的“宴几”——请客吃饭的小桌子．后来有人将它改进为用 7 张桌子组成的宴几，可以根据吃饭人数的不同，把桌子拼成不同的形状，比如 3 人时拼成三角形，4 人时拼成正方形……这样用餐时人人方便，气氛更好．再后来，有人把宴几缩小，改为七块板，用来拼图，并逐渐演变成一种智力玩具——七巧板，现在又拓展为九巧板、十巧板等．

“七巧板”游戏就是利用 7 块板，拼出如下图所示的各种图案．你一定还能想出其他图案来．



“中国七巧板”的 7 块板中已经有 3 块不同大小的三角形，用其中的 4 块板——1 个大三角形、2 个小三角形和 1 个正方形，还能拼出一个三角形．你能想象出来吗？思考下列问题：

（1）用 2 块板能拼成一个三角形吗？用 3 块呢？用 5 块、6 块、7 块呢？

（2）用 2 块板能拼成正方形吗？用 3 块呢？

（3）用哪些板能拼成长方形？还能拼成什么样的多边形？

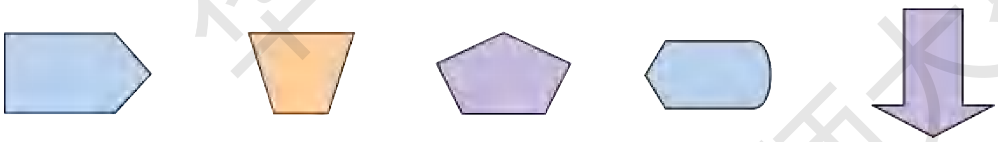
习题3.4

A 组

1. 下列图形中有几个是多边形？

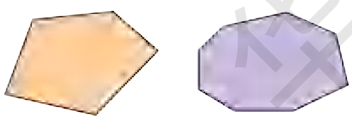
（第 1 题）

2. 下列图形中有几个是五边形？



（第 2 题）

3. 分别把下列图形分割成三角形，每个图形至少可以分割成多少个三角形？



（第 3 题）

B 组

4. 观察一下你平时经常阅读的图书，有些页面上可能画有平面图形，其中有你认识的形状吗？写下你所发现的结论.

3.5 最基本的图形——点和线

1. 点和线

通过前面的学习，大家一定会感叹，生活中有那么多奇妙的图形！其实不管是什么样的图形，它们都是由一些基本的图形构成的.

下面先看两个最基本的图形.

用削尖的铅笔轻触一张白纸，就在纸上留下了**点**(point)的直观形象．在许多图示上，点常用来表示那些大小尺寸可以忽略不计的物体．例如，在小比例尺地图上，一个城市就常常用一个点来表示．许多点的聚集又可以表现不同的图形，例如，报纸上的图片、电视屏幕上的画面，都是由浓淡不同或者色彩各异的点组成的.

在日常生活中，一根拉紧的绳子、一根竹竿、人行横道线等都给我们以**线段**(line segment)的形象．实际上，线段是无数排成行的点的聚集.

在前面抽象得到的多面体上，我们可以找到点和线的形象．例如，如图3.5.1所示的长方体，它由6个面组成，两个相邻的面交于一条线段，这条线段称为棱；两条相接的棱交于一个点，这个点称为顶点.

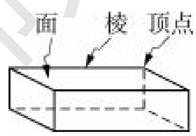


图3.5.1

我们可以用如图3.5.2所示的方式来表示点和线段，其中在线段 AB 中，点 A 和点 B 称为线段 AB 的端点.

点 B　　线段 AB（或线段 BA）　　线段 a

图3.5.2

读一读

“抽象”是数学的一种基本思想和基本方法．由实际生活中的物体、图形抽象得到的点、线、面、体等数学概念，概括了客观事物的数学属性，但也不再是原来的事物了．例如，抽象得到的数学上的“点”是没有大小的，但如果我们在纸上画“点”，无论铅笔削得多尖，画出来的点都有大小(你可以用放大镜看一看)．本册教科书第1、2章谈的是数与代数领域中数量和数量关系的抽象．现在我们又从简单图形和图形关系出发抽象出了一些最基本的几何概念．我们还将在此基础上进一步运用抽象等数学思想和方法，研究和解决各种几何图形中的问题．

试一试

如图3.5.3，从A地到B地有三条路径，你会选择哪一条?

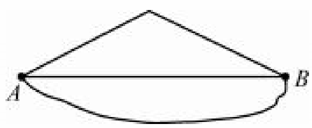


图3.5.3

在实际情况中，我们都希望走的路程越短越好，当然选择笔直的路线．这条路线就是线段AB．也就是我们平时所说的基本事实：

两点之间线段最短．

此时线段AB的长度，就是A、B两点间的距离．

如图3.5.4，把线段向一端无限延伸所形成的图形叫做**射线**(ray)．

图中固定的点O称为射线OC的端点．

图3.5.4

如图 3.5.5，激光灯的光束，给我们以射线的形象.

把线段向两端无限延伸所形成的图形叫做**直线**(straight line).

如图 3.5.6，直线可以用两种不同的方法表示.

图3.5.6

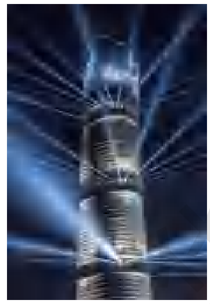


图3.5.5

试一试

在纸上画出两个不同的点 A 和点 B，过点 A 你能画几条直线？经过 A、B 两点画直线，你又可以画几条？

我们可以发现这样一个基本事实：

经过两点有一条直线，并且只有一条直线.

即两点确定一条直线.

练习

1. 要在墙上钉牢一根木条，至少要钉几颗钉子？为什么？
2. 请举出生活中运用“两点之间线段最短”的几个例子.

2. 线段的长短比较

记得你和同学是怎样比较个子高矮的吗？可能大家通常会用下面两种办法：一是让两人分别说出自己的身高，对比一下；二是让两人背对背地站在同一块平地上，脚底平齐，观看两人的头顶，直接比出高矮(图 3.5.7).

图3.5.7

那么，我们可以怎样比较两条线段的长短呢？

你一定会发现，两条线段也可以通过类似的方法来比较长短．对于图 3.5.8 中的线段 AB、CD，我们用刻度尺量一下，就可以知道它们的长短了．这是第一种方法．

图3.5.8

这里线段 AB 比线段 CD 短，我们可以记为

$$AB < CD(\text{或 } CD > AB).$$

比较两条线段的长短的第二种方法与直接比较个子高矮一样，就是把其中一条线段移到另一条线段上去加以比较．如图 3.5.9，将线段 AB 移到线段 CD 上，让点 A 和点 C 重合，观察另外两个端点 B、D 的位置，便可确定这两条线段的长短．图中点 B 落在线段 CD 的内部，可以知道线段 AB 比线段 CD 短，也就是 $AB < CD$.

图3.5.9

如果点 B 落在线段 CD 的延长线上呢？

如果点 B 恰好与点 D 重合，那么可以知道两条线段一样长，即线段 AB 与线段 CD 相等，记为

$$AB = CD.$$

做一做

如图 3.5.10，MN 为已知线段，你能用直尺和圆规准确地作一条与 MN 相等的线段吗？

图3.5.10

如图 3.5.11，我们可以先作射线 AB，然后用圆规量出线段 MN 的长，再在射线 AB 上截取 $AC=MN$，这样就将线段 MN 移到射线 AB 上，线段 AC 就是所要求作的线段.

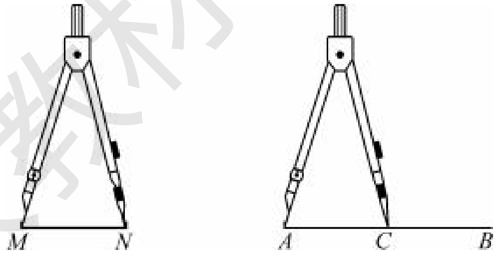


图3.5.11

试一试

用直尺和圆规作一条线段等于已知线段的 2 倍.

把一条线段分成两条相等线段的点，叫做这条线段的**中点**(midpoint).

在图 3.5.12 中，点 C 是线段 AB 的中点，可以写成

$$AC=CB=\frac{1}{2}AB,\quad 或\ AB=2AC=2CB.$$

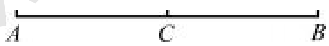


图3.5.12

又如图 3.5.13，$AB=6\text{cm}$，点 C 是线段 AB 的中点，点 D 是线段 CB 的中点，那么 AD 有多长呢?

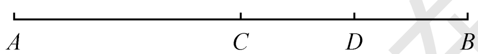


图3.5.13

这里 A、C、D、B 四点在同一条直线上，线段 AD 可以看成是线段 AC 与线段 CD 的和，记为

类似于数，线段也可以相加减.

$$AD=AC+CD.$$

因为点 C 是线段 AB 的中点，所以

$$AC = CB = \frac{1}{2}AB = 3\,\text{cm}.$$

又因为点 D 是线段 CB 的中点，所以

$$CD = \frac{1}{2}CB = 1.5\,\text{cm}.$$

所以 $$AD = AC + CD = 3\,\text{cm} + 1.5\,\text{cm} = 4.5\,\text{cm}.$$

练习

1. 根据所示图形填空：

(1) $AB + BC =$ (　　　　)；

(2) $AD =$ (　　　　) $+ CD$；

(3) $CD = AD -$ (　　　　)；

(4) $BD = CD +$ (　　　　) $= AD -$ (　　　　)；

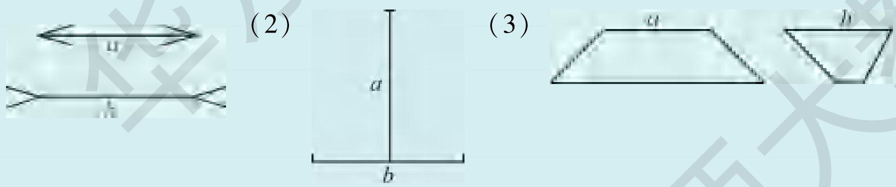
(5) $AC - AB + CD =$ (　　　　) $= BC +$ (　　　　).

(第 1 题)

2. 如图，已知点 C 是线段 AD 的中点，$AC = 1.5\,\text{cm}$，$BC = 2.2\,\text{cm}$，那么 $AD =$ (　　) cm，$BD =$ (　　) cm.

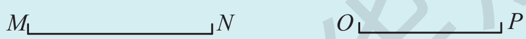
(第 2 题)

3. 请通过直接观察，分别比较下列三组图形中线段 a、b 的长短．再用刻度尺量一量，看看你的观察结果是否正确．



(第 3 题)

4. 已知线段 MN 和线段 OP，用直尺和圆规作一条线段 AB，使 $AB = MN + OP$.（不写作法，保留作图痕迹）①



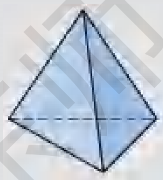
(第 4 题)

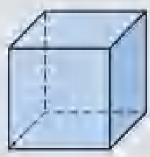
① 本套教科书中凡尺规作图均不要求写作法，只需要保留作图痕迹．以后不再标注．

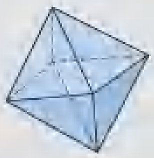
阅读材料

欧拉公式

新年晚会是深受大家喜爱的节目．现场常悬挂着五彩缤纷的小装饰，其中有各种各样的立体图形．比如，会有下面五种正多面体：


正四面体


正方体


正八面体


正十二面体


正二十面体

请你数一数上面每一个多面体具有的顶点数(V)、面数(F)和棱数(E)，并且把结果记入下表中．

多面体	顶点数(V)	面数(F)	棱数(E)	$V+F-E$
正四面体				
正方体				
正八面体				
正十二面体				
正二十面体	12	20	30	

令人惊奇的是，上表最后一列中的数是完全一样的！

你若有兴趣的话，可以随意做一个多面体，看看是否还是这样的结果．

伟大的数学家欧拉(L. Euler，1707—1783)证明了这一令人惊叹的关系式，即欧拉公式：

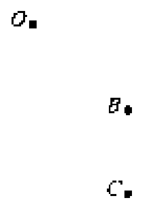
顶点数 + 面数 − 棱数 = 2．

习题3.5

A 组

1. 直线 l 上有一个点．在直线 l 上，以这个点为端点的不同射线共有多少条？

2. 如图，有 A、B、C、O 四个点．分别画出以点 O 为端点，经过 A、B、C 各点的射线．



（第 2 题）

3. 画出长度为 5 cm 的线段 AB，并用刻度尺找出它的中点．

4. 在一条直线上顺次取 A、B、C 三点，使 $AB=5$ cm，$BC=2$ cm，并且取线段 AC 的中点 O，求线段 OB 的长．

B 组

5. 读下列语句，并画出相应的图形：

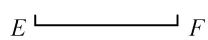
（1）点 A 在直线 l 上，点 B 在直线 l 外．

（2）任意画一点 P，过点 P 画直线 PQ．

（3）任意画 A、B 两点，过 A、B 两点画直线 AB．

（4）任意画 A、B、C 三点，过 A、C 两点画直线 l，此时点 B 是否一定在这条直线上？

6. 如图，已知线段 EF，用直尺和圆规作一个三角形，使三角形的三边长都等于 EF．



（第 6 题）

3.6 角

1．角

观察图3.6.1 中的图形，你发现它们有什么共同的特点吗？

图3.6.1

这些图形都给出了角的形象.

在小学里，我们已学习过**角**(angle)的概念，角是由两条有公共端点的射线组成的图形.

如图 3.6.2，角更可以看成是由一条射线绕着它的端点旋转而成的图形．射线的端点叫做角的顶点，起始位置的射线叫做角的始边，终止位置的射线叫做角的终边.

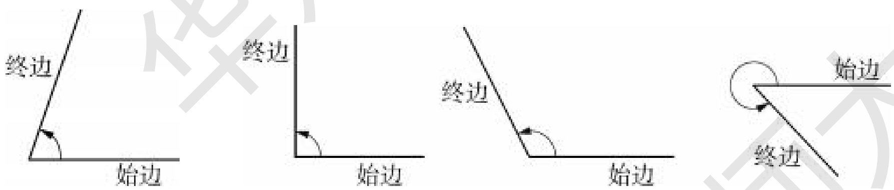


图3.6.2

如图 3.6.3，角可以用几种不同的方法表示.

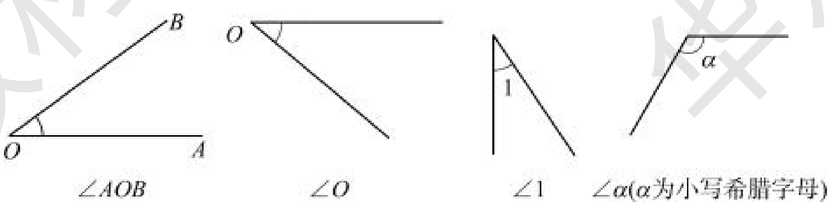


图3.6.3

注意用三个字母表示角时，必须把表示角的顶点的字母写在中间.

在图 3.6.4 中可以观察到两种特殊情况：第一种情况是绕着射线的端点旋转到角的终边和始边成一条直线，这时所成的角叫做**平角**(straight angle)；第二种情况是绕着射线的端点旋转到终边和始边再次重合，这时所成的角叫做**周角**(perigon).

本册教科书中的角，除了周角和平角外，一般是指小于平角的角.

图3.6.4

我们已经知道，如果把周角等分成 360 份，每一份就是 1 度的角，1 度记作 1°. 但是一个角的度数并不正好是整数，这时与长度单位一样，考虑用更小一些的单位进行表示. 把 1 度等分成 60 份，每一份就是 1 分，记作 1′；把 1 分等分成 60 份，每一份就是 1 秒，记作 1″.

$$1\text{ 周角} = 360°.$$

$$1\text{ 平角} = 180°.$$

$$1° = 60′,\quad 1′ = 60″.$$

从角的度数看，大于 0°且小于 90°的角是锐角；等于 90°的角是直角；大于 90°且小于 180°的角是钝角. 如图 3.6.5 所示.

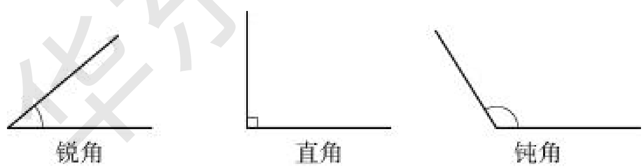


图3.6.5

▶ **例 1** (1) 把 18°15′化成用度表示的角；

(2) 把 93.2°化成用度、分、秒表示的角.

解 (1) 先把 15′化成度，即

$$15′ = \left(\frac{15}{60}\right)^{\circ} = 0.25°,$$

所以 $$18°15′ = 18.25°.$$

18°15′和18.15°相等吗？哪一个较大？

（2）因为 $1° = 60'$，所以

$$0.2° = 60' \times 0.2 = 12',$$

因此 $$93.2° = 93°12'.$$

还记得如图 3.6.6 所示的八个方向吗？那是日常生活中经常用到的一些方向，如太阳从东方升起，明天将有 4～5 级西北风，等等．但实际上，八个方向还是不够用的．如果要准确地表示方向，那就要借用角的表示方式．

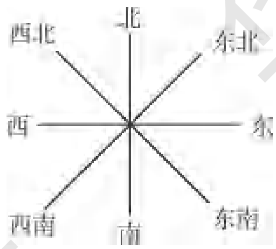


图3.6.6

▶ **例 2** 如图 3.6.7，OA 是表示北偏东 30°方向的一条射线．

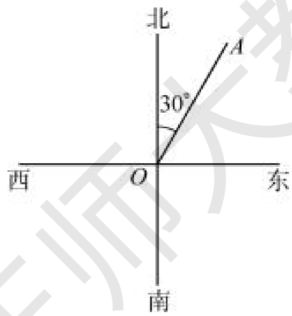


图3.6.7

仿照这条射线，画出表示下列方向的射线：

（1）南偏东 25°；

（2）北偏西 60°．

解 如图 3.6.8 所示．

（1）以正南方向的射线为始边，逆时针旋转 25°，所成的角的终边即为所求的射线．

（2）以正北方向的射线为始边，逆时针旋转 60°，所成的角的终边即为所求的射线．

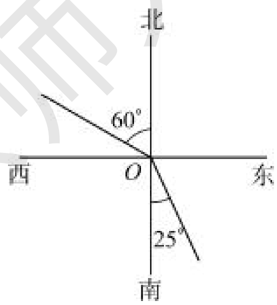


图3.6.8

读一读

轮船、飞机等物体运动的方向与正北方向之间的夹角，即以测量点的正北方向为起始边，依顺时针方向到目标方向线之间的水平夹角称为方位角，领航员常用地图和罗盘进行方位角的测定.

我们还可以以正北、正南方向为基准，描述物体运动的方向．如：“北偏东 30°”“南偏东 25°”“北偏西 60°”.

练习

1. 根据图 3.6.6 填空：

（1）正东和正西方向所成的角是________度；

（2）正南和西南方向所成的角是________度；

（3）东北和西北方向所成的角是________度；

（4）正西和东南方向所成的角是________度.

2. 用直尺画出 30°、45°、60°、120°的角．随后用量角器量一量，比一比谁画的角最为准确.

2．角的比较和运算

观察如图 3.6.9 所示的三个角，哪个角最大？

你能从比较线段长短的方法中得到启示吗？

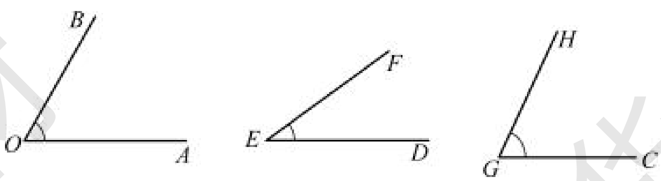


图3.6.9

从上图我们可以发现，$\angle DEF$ 明显比 $\angle AOB$ 和 $\angle CGH$ 小，但 $\angle AOB$ 与 $\angle CGH$ 的大小关系不太明显．那么如何比较，才能得到准确的结果呢？

你还记得比较两条线段长短的方法吗？类似地，你一定会想到可以采用下面的方法：

如图 3.6.10 所示，把一个角放到另一个角上，使它们的顶点重合，其中的一边也重合，并使两个角的另一边都在重合的这一条边的同侧.

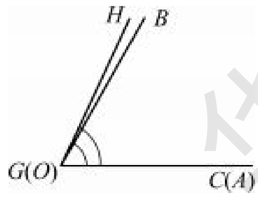


图3.6.10

这时，角的大小关系就明显了，可以记为

$$\angle CGH > \angle AOB，或 \angle AOB < \angle CGH.$$

比较角的大小，也可以用量角器分别量出角的度数，然后加以比较．如我们用量角器可以量出图 3.6.9 中三个角的度数分别为

$$\angle AOB = 60°30'，\quad \angle DEF = 36°，\quad \angle CGH = 65°，$$

所以 $\angle CGH > \angle AOB > \angle DEF$.

一副三角板上的角是一些常用的角，除了可以用它们直接画出 30°、45°、60°和 90°的角之外，还可以画出其他一些特殊的角.

如图 3.6.11 所示，用两种方法放置一副三角板，可以画出 75°和 15°的角.

用一副三角板还可以画出哪些特殊的角？

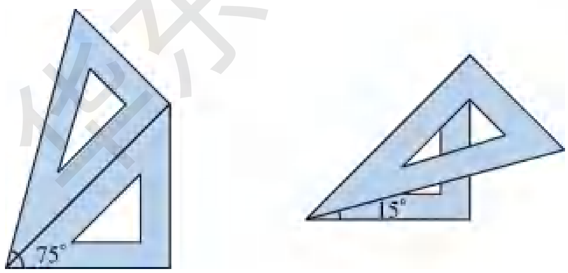


图3.6.11

思考 由角的大小比较方法我们可以看到，角的大小与它的开口大小有关，开口越大，角越大；开口一样大，角就相等．前面我们曾用直尺和圆规准确地作出了一条线段等于已知线段．那么我们能否用直尺和圆规准确地作出一个角等于已知角呢？

在图 3.6.12 中，$\angle 2 > \angle 1$．分别以两个角的顶点为圆心、相同长为半径作弧．可以发现，$\angle 2$ 的开口大，圆弧长些，也就是说，圆弧与角两边的交点之间的线段也长些．

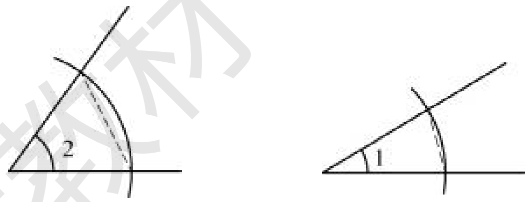


图3.6.12

从而想到，如果两个角中，所作圆弧与角两边的交点之间的线段相等，那么这两个角就应该相等．

由此，你能发现用直尺和圆规作一个角等于已知角的方法吗？

做一做

如图 3.6.13，$\angle AOB$ 为已知角，试用直尺和圆规按下列步骤准确地作一个角等于 $\angle AOB$．

第一步：作射线 $O'A'$；

第二步：以点 O 为圆心、适当长为半径作弧，交射线 OA 于点 C，交射线 OB 于点 D；

第三步：以点 O' 为圆心、线段 OC 长为半径作弧，交射线 $O'A'$ 于点 C'；

第四步：以点 C' 为圆心、线段 CD 长为半径作弧，交前一条弧于点 D'；

第五步：经过点 D' 作射线 $O'B'$．

$\angle A'O'B'$ 就是所要求作的角．

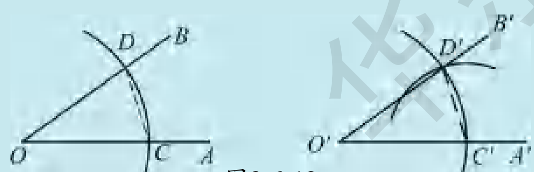
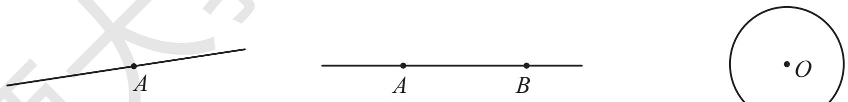


图3.6.13

概括 我们已经用直尺和圆规按一定步骤解决了如下两个作图问题：作一条线段等于已知线段；作一个角等于已知角．这里的“直尺”是一把没有刻度的直尺，“圆规”是一副可以“双腿”张开自如的圆规，它们可以用来作一些简单的图形．例如：过一点任作一条直线；过不同的两点作一条直线；以一点为圆心任作一个圆．如图 3.6.14 所示．



过点 A 作直线　　过点 A、B 作直线　　以点 O 为圆心作圆

图3.6.14

正是以这些基本作图为基础，我们作出了线段和角．人们将利用没有刻度的直尺和圆规这两种工具作几何图形的方法称为“尺规作图”．从古至今，众多数学家对于尺规作图有着极大的兴趣，对于哪些图形可以利用尺规作图作出、哪些图形又不可能利用尺规作图作出的思考和研究，推动了数学的发展．

尺规作图是探索解决数学问题的有效工具．今后我们还将继续利用尺规作图解决其他的几何作图问题，直观地发现更多几何图形的内涵．

我们可以对角进行简单的加减运算，如：

（1）$34°34' + 21°51' = 55°85' = 56°25'$；

（2）$180° - 52°31' = 179°60' - 52°31' = 127°29'$．

观察图 3.6.15 中的 $\angle AOC$、$\angle COB$ 和 $\angle AOB$，如何表示它们之间的关系呢？

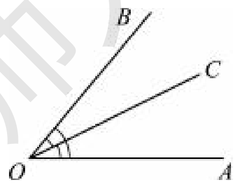


图3.6.15

我们可以用熟悉的“和差”来表示：

$$\angle AOC + \angle COB = \angle AOB,$$

或
$$\angle AOB - \angle AOC = \angle COB,$$

或
$$\angle AOB - \angle COB = \angle AOC.$$

可见，两个角相加或相减，得到的和或差也是角．

做一做

如图 3.6.16，用量角器和直尺在纸上画 $\angle AOB=84°$. 然后沿点 O 对折，使边 OA 和 OB 重合，那么折痕把角分成了大小相等的两部分.

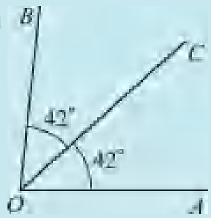


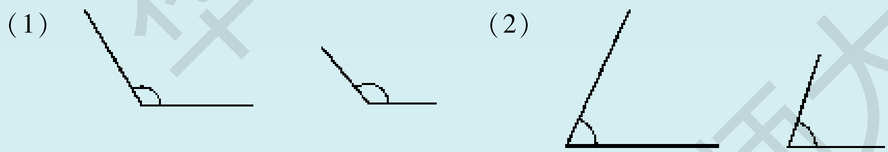
图3.6.16

你也可以用量角器画出等分 $\angle AOB$ 的射线 OC.

从一个角的顶点引出的一条射线，把这个角分成两个相等的角，这条射线叫做这个角的**平分线**(angular bisector).

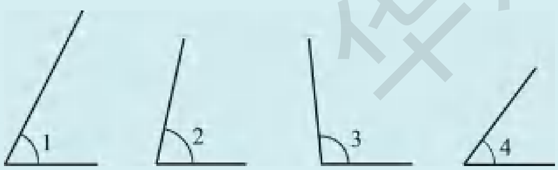
练习

1. 先观察下列各组角，其中哪一个角较大？然后用量角器量一量每个角，看看你的观察结果是否正确.



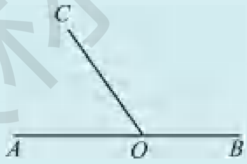
(第 1 题)

2. 请利用三角尺中的角估计下列角的度数，并按大小顺序用“ > ”号连接这四个角.



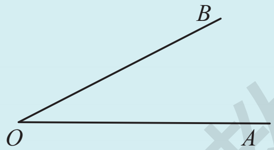
(第 2 题)

3. 如图，点 O 是直线 AB 上的一点，$\angle AOC = 55°$. 画出 $\angle BOC$ 的平分线 OD，并计算 $\angle AOD$ 的度数.



（第 3 题）

4. 已知 $\angle AOB$，利用尺规作图作一个角，使它等于已知角的 2 倍.



（第 4 题）

3. 余角和补角

在我们所用的一副三角尺中，每块都有一个角是 90°，而其他两个角，一块是 30°与 60°，另一块都是 45°，它们的和都是 90°.

在图 3.6.17 中，用量角器量一量两组图中各角的大小，发现也有这样的特殊关系.

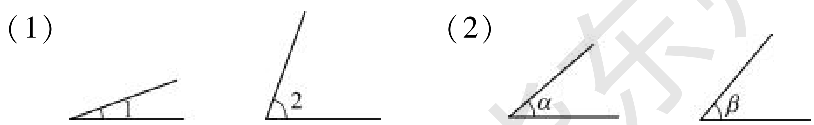


图3.6.17

两个角的和等于 90°（直角），就说这两个角互为**余角**（complementary angle），简称互余.

例如，如果 $\angle 1+\angle 2=90°$，那么$\angle 1$是$\angle 2$的余角，$\angle 2$也是$\angle 1$的余角.

反过来，如果两个角互余，那么把这两个角如图 3.6.18 那样拼在一起的话，就构成一个直角.

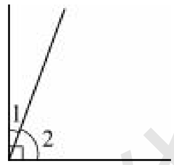


图3.6.18

同样，如果两个角的和等于 180°(平角)，就说这两个角互为**补角**(supplementary angle)，简称互补.

如图 3.6.19，$\angle 3+\angle 4=180°$，所以$\angle 3$、$\angle 4$互为补角.

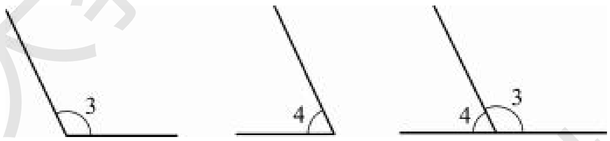


图3.6.19

想想看，如果$\angle 1$与$\angle 2$互余，$\angle 3$与$\angle 4$互余，$\angle 2=\angle 4$，那么$\angle 1$与$\angle 3$有什么关系？相等角的补角又有什么关系？

> 同角或等角的余角相等；同角或等角的补角相等.

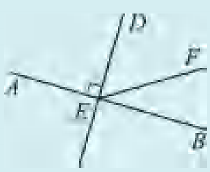
例 3 已知 $\angle\alpha=50°17'$，求$\angle\alpha$的余角和补角.

解 $\angle\alpha$的余角 $=90°-50°17'=39°43'$；

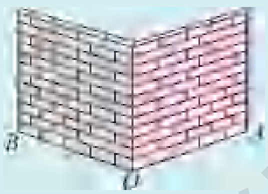
$\angle\alpha$的补角 $=180°-50°17'=129°43'$.

练习

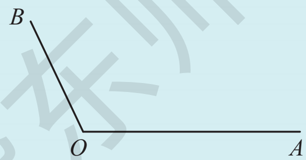
1. 说出图中互余和互补的角.
2. 如图，有两堵围墙，有人想测量地面上所形成的$\angle AOB$的度数，但人又不能进入围墙，只能站在墙外，请问该如何测量？



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，已知$\angle AOB$，利用尺规作图作一个角等于该角的补角.

习题3.6

A 组

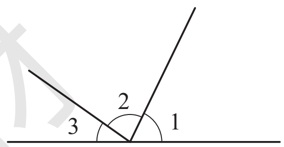
1. 填空：

(1) $77°42' + 34°45' =$ ________；

(2) $108°18' - 56°23' =$ ________；

(3) $180° - (34°54' + 21°33') =$ ________.

2. 时钟的分针 1 小时转了 ________ 度的角，1 分钟转了 ________ 度的角.



（第 3 题）

3. 如图，如果 $\angle 1 = 65°15'$， $\angle 2 = 78°30'$，那么$\angle 3$是多少度？

4. 任意画一个$\angle AOB$，在$\angle AOB$ 的内部引射线 OC、OD，这时图中共有几个角？分别把它们表示出来.

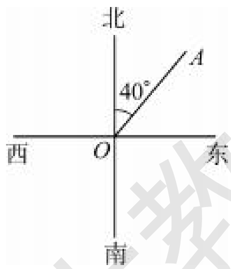
5. 两个相等的钝角有同一个顶点和一条公共边，并且这两个角的另两条边所成的角为 90°，画出图形，并求出这两个钝角的大小.

6. 如图，OA 是表示什么方向的一条射线？仿照这条射线画出表示下列方向的射线：

(1) 南偏东 60°；

(2) 北偏西 70°；

(3) 西南方向(即南偏西 45°).

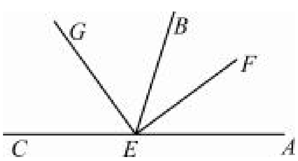


（第 6 题）

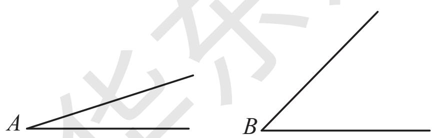
7. $72°20'$的角的余角等于________；$25°31'$的角的补角等于________.

B 组

8. 如图，EF、EG 分别是$\angle AEB$ 和$\angle BEC$ 的平分线，求$\angle FEG$ 的度数，并写出$\angle FEB$ 的余角.



（第 8 题）



（第 9 题）

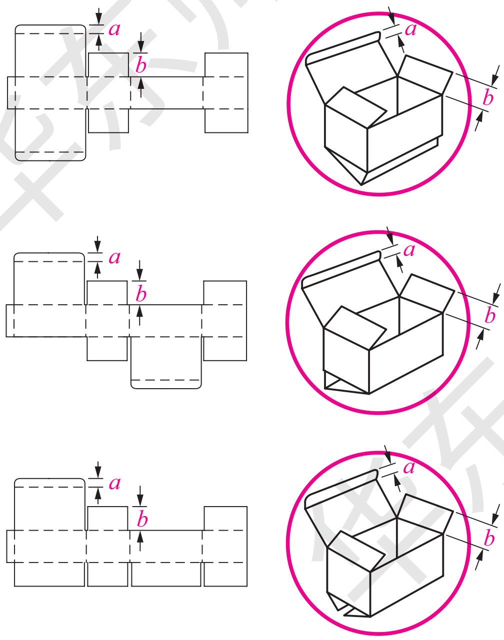
9. 如图，已知$\angle A$ 和$\angle B$，利用尺规作图作$\angle C$，使 $\angle C = \angle A + \angle B$.

数学活动

制作包装盒

“祝你生日快乐，……”，当你唱着这首《生日快乐》歌时，你可能还会收到你的好朋友送给你的生日礼物．打开礼物外面的包装盒，里面包裹着的是好朋友的心意．

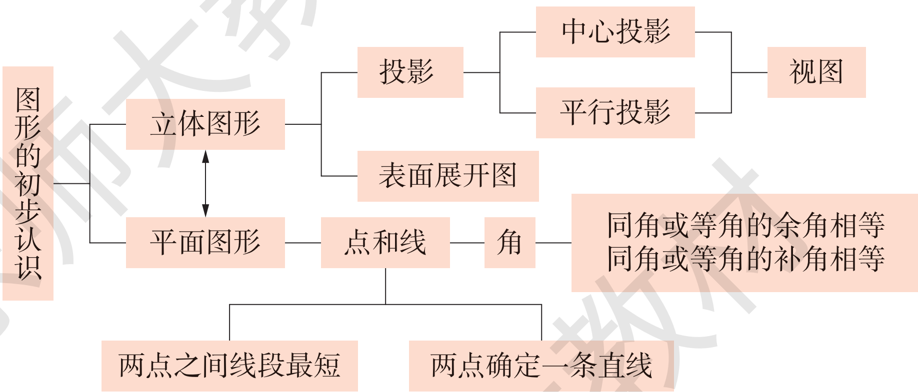
你知道这些包装盒是如何制作的吗？下图是一个包装盒的几种不同制作方法的表面展开示意图．



动手试试看，为你的心爱之物制作一个精美合身的包装盒吧．

小结

一、知识结构



二、要点

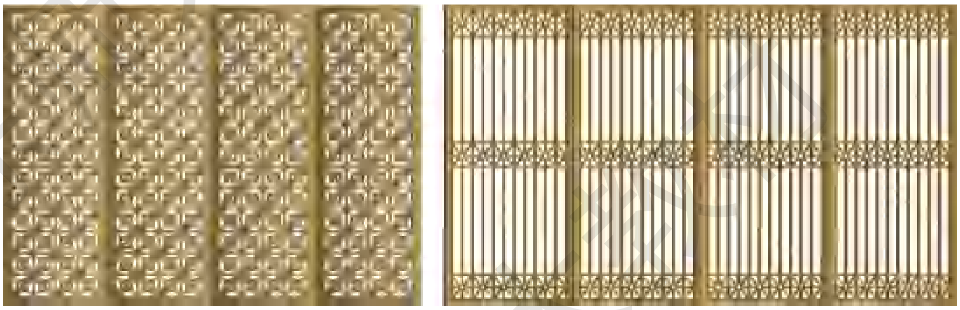
1. 本章从生活中的物体入手，认识抽象得到的立体图形与点、线、面．“抽象”是数学的一种基本思想和基本方法，通过抽象我们可以发现和认识简单的几何图形之间的关系，这是以后进一步抽象及学习研究的基础．

2. 通过本章的学习，相信你体会到了周围的世界是多么地奇妙，看到了立体图形的形状是多么地千变万化．现在你对一些简单的立体图形有了初步的了解，能描述它们的视图，能根据视图想象出这些物体的形状，并能认识某些立体图形的表面展开图；你知道了“两点确定一条直线”和“两点之间线段最短”这两个基本事实，会比较线段的长短、角的大小，会利用尺规作图作线段和角等．

复习题

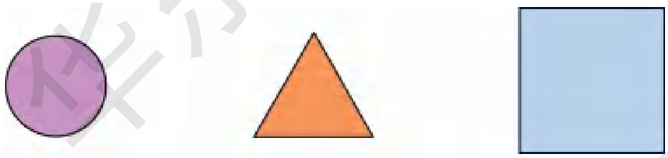
A 组

1. 如图是两幅精致的屏风图案，其中有不少是我们已认识的平面图形，试写出它们的名称.



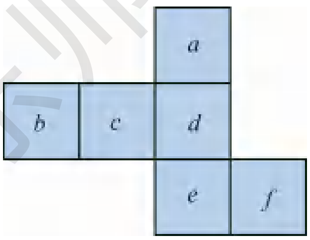
（第 1 题）

2. 如图是一些立体图形的视图，但是观察的方向不同，试说明它们可能是哪种立体图形的视图.



（第 2 题）

3. 如图是正方体的表面展开图，如果 a 在后面，b 在下面，c 在左面，试说明其他各面的位置.



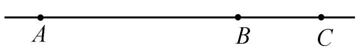
（第 3 题）

4. 如图，A、B、C 三点在同一条直线上，则关于线段 AB、BC、AC 有下列等式成立：

(1) $AB + BC =$ ________；

(2) $AC - BC =$ ________；

(3) $AC - AB =$ ________.



（第 4 题）

5. 在纸上画出四个点(其中任意三点不在同一条直线上)，经过每两点用直尺画一条直线，一共可以画几条？试画出所有的直线.

6. 计算下列各题：

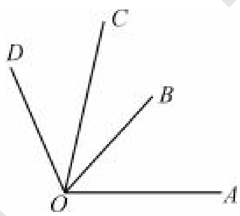
(1) $23°30' =$ ________$°$，$13.6° =$ ________$°$________$'$；

(2) $52°45' - 32°46' =$ ________$°$________$'$；

(3) $18.3° + 26°34' =$ ________$°$________$'$.

(4) $12°17' \times 4 =$ ________$°$________$'$.

7. 根据图形填空：



(第 7 题)

(1) $\angle AOC =$ ________ $+$ ________；

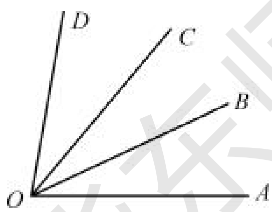
(2) $\angle AOC - \angle AOB =$ ________；

(3) $\angle COD = \angle AOD -$ ________；

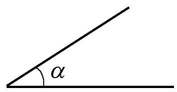
(4) $\angle BOC =$ ________ $- \angle COD$；

(5) $\angle AOB + \angle COD =$ ________ $-$ ________.

8. 如图，$\angle AOD = 80°$，$\angle COD = 30°$，OB 是 $\angle AOC$ 的平分线. 求 $\angle AOC$、$\angle AOB$ 的度数.



(第 8 题)

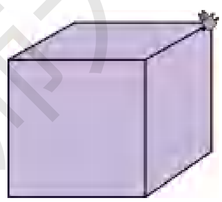


(第 9 题)

9. 如图，已知$\angle\alpha$，试用量角器或三角尺画出它的余角、补角及它的角平分线.

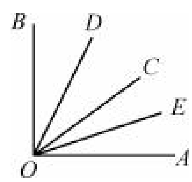
B 组

10. 如图，一只昆虫要从正方体的一个顶点爬到相距它最远的另一个顶点，请你帮它确定一条最短的路线，并说明理由.


(第 10 题)

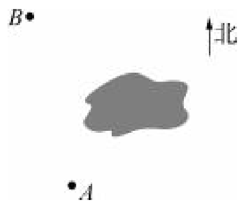
11. 你能用 12 根火柴摆成 5 个正方形吗？能摆成 6 个正方形吗？若能，试画出你摆成的图形.

12. 如图，$\angle AOB$ 是直角，OC 是位于 $\angle AOB$ 内的一条射线，OD 平分$\angle BOC$，OE 平分$\angle AOC$. 求$\angle EOD$ 的度数.



(第 12 题)

13. 在一张地图上有 A、B、C 三地，但地图被墨渍污染，C 地的具体位置看不清楚了，但知道 C 地在 A 地的北偏东 30°，在 B 地的南偏东 45°. 你能确定 C 地的位置吗？



（第 13 题）

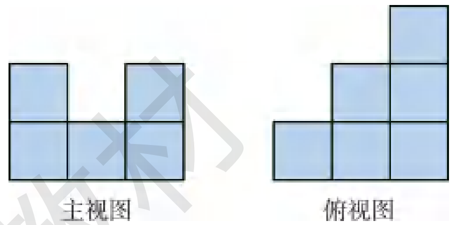
14. （1）一个角与它的余角相等，这个角是怎样的角？

（2）一个角与它的补角相等，这个角是怎样的角？

（3）互补的两个角能否都是锐角？能否都是直角？能否都是钝角？

C 组

15. 几个相同的正方体叠合在一起，该组合体的主视图与俯视图如图所示，那么组合体中正方体的个数至少有几个？至多有几个？



（第 15 题）

16. 一个直立的三棱柱的俯视图是一个三角形，如图，已知这个俯视图的 1 个内角等于 $\angle\alpha$，夹该角的两条边长分别等于线段 m 和 n，试利用尺规作图作出这个俯视图.

（第 16 题）

17. 请以给定的图形“○○、△△、＝”（两个圆、两个三角形、两条平行线段）为构件，尽可能多地构思独特且有意义的图形，并写上一两句贴切、诙谐的解说词. 如图就是符合要求的两个图形. 你还能构思出其他图形吗？比一比，看谁构思得多.

（第 17 题）

第 4 章　相交线和平行线

生活中到处可见相交线和平行线，你知道它们有什么特征吗？你能判定两条直线是否平行吗？

★　本章将研究平面内不重合的两条直线的位置关系：相交和平行．通过对相关角的研究，探索相交线和平行线的特征，以及平行线的判定方法．还将学习通过简单的推理得出数学结论的方法．

4.1 相交线

1. 对顶角

我们可以用不同的字母表示不同的直线．如图4.1.1，两条直线 AB、CD 都经过同一个点 O，我们就说这两条直线相交于点 O，点 O 是它们的**交点**(intersection point)．可以说成“直线 AB、CD 相交于点 O”．

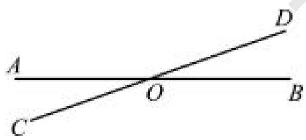


图4.1.1

如图4.1.2，两条直线相交形成了∠1、∠2、∠3和∠4，我们已经知道，有些角之间存在一定的关系，例如：

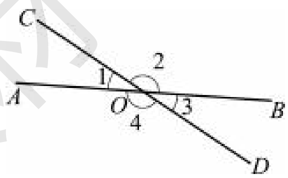


图4.1.2

角	∠1 与∠2	∠2 与∠3	…
位置关系	相邻	相邻	…
数量关系	互补	互补	…

如果两个角既相邻又互补，那么这两个角互为邻补角．如∠1与∠2．

从位置关系与数量关系上看，图中还有哪些角之间存在某种关系呢？

看一看，想一想，将你的发现填入下面的表中：

角			
位置关系			
数量关系			

我们可以直观地发现图中的∠1与∠3是相对的两个角，而且似乎相等．

射线 OA 的反向延长线是指从点 A 到点 O 方向延长得到的一条射线，即射线 OB．

∠1与∠3具有相同的顶点，且∠1的两边 OA、OC 分别与∠3的两边 OB、OD 互为反向延长线，我们

把这样的两个角叫做**对顶角**(opposite angles). $\angle 2$ 与 $\angle 4$ 也是对顶角.

下面我们通过一个具体的例子，算算看，直观所发现的这两个角相等的结论是否正确.

▶ **例 1** 在图 4.1.2 中，$\angle 1=30°$，那么 $\angle 2$、$\angle 3$ 和 $\angle 4$ 各等于多少度？图中存在哪些相等关系？

解 $\angle 2 = 180° - \angle 1 = 180° - 30° = 150°$，

$\angle 3 = 180° - \angle 2 = 180° - 150° = 30°$，

$\angle 4 = 180° - \angle 1 = 180° - 30° = 150°$.

由此，我们得到

$$\angle 1 = \angle 3,\quad \angle 2 = \angle 4.$$

其实，对于任意两条直线相交形成的对顶角，由于它们都有一个相同的补角，所以它们是相等的.

例如，图 4.1.2 中的 $\angle 1$、$\angle 3$ 都与 $\angle 2$ 互补，即

$$\angle 1 + \angle 2 = 180°,\quad \angle 3 + \angle 2 = 180°.$$

因此 $\angle 1 = \angle 3$.

同理 $\angle 2 = \angle 4$.

于是我们得到对顶角的性质：

对顶角相等.

▶ **例 2** 如图 4.1.3，直线 AB、CD 相交于点 E，$\angle AEC = 50°$，求 $\angle BED$ 的度数.

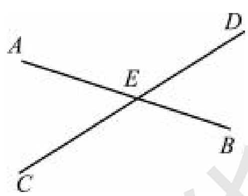
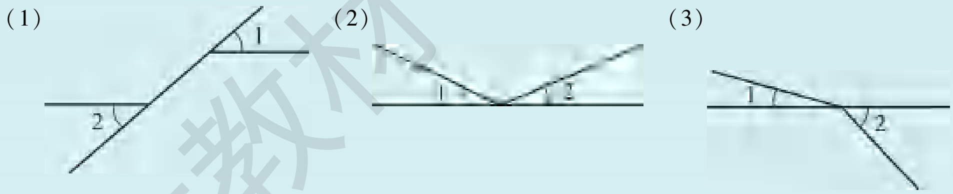


图4.1.3

解 因为直线 AB、CD 相交于点 E，所以 $\angle AEC$ 与 $\angle BED$ 是对顶角. 根据对顶角相等，得 $\angle BED = \angle AEC = 50°$.

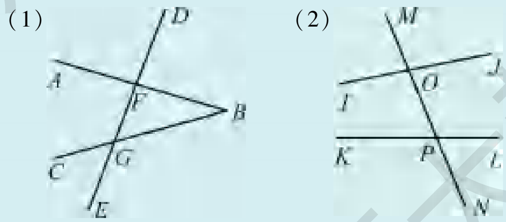
练习

1. 下列各图中的∠1 与∠2 是不是对顶角？



(第 1 题)

2. 如图，直线 AB、CB 分别与直线 DE 相交于点 F、G，直线 IJ、KL 分别与直线 MN 相交于点 O、P，说出各图中的对顶角.



(第 2 题)

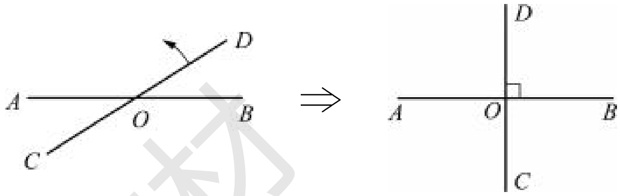
(第 3 题)

3. 如图，∠1 与∠2 是对顶角，$\angle 1 = 180° - \angle A$，$\angle 2 = 35°$，则 $\angle A =$ ________°.

2. 垂线

如图 4.1.4①，直线 AB 与 CD 相交于点 O，我们将直线 CD 绕着点 O 旋转，使∠BOD 为直角(如图 4.1.4②所示). 当两条直线 AB、CD 所构成的四个角中有一个为直角时，其他三个角也都成为直角，此时，直线 AB、CD **互相垂直**(perpendicular)，记作“$AB \perp CD$”，它们的交点 O 叫做**垂足**(foot of a perpendicular). 我们把其中的一条直线叫做另一条直线的**垂线**(perpendicular).

你知道其中的道理吗？



① ②

图4.1.4

在日常生活中，我们经常可以看到线线互相垂直的图形(如图 4.1.5).

图4.1.5

试一试

经过直线 AB 外一点 P，按图 4.1.6 所示的两种方法，画出垂直于直线 AB 的直线．这样的垂线能画多少条呢?

① ②

图4.1.6

如图 4.1.7，你能经过直线 AB 上一点 P，画出垂直于直线 AB 的直线吗？这样的垂线能画多少条呢？

图4.1.7

由上述操作可以得到关于垂线的一个基本事实：

同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

对于线段的垂线，有一种特殊且重要的情况．如图 4.1.8，直线 CD 经过线段 AB 的中点 O，并且垂直于线段 AB，则有 $AO = BO$，$AB \perp CD$．我们把垂直并且平分一条线段的直线叫做这条线段的**垂直平分线**(perpendicular bisector)．如图 4.1.8 所示的直线 CD 就是线段 AB 的垂直平分线.

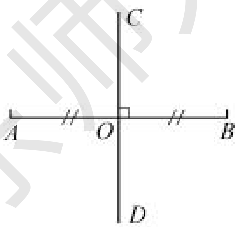


图4.1.8

垂直平分线又可称为中垂线.

在图 4.1.9 所示的方格图中，点 A 是直线 l 外一点，AB 与直线 l 垂直，点 B 为垂足．点 A 与直线 l 上各点的距离长短不一，我们可以发现其中最短的是线段 AB，线段 AB 叫做点 A 到直线 l 的**垂线段**.

从直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫做**点到直线的距离**．例如，线段 AB 的长度就是点 A 到直线 l 的距离.

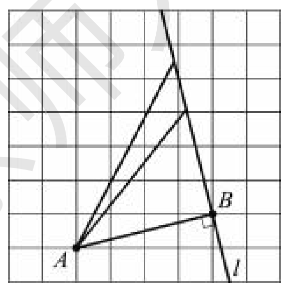


图4.1.9

体育课上是怎样测量跳远成绩的？你知道其中的原因吗？

做一做

如图 4.1.10，小海龟位于图中点 A 处，按下述口令移动：前进 3 格；向右转 90°，前进 5 格；向左转 90°，前进 3 格；向左转 90°，前进 6 格；向右转 90°，后退 6 格；最后向右转 90°，前进 1 格．用粗线将小海龟经过的路线描出来，看一看是什么图形．

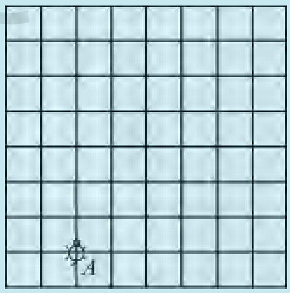


图4.1.10

练习

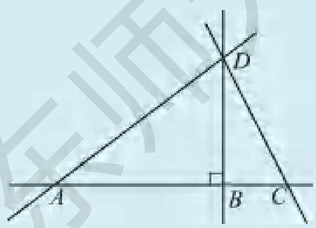
1. 如图，$\angle ABD = 90°$，在下列各语句中填入适当的文字或数字：

（1）点 B 在直线______上，点 D 在直线______外；

（2）直线______与直线______相交于点 A，点 D 是直线______与直线______的交点，也是直线______与直线______的交点，又是直线______与直线______的交点；

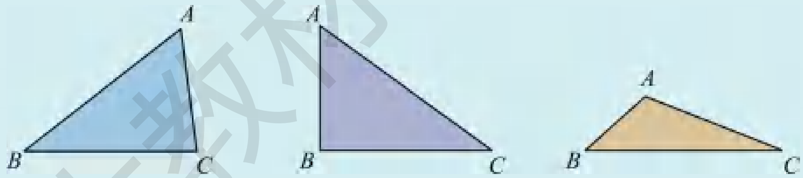
（3）直线______垂直于直线______，垂足为点______；

（4）过点 D 有且只有______条直线与直线 AC 垂直．



（第 1 题）

2. 在如图所示的各个三角形中，分别过点 C 画出直线 AB 的垂线，并量出三角形顶点 C 到直线 AB 的距离．（精确到 1 mm）



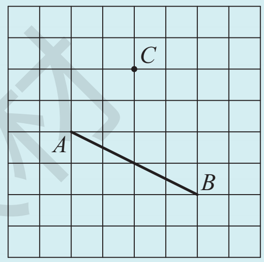
（第 2 题）

3. 在如图所示的方格图中，按下述要求画图并回答问题：

（1）过点 C 画出线段 AB 的垂线，垂足为点 D；

（2）量出点 C 到线段 AB 所在直线的距离（精确到 1 mm）；

（3）画出线段 AB 的垂直平分线．



（第 3 题）

3．同位角、内错角、同旁内角

我们知道，两条直线相交，可以得到四个角．如图 4.1.11，直线 a、b 相交，得到∠1、∠2、∠3、∠4．在这些角中，有的是相对且相等的，有的是相邻且互补的．

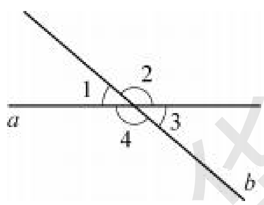


图4.1.11

试分别指出相等的角和互补的角．

而在一个平面内，一条直线 l 与两条直线 a、b 分别相交于点 P、Q，这可以说成“直线 l 分别截直线 a、b 于点 P、Q”．两条直线被另一条直线所截，可得八个角．

如图 4.1.12，直线 l 截直线 a、b，得到 $\angle 1$、$\angle 2$……$\angle 8$．从位置关系上看，这些角有的是对顶角，有的是相邻的角；从数量关系上看，对顶角相等，相邻的角互补．那么除此之外，这八个角中还存在哪些关系呢？

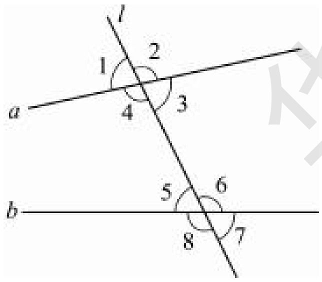


图4.1.12

你会发现，在一般情况下，似乎没有其他的相等或互补关系．你也会发现，从位置关系上看，似乎还存在某些关系．

观察 图 4.1.12 中的 $\angle 1$ 与 $\angle 5$ 的位置有什么关系呢？

从直线 l 来看，$\angle 1$ 与 $\angle 5$ 处于哪个位置？

从直线 a、b 来看，$\angle 1$ 与 $\angle 5$ 又处于哪个位置？

> 图 4.1.12 中的 $\angle 1$ 与 $\angle 5$ 均处于直线 l 的左侧，且分别在直线 a、b 的上方．

我们可以发现，$\angle 1$ 与 $\angle 5$ 处于直线 l 的同一侧，且分别在直线 a、b 的同一方．这样位置的一对角叫做**同位角**(corresponding angles)．

图 4.1.12 中，$\angle 2$ 与 $\angle 6$ 也是同位角，除此以外，同位角还有________________________．

观察 图 4.1.12 中的 $\angle 3$ 与 $\angle 5$ 的位置和同位角 $\angle 1$ 与 $\angle 5$ 相比，有什么一样？有什么不一样？

$\angle 3$ 与 $\angle 5$ 处于直线 l 的__________，直线 a、b 的__________．这样位置的一对角叫做**内错角**(alternate interior angles)．

图 4.1.12 中，内错角还有______________________________．

观察　图 4.1.12 中的∠4 与∠5 的位置和同位角、内错角相比，又有什么一样？有什么不一样？

∠4 与∠5 处于直线 l 的______，直线 a、b 的______．这样位置的一对角叫做**同旁内角**(interior angles on the same side)．

图 4.1.12 中，同旁内角还有____________________．

试一试

图 4.1.13 中，∠1 是直线 a、b 相交所成的一个角，用量角器量出∠1 的度数；画一条直线 c，使直线 c 与直线 b 相交所成的角中有一个与∠1 是一对同位角，且这对同位角的度数相等．

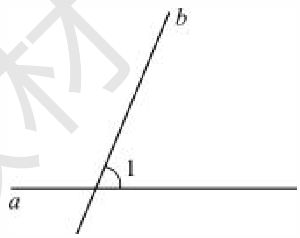
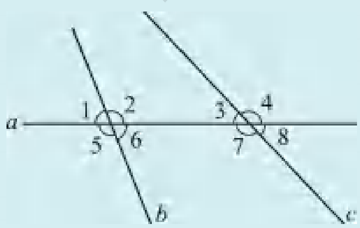


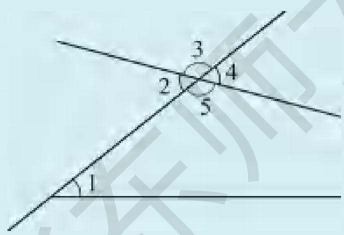
图4.1.13

练习

1. 如图，直线 a 截直线 b、c 所得的同位角有______对，它们是____________________；内错角有______对，它们是____________________；同旁内角有______对，它们是____________________．



(第 1 题)



(第 2 题)

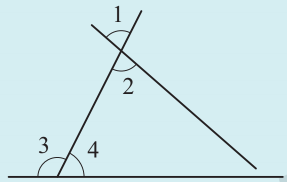
2. 如图，与∠1 是同位角的是______，与∠1 是内错角的是______，与∠1 是同旁内角的是______．

3. 在如图所示的 4 个角的位置关系中，

$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是__________，$\angle 1$ 与 $\angle 3$ 是__________，

$\angle 2$ 与 $\angle 3$ 是__________，$\angle 2$ 与 $\angle 4$ 是__________，

$\angle 3$ 与 $\angle 4$ 是__________.



（第 3 题）

阅读材料

九树成行

你知道这样一道数学趣题吗？

有九棵树，要栽成九行，使得每行恰好有三棵树，应该如何栽树？

如图 1，可能有的同学马上想到画一个正方形，再画出两条对角线，分别连结两组对边的中点，数一数，有九个点了，图 1 中每条线上有了三个点，但可惜的是只有八条线．也就是九棵树，排成了八行，每行有三棵树，离我们的要求，还差了一条线．

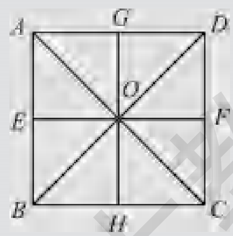


图 1

看来必须寻找新的办法．

我们可以先画两条直线，在每条直线上各任取三点，交叉相连，组成如图 2 所示的图形．

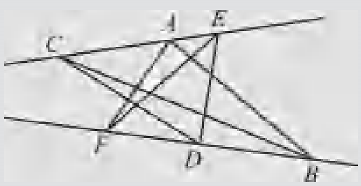


图 2

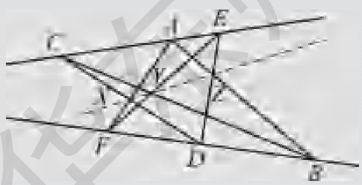


图 3

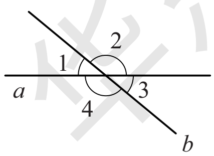
如图 3，交叉相连的线段在中间产生了三个交点 X、Y 与 Z，用你的直尺靠上去，你发现没有，真有那么巧，它们竟然恰好在一条直线上．画出这条线，现在你数数看，刚好是九条线，且每条线上都有三个点．将九棵树按图 3 所示的方法栽上，就解决了这道数学趣题了．

你看！“九树成行”这一数学趣题看起来比较复杂，竟然只用直尺就如此简单地解决了．你若感兴趣，还可进一步探索“九树十行”的问题，充分感受数学的魅力与美．这些问题蕴涵着的深刻的数学道理，竟有意大利的塞瓦(Giovanni Ceva，1647—1734)、古希腊的梅涅劳斯(Menelaus，约 70—约 140)和帕普斯(Pappus，约 290—约 350)等伟大数学家的贡献呢．

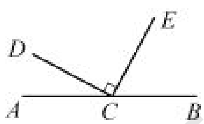
习题4.1

A 组

1. 如图，直线 a、b 相交，得到∠1、∠2、∠3 和∠4．已知 $\angle 1 = 40°$，则 $\angle 2 =$ ________°，$\angle 3 =$ ________°，$\angle 4 =$ ________°．



（第 1 题）



（第 2 题）

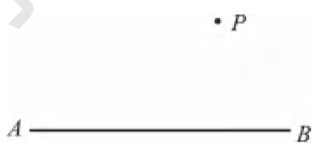
2. 如图，点 C 是直线 AB 上一点，$CD \perp CE$，$\angle ACD = 28°$，则 $\angle BCE =$ ________°．
3. 如图，已知直线 AB 以及直线 AB 外一点 P．按下述要求画图并填空：

(1) 过点 P 画 $PC \perp AB$，垂足为点 C；

(2) P、C 两点间的距离是线段________的长度；

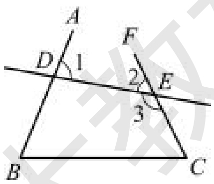
(3) 点 P 到直线 AB 的距离是线段________的长度；

(4) 点 P 到直线 AB 的距离为________(精确到 1mm)．

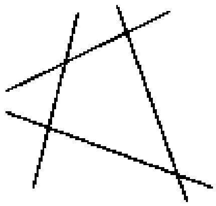


（第 3 题）

4. 如图，∠______与∠C是直线DE与BC被直线FC所截得的同位角，∠______与∠______是直线AB与FC被直线DE所截得的内错角，∠B与∠C是直线AB与FC被直线______所截得的同旁内角.



（第 4 题）


（第 5 题）

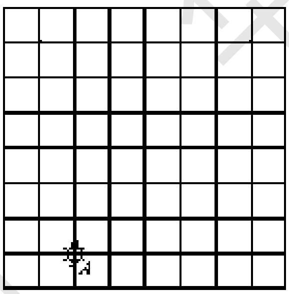
5. 如图，在四条直线组成的图形中，试找出两对对顶角、两对同位角、两对内错角和两对同旁内角.（用适当的方法表示这些角）

B 组

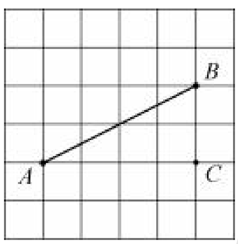
6. 如图，小海龟位于图中点A处，按下述口令移动：前进 6 格；向右转 90°，前进 4 格；向右转 90°，前进 1 格；向右转 90°，前进 3 格；向左转 90°，前进 1 格；向左转 90°，前进 2 格；向右转 90°，前进 1 格；向右转 90°，前进 2 格；向右转 90°，后退 3 格；最后向左转 90°，前进 1 格.

用粗线将小海龟经过的路线描出来，看一看是什么图形.

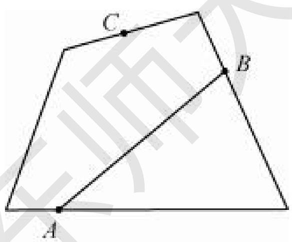
7. 如图，A、B、C三点均为方格图中的格点. 试用直尺过点C画出线段AB的垂线和线段AB的垂直平分线.



（第 6 题）



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，线段AB和点C在四边形纸片上，你能通过折纸的方法，折出经过点C且与线段AB垂直的直线的折痕吗？能折出线段AB的垂直平分线吗？说说你的想法.

4.2 平行线

1. 平行线

我们已经知道，在同一平面内不相交的两条直线叫做**平行线**(parallel lines). 如图 4.2.1，直线 a 与直线 b 互相平行，记作“$a \parallel b$”.

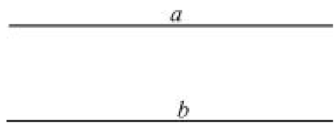


图4.2.1

在同一平面内，两条不重合的直线的位置关系只有两种：相交或平行.

你能按照图 4.2.2 所示的方法，画一条直线 b 与已知直线 a 平行吗?

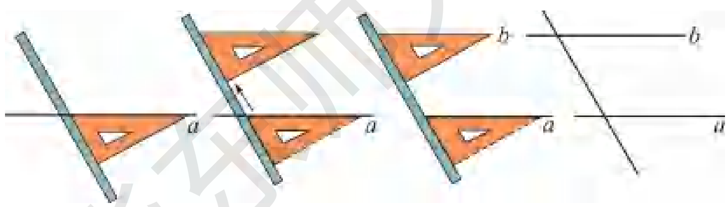


图4.2.2

平行线在生活中很常见，如图 4.2.3 是上海国家会展中心的局部，它包含许多平行线.

图4.2.3

做一做

如果在直线 a 外有一个已知点 P，那么经过点 P 可以画多少条直线与已知直线 a 平行？请动手画一画.

动手操作的结果表明，经过直线外一点 P 只能画一条直线与已知直线 a 平行. 于是我们得到关于平行线的一个基本事实：

过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行.

试一试

画一条直线 a，按图 4.2.4 所示的方法，画一条直线 b 与直线 a 平行，再向上推三角板，画另一条直线 c，也与直线 a 平行.

你发现直线 b 与直线 c 有什么关系？你的同伴是否也有类似的发现？

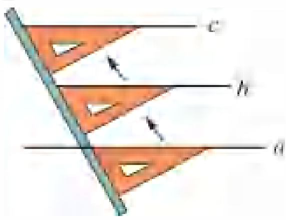


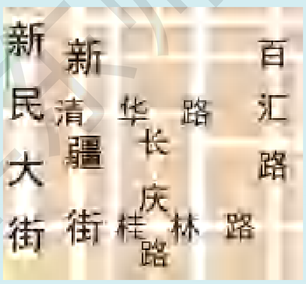
图4.2.4

此时，你会发现直线 b 与直线 c 也是平行的. 这就是说：

如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

练习

1. 使用直尺、量角器和三角板，在如图所示的某平面图上找出互相平行的道路和互相垂直的道路.

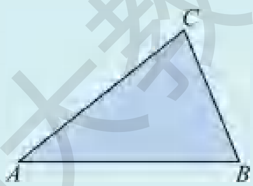


（第 1 题）

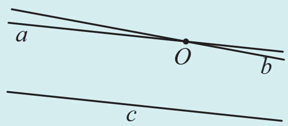
2. 根据下列语句，利用所给三角形 ABC 画出图形：

（1）过三角形 ABC 的顶点 C，画出平行于 AB 的直线 MN；

（2）过三角形 ABC 的边 AB 的中点 D，画出平行于 AC 的直线，交 BC 于点 E．



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，两条直线 a、b 相交于点 O． 如果直线 a // 直线 c，那么直线 b 能与直线 c 平行吗？为什么？

2．平行线的判定

要判定两条直线是否平行，我们无法看到这两条直线在无限延长的过程中是否永远不相交．那么从前面画平行线的过程，我们可以得到什么启示呢？

在图 4.2.2 所示的画图过程中，三角板沿着直尺的方向由原来的位置移动到另一个位置，三角板紧靠直尺的一边和紧靠直线 a 的一边所成的角在移动前的位置与移动后的位置构成了一对同位角，其大小始终没变，因此，只要保持同位角相等，就可以保证画出的直线与已知直线的方向一致，即平行于已知直线.

于是，可以得到如下关于平行线的又一个基本事实：

两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行.

简写成：**同位角相等，两直线平行.**

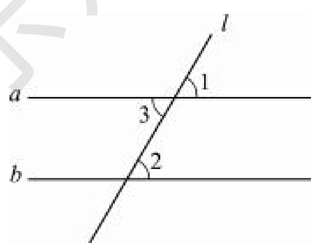


图4.2.5

例如，如图 4.2.5，直线 a、b 被直线 l 所截，如果 $\angle 1 = \angle 2$，那么 a // b.

除了同位角，我们能否依据内错角或同旁内角判定两条直线平行呢？

如图 4.2.5，如果内错角相等，即 $\angle 2 = \angle 3$，由于 $\angle 1 = \angle 3$，因此就有 $\angle 1 = \angle 2$，于是根据“同位角相等，两直线平行”，可得 $a \parallel b$．这就是说：

两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行．

简写成：**内错角相等，两直线平行．**

我们还可以得到：

两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么这两条直线平行．

简写成：**同旁内角互补，两直线平行．**

你能说明其中的理由吗？

概括

平行线的判定方法：

1. 同位角相等，两直线平行；
2. 内错角相等，两直线平行；
3. 同旁内角互补，两直线平行．

思考

我们已经知道利用尺规作图可以作一条线段等于已知线段，以及作一个角等于已知角的方法．那么，如何过已知直线外一点作该直线的平行线呢？

由平行线的判定方法，你自然会想到在直线 AB 和直线外一点 P 处，设法如图 4.2.6 那样构造一对相等的同位角 $\angle 1$ 和 $\angle 2$，那样就可以作出所需要的平行线了．

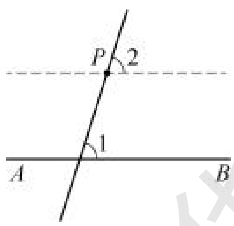


图4.2.6

由此，你能发现利用尺规作图过已知直线外一点作该直线的平行线的方法吗？

试一试

如图 4.2.7，已知直线 AB，以及直线 AB 外一点 P，试利用尺规作图按下列作法准确地过点 P 作直线 AB 的平行线：

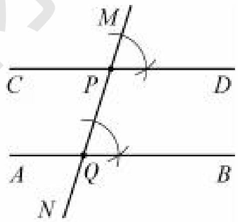


图4.2.7

（1）在直线 AB 上取一点 Q，经过点 P 和点 Q，作直线 MN；

（2）作 $\angle MPD = \angle PQB$，并使得 $\angle MPD$ 与 $\angle PQB$ 是一对同位角；

（3）反向延长射线 PD，得到直线 CD．

直线 CD 就是过点 P 所要求作的直线 AB 的平行线.

借助“内错角相等”，是否也可以作出所需要的平行线呢？

▶ **例 1** 如图 4.2.8，直线 a、b 被直线 l 所截，已知 $\angle 1 = 115°$，$\angle 2 = 115°$，直线 a、b 平行吗？为什么？

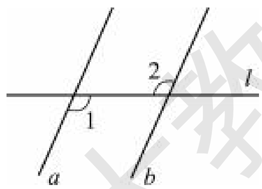


图4.2.8

分析 由已知条件可得 $\angle 1 = \angle 2$．根据“内错角相等，两直线平行”，可知 $a \parallel b$.

我们用符号“$\because$”“$\therefore$”分别表示“因为”“所以”，于是分析中的推理过程就可以写成如下形式.

解 $\because$ $\angle 1 = 115°$(已知)，$\angle 2 = 115°$(已知)，

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$(等量代换).

$\therefore$ $a \parallel b$(内错角相等，两直线平行).

括号内所写的，就是括号前这一结论成立的理由。

等量代换以及等式的性质是我们常用的推理依据。

读一读

“推理”是数学的一种基本思想，包括归纳推理和演绎推理．归纳推理是一种从特殊到一般的推理，我们通过一些探索、操作，得到某些猜想的过程就是在做这样的推理．数与代数中由一些具体的结果，归纳得到一般的结论，也是这样的推理．演绎推理是一种从一般到特殊的推理，它借助于一些公认的基本事实及由此推导得到的结论，通过推断，说明最后结论的正确．例 1 采用的就是演绎推理．

例 2 如图 4.2.9，在四边形 $ABCD$ 中，已知 $\angle B = 60°$，$\angle C = 120°$，AB 与 CD 平行吗？AD 与 BC 平行吗？

图4.2.9

解 ∵ $\angle B = 60°$(已知)，$\angle C = 120°$(已知)，

∴ $\angle B + \angle C = 180°$(等式的性质)．

∴ $AB \parallel CD$(同旁内角互补，两直线平行)．

本题中，根据已知条件，无法判定 AD 与 BC 是否平行．

例 3 如图 4.2.10，在同一平面内，直线 CD、EF 均与直线 AB 垂直，点 D、F 为垂足．试判断 CD 与 EF 是否平行．

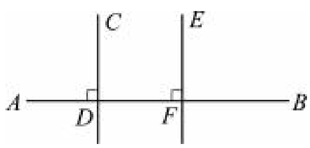


图4.2.10

解 ∵ $CD \perp AB$(已知)，$EF \perp AB$(已知)，

∴ $\angle ADC = \angle AFE = 90°$．

∴ $CD \parallel EF$(同位角相等，两直线平行)．

此例告诉我们：

同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行．

练习

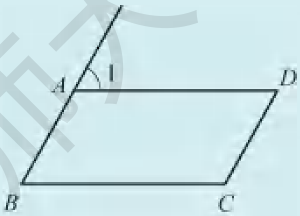
1. 根据题图，在下列解答中，填上适当的理由：

(1) ∵ $\angle B=\angle 1$(已知)，

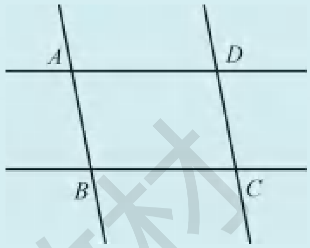
∴ $AD\parallel BC$(　　　　　　　　　　).

(2) ∵ $\angle D=\angle 1$(已知)，

∴ $AB\parallel CD$(　　　　　　　　　　).



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 根据题图，在下列解答中，填空：

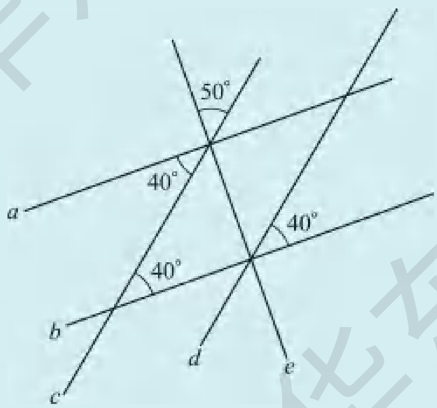
(1) ∵ $\angle BAD+\angle ABC=180°$(已知)，

∴ (　　) $\parallel$ (　　)(同旁内角互补，两直线平行).

(2) ∵ $\angle BCD+\angle ABC=180°$(已知)，

∴ (　　) $\parallel$ (　　)(同旁内角互补，两直线平行).

3. 根据图中给出的条件，指出互相平行的直线和互相垂直的直线.



(第 3 题)

3. 平行线的性质

如图 4.2.11，我们已经学会借助第三条直线与两条已知直线构成的同位角、内错角或同旁内角，判断这两条已知直线是否平行．如果已知直线 a 与直线 b 平行，那么这些角之间又具有什么性质呢？

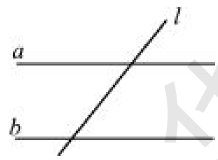


图4.2.11

为此，我们再次借助第三条直线 l，用它去截平行直线 a 与 b，探索截得的同位角、内错角、同旁内角分别有什么关系．

试一试

翻开你的数学练习横格本，每一页上都有许多如图 4.2.12 所示的互相平行的横线条，随意画一条斜线与这些横线条相交，找出其中任意一对同位角．观察或用量角器度量这对同位角，你有什么发现？

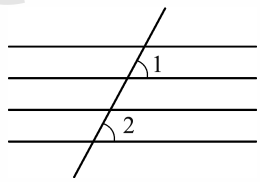


图4.2.12

你会发现它们相等．

那么，一般情况下，如图 4.2.13，如果直线 a 与直线 b 平行，直线 l 与直线 a、b 分别交于点 O 和点 P，其中的同位角 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 也必定相等吗？

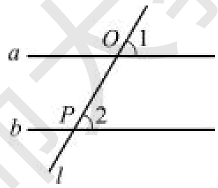


图4.2.13

如果不相等，会出现什么情况呢？

此时，如图 4.2.14，我们可以以点 O 为顶点，画另一个角 $\angle 1'$，使 $\angle 1' = \angle 2$，这样就画出了过点 O 的另一条直线 a'．由于 $\angle 1' = \angle 2$，根据“同位角相等，两直线平行”的基本事实，可以得到 $a' \parallel b$．现在你会发现经过点 O 竟然有两条直线 a、a' 与直线 b 平行，这就与“过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行”矛盾了．

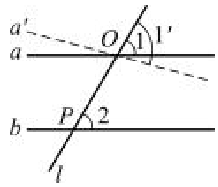


图4.2.14

因此∠1 与∠2 一定相等．这就是说：

两条平行直线被第三条直线所截，同位角相等．

简写成：**两直线平行，同位角相等．**

有了“两直线平行，同位角相等”，我们就能用推理的方法得出“两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等”．

如图 4.2.15，我们将∠1 的对顶角记为∠3．

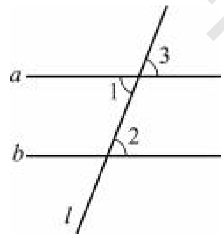


图4.2.15

∴ ∠1 = ∠3(对顶角相等)．

∵ $a \parallel b$(已知)，

∴ ∠3 = ∠2(两直线平行，同位角相等)．

∴ ∠1 = ∠2(等量代换)．

有了“两直线平行，同位角相等”，我们也可以用推理的方法得出“两条平行直线被第三条直线所截，同旁内角互补”．

你能说明其中的理由吗?

于是可得：

两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等．

简写成：**两直线平行，内错角相等．**

两条平行直线被第三条直线所截，同旁内角互补．

简写成：**两直线平行，同旁内角互补．**

概括 平行线的性质：

1. 两直线平行，同位角相等；
2. 两直线平行，内错角相等；
3. 两直线平行，同旁内角互补．

▶ **例 4** 如图 4.2.16，已知直线 $a \parallel b$， ∠1 = 50°， 求∠2 的度数．

解 ∵ $a \parallel b$(已知)，

∴ ∠2 = ∠1(两直线平行，内错角相等)．

∵ ∠1 = 50°(已知)，

∴ ∠2 = 50°(等量代换)．

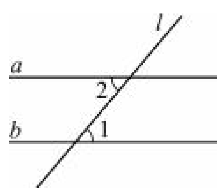


图4.2.16

▶ **例 5** 如图 4.2.17，在四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB // CD$， $\angle B = 60°$， 求$\angle C$ 的度数．能否求得$\angle A$ 的度数？

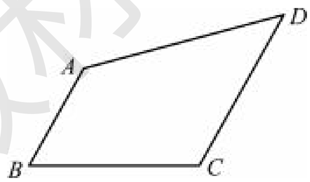


图4.2.17

解 $\because$ $AB // CD$(已知)，

$\therefore$ $\angle B + \angle C = 180°$(两直线平行，同旁内角互补)．

$\because$ $\angle B = 60°$(已知)，

$\therefore$ $\angle C = 180° - \angle B = 120°$(等式的性质)．

根据题目的已知条件，无法求出$\angle A$ 的度数．

▶ **例 6** 将如图 4.2.18 所示的方格图中的图形向右平行移动 4 格，再向上平行移动 3 格，画出平行移动后的图形．

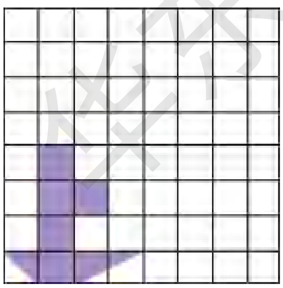


图4.2.18

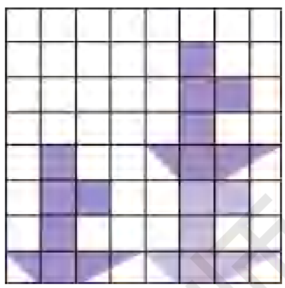


图4.2.19

解 如图 4.2.19 所示的图形，即为原图形，以及原图形向右平行移动 4 格，再向上平行移动 3 格后的图形．

从图中可以看出，原图形中的每一个顶点及每一条边都向右平行移动了 4 格，再向上平行移动了 3 格．

练习

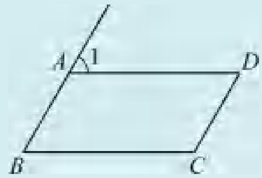
1. 根据题图，在下列解答中，填上适当的理由：

(1) $\because$ $AD \parallel BC$(已知)，

$\therefore$ $\angle 1 = \angle B$(　　　　　　　　　　)．

(2) $\because$ $AB \parallel CD$(已知)，

$\therefore$ $\angle 1 = \angle D$(　　　　　　　　　　)．



(第 1 题)

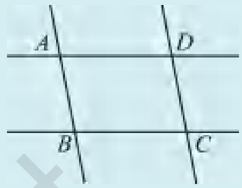
2. 根据题图，在下列解答中，填空：

(1) $\because$ $AD \parallel BC$(已知)，

$\therefore$ $\angle$(　　) + $\angle ABC = 180°$(两直线平行，同旁内角互补)．

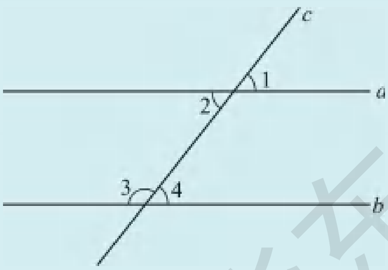
(2) $\because$ $AB \parallel CD$(已知)，

$\therefore$ $\angle ABC + \angle$(　　) $= 180°$(两直线平行，同旁内角互补)．

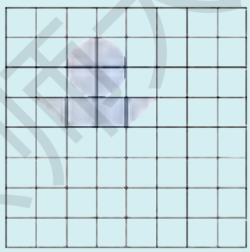


(第 2 题)

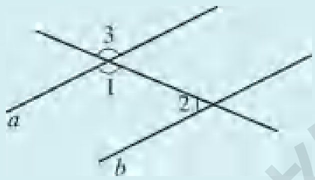
3. 如图，两条平行直线 a、b 被第三条直线 c 所截．若 $\angle 1 = 52°$，那么 $\angle 2 =$ ________，$\angle 3 =$ ________，$\angle 4 =$ ________．



(第 3 题)



(第 4 题)



(第 5 题)

4. 如图，将方格图中的图形向右平行移动 3 格，再向下平行移动 4 格，画出平行移动后的图形．

5. 如图，已知直线 $a \parallel b$，$\angle 3 = 131°$，求 $\angle 1$、$\angle 2$ 的度数．

阅读下面的解答过程，并填空(理由或数学式)．

解　$\because$ $\angle 3 = 131°$(　　　　　　)，

又$\because$ $\angle 3 = \angle 1$(　　　　　　　　)，

$\therefore$ $\angle 1 =$(　　)(　　　　　　　　)．

$\because$ $a \parallel b$(　　　　　　)，

$\therefore$ $\angle 1 + \angle 2 = 180°$(　　　　　　　　　　　　　　)，

$\therefore$ $\angle 2 =$(　　)(等式的性质)．

信息技术应用

画直线等分三角形的面积

1. 利用动态几何软件，我们可以进一步探索平行线的特征．画出如图 1 所示的两个三角形，这两个三角形具有共同的底边 AB，且另一顶点 C、D 均在与 AB 平行的直线 n 上，利用动态几何软件的测量功能，我们发现这两个三角形的面积相等．如图 2 所示，拖动点 D(或点 C)，改变点 D(或点 C)在直线 n 上的位置，你发现了什么？

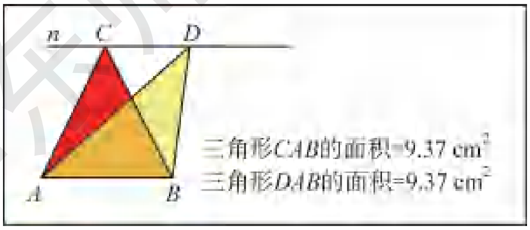


图 1

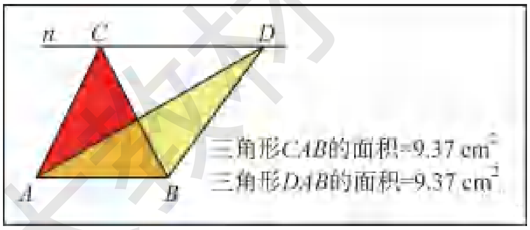


图 2

可以发现，当两个三角形底边相同、顶点的连线与底边平行时，这两个三角形的面积相等．

2. 你能经过三角形 ABC 的顶点 A，作一条直线平分这个三角形的面积吗？若所作直线与边 BC 的交点为 D，如图 3 所示，则点 D 与 BC 有什么关系？为什么？(我们擦去直线在三角形外的部分，下同)．你能经过三角形一边的中点，作一条直线平分这个三角形的面积吗？

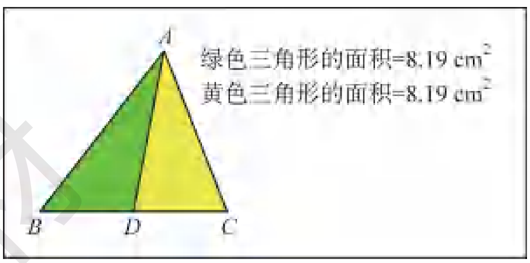


图 3

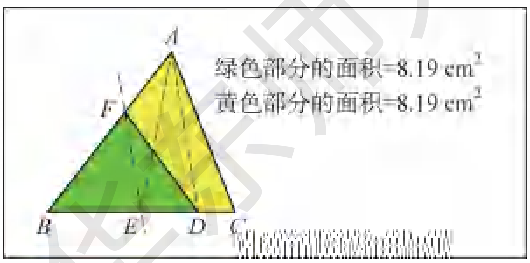


图 4

3. 如果点 D 既不是三角形的顶点，也不是边的中点，那么经过三角形 ABC 边上的一点 D，怎样作一条直线平分三角形 ABC 的面积呢？

不妨设点 D 在边 BC 上．我们知道边 BC 上的中线 AE 能平分三角形的面积．如何作直线 DF，使三角形 ADF 的面积与三角形 ADE 的面积相等，从而平分三角形 ABC 的面积呢？

连结 AD，过边 BC 的中点 E 作 AD 的平行线，交 AB 或 AC 于点 F（若点 D 在 CE 上，则点 F 在 AB 上；若点 D 在 BE 上，则点 F 在 AC 上），然后过点 D、F 作直线 DF，直线 DF 就是所要求作的直线，如图 4 所示．请说明理由．

利用动态几何软件，可以作点的动画，让点 D 沿着三角形的三边移动，我们就能看到经过点 D 平分三角形面积的直线的所有情况，如图 5 和图 6 所示．

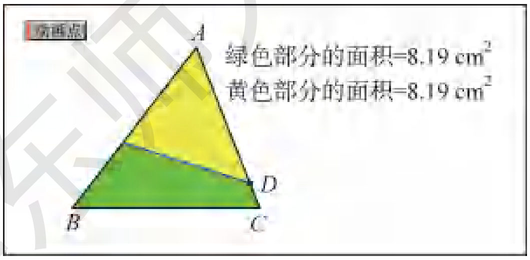


图 5

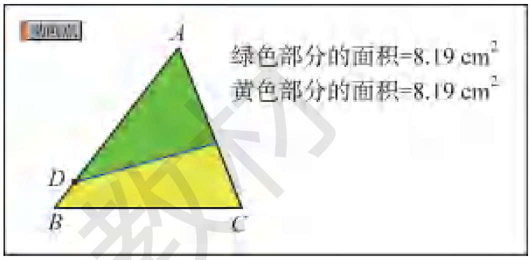


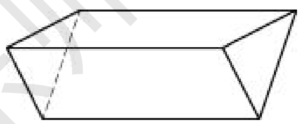
图 6

习题4.2

A 组

1. 在同一平面内，与已知直线 a 平行的直线有________条，而经过直线 a 外一点 P，与已知直线 a 平行的直线有且只有________条．

2. 用平行移动三角板的方法可以检验出图中共有平行线________对．



（第 2 题）

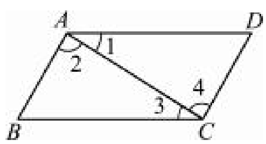
3. 如图，已知 $\angle 2=\angle 4$，$\angle 1=\angle 3$，在下列解答中，填空（理由或数学式）：

（1）$\because$ $\angle$(　　) $=$ $\angle$(　　)（已知），

$\therefore$ $AB \parallel CD$ (　　　　　　　　　　)．

（2）$\because$ $\angle$(　　) $=$ $\angle$(　　)（已知），

$\therefore$ $AD \parallel BC$ (　　　　　　　　　　)．

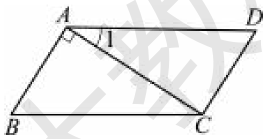


（第 3 题）

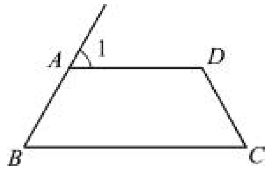
4. 如图，已知 $\angle 1 = 30°$， $\angle B = 60°$， $AB \perp AC$.

(1) $\angle DAB + \angle B =$ ________.

(2) AD 与 BC 平行吗？AB 与 CD 平行吗？若平行，请说明理由；若不一定，那么再加上什么条件就平行了呢？



（第 4 题）

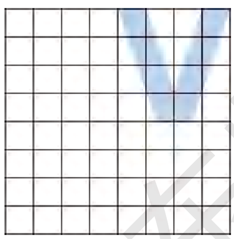


（第 5 题）

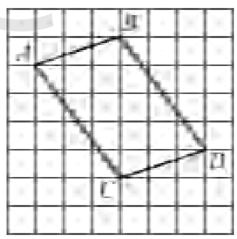
5. 如图，$AD \parallel BC$， $\angle B = 60°$， $\angle 1 = \angle C$，那么 $\angle C =$ ________.

B 组

6. 如图，将方格图中的图形向左平行移动 3 格，再向下平行移动 4 格，画出平行移动后的图形.



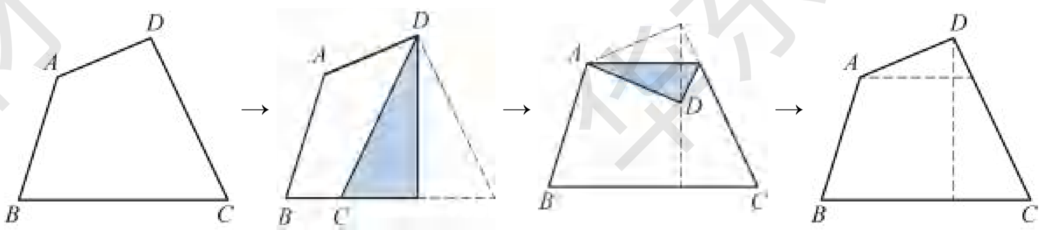
（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，线段 CD 是线段 AB 经过向右平行移动________格，再向下平行移动________格后得到的线段．线段 BD 向左平行移动________格，再向下平行移动________格后可得到线段 AC．

8. 如图，已知四边形纸片 $ABCD$．你能按如图所示的折纸方法，折出经过点 A 且平行于 BC 的折痕吗？说说你的理由.



（第 8 题）

数学活动

画平行线

我们曾利用手中的直尺和三角板，过直线外一点画出与已知直线平行的直线，你可能还见过木工师傅用角尺画出平行线的方法.（如图 1、图 2）

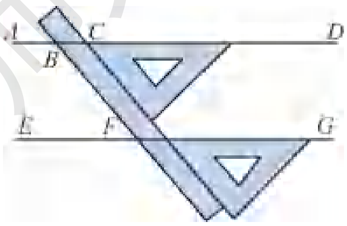


图 1

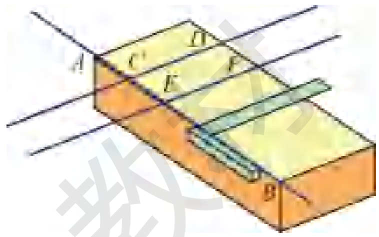


图 2

两者的原理一样，都是依据平行线的判定定理：同位角相等，两直线平行.

小明还发现了另一种折纸的方法：

（1）如图 3，将直线 AB 翻折，使折痕过点 P，直线的左、右两边互相重合；

（2）如图 4，将已得到的第一条折痕在点 P 处翻折，使上、下两部分重合，得到第二条折痕.

图 3

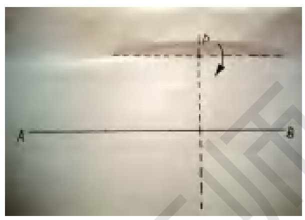


图 4

小明由此断定第二条折痕就是所求的直线，即过点 P 平行于已知直线 AB 的直线.

你知道小明画平行线方法的理由吗？

你还能找到其他画平行线的方法吗？

上网搜一搜，动脑想一想，动手试一试、画一画，大家一起交流，相信一定能找到更多画平行线的方法！

小结

一、知识结构

- 相交线和平行线
  - 相交线
    - 对顶角相等
    - 同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直
  - 平行线
    - 过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行
    - 平行线的判定
      - 同位角相等，两直线平行
      - 内错角相等，两直线平行
      - 同旁内角互补，两直线平行
    - 平行线的性质
      - 两直线平行，同位角相等
      - 两直线平行，内错角相等
      - 两直线平行，同旁内角互补

二、要点

1. 小学里我们已经学过相交线和平行线．当时我们只是通过观察，体会相交线和平行线的一些基本属性．本章在小学学习的基础上，深入学习相交线和平行线，并通过数学说理的方法，从我们所公认的一些基本事实出发，推导出平行线的判定方法、平行线的性质以及其他一些有用的结论．这些判定方法及性质等都是今后进一步学习几何推理的依据．

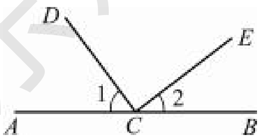
2. “推理”是数学的一种基本思想，通过推理，我们可以深入理解所研究的对象之间的逻辑关系，而且可以用符号和术语清晰地表达这种关系．本章的推理是演绎推理，通过这样的推理，我们可以完全确信最后结论的正确，体现了数学的严谨性．

复习题

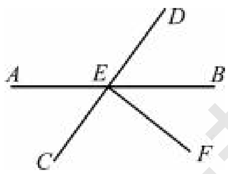
A 组

1. 如图，点 A、B、C 在同一条直线上，$\angle 1 = 53^\circ$，$\angle 2 = 37^\circ$，则 CD 与 CE 垂直吗？

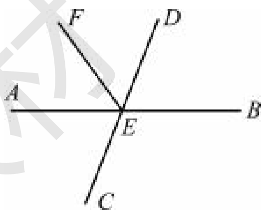
2. 如图，直线 AB、CD 相交于点 E，$\angle BEF = 40^\circ$，$\angle CEF = 85^\circ$，则 $\angle AED =$ ________°.



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

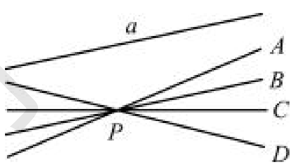
3. 如图，直线 AB、CD 相交于点 E，EF 平分 $\angle AED$，$\angle DEF = 55^\circ$，则 $\angle BEC =$ ________°.

4. 如图，某地为了加快乡村振兴，要从村庄 P 修一条村道，使村民自村庄 P 出发到公路的距离最短，试画出这条村道，并说明理由.

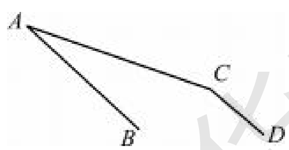
(第 4 题)

5. 如图，经过直线 a 外一点 P 的 4 条直线中，与直线 a 平行的直线是________.

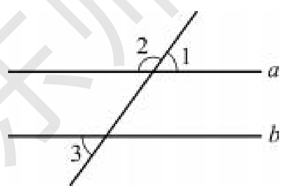
6. 如图，如果 $AB \parallel CD$，那么 $\angle A$ 与 $\angle C$____________.



(第 5 题)



(第 6 题)

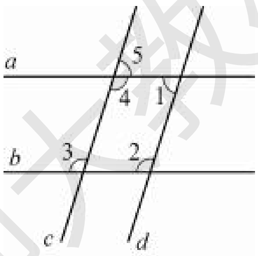


(第 7 题)

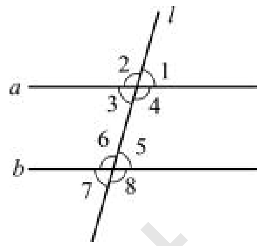
7. 如图，如果 $\angle 1 = \angle 3$，那么直线 a 与 b 平行吗？当 $\angle 2$ 与 $\angle 3$ 满足什么关系时，直线 a 与 b 平行？

B 组

8. 如图，a、b、c、d 均为直线．如果希望 $a \parallel b$，那么需要 $\angle 1$ 至 $\angle 5$ 中哪两个角相等？如果希望 $c \parallel d$，那么需要 $\angle 1$ 至 $\angle 5$ 中哪两个角互补？



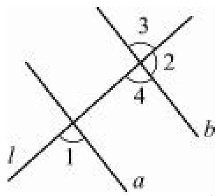
（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，已知平行直线 a、b 被直线 l 所截．如果 $\angle 1 = 75°$，那么 $\angle 2 =$ ________°，$\angle 3 =$ ________°，$\angle 4 =$ ________°，$\angle 5 =$ ________°，$\angle 6 =$ ________°，$\angle 7 =$ ________°，$\angle 8 =$ ________°．

10. 如图，直线 $a \parallel b$，$\angle 3 = 85°$，求 $\angle 1$、$\angle 2$ 的度数．



（第 10 题）

阅读下面的解答过程，并填空（理由或数学式）．

解　∵ $a \parallel b$（　　　　），

∴ $\angle 1 = \angle 4$（　　　　　　　　　　　　）．

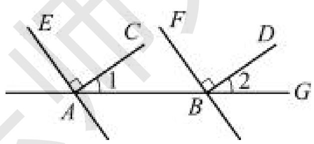
∵ $\angle 4 = \angle 3$（　　　　　　），$\angle 3 = 85°$（　　　　　），

∴ $\angle 1 =$（　　　　　）（等量代换）．

又∵ $\angle 2 + \angle 3 = 180°$，

∴ $\angle 2 =$（　　　　　）（等式的性质）．

11. 如图，已知 $AC \perp AE$，$BD \perp BF$，$\angle 1 = 35°$，$\angle 2 = 35°$，则 AC 与 BD 平行吗？AE 与 BF 平行吗？



（第 11 题）

阅读下面的解答过程，并填空（理由或数学式）．

解　∵ $\angle 1 = 35°$（　　　　），$\angle 2 = 35°$（　　　　），

∴ $\angle 1 = \angle 2$（　　　　　），

∴（　　　）$\parallel$（　　　）（　　　　　　　　　　　　）．

又∵ $AC \perp AE$（　　　　　），

∴ $\angle EAC = 90°$，

$\therefore$ $\angle EAB=\angle EAC+\angle 1=$(　　　　　)(等式的性质).

同理可得 $\angle FBG=\angle FBD+\angle 2=$(　　　　　).

$\therefore$ $\angle EAB=$(　　　　　)(等量代换),

$\therefore$ (　　)$/\!/$(　　)(　　　　　　　　　　).

12. 如图，如果 $AB/\!/CD$，$\angle B=37°$，$\angle D=37°$，那么 BC 与 DE 平行吗?阅读下面的解答过程，并填空(理由或数学式).

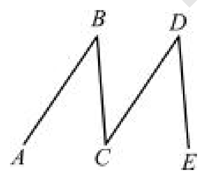
解　$\because$ $AB/\!/CD$(　　　),

$\therefore$ $\angle B=$(　　　)(　　　　　　　　　　).

$\because$ $\angle B=\angle D=37°$(　　　　),

$\therefore$ (　　)$=\angle D$(　　　　).

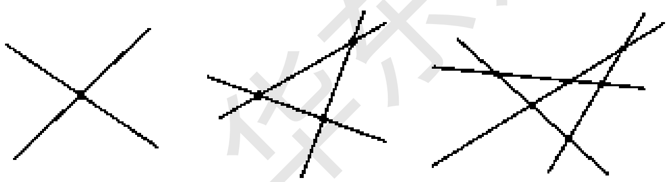
$\therefore$ $BC/\!/DE$(　　　　　　　　　　).

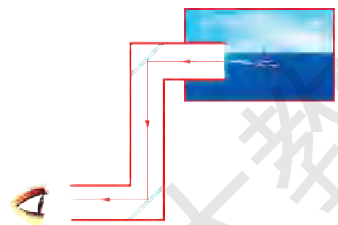


(第 12 题)

C 组

13. 如图，我们知道，2 条直线相交只有 1 个交点，3 条直线两两相交最多能有 3 个交点，4 条直线两两相交最多能有 6 个交点，5 条直线两两相交最多能有 10 个交点，6 条直线两两相交最多能有 15 个交点……n 条直线两两相交呢?


(第 13 题)

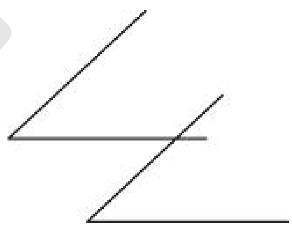

(第 14 题)

14. 如图，潜望镜中，两面镜子互相平行放置. 你知道为什么进入潜望镜的光线和离开潜望镜的光线平行吗?

15. 如果一个角的两边与另一个角的两边互相平行，那么这两个角的大小有什么关系呢?

此时，小红首先想到如图所示的图形. 她发现这两个角应该相等.

你知道其中的原因吗? 你是否还能发现其他图形呢? 画出所有可能的情况，探究归纳你所得到的结论.


(第 15 题)

项目学习 1

比例的世界

如何将中国的版图完整地画在纸上，并精准把握每一块区域的大小？如何画出一张精确的房屋或器械设计图，使每一个局部或零件的大小都恰到好处？这些工作都需要“比例”大显身手，有了它，地理学家才能将山川河流“收入”背上的行囊，建筑师才能让纸上的草图变成精妙的成品．比例在地理、艺术、机械、物理等领域都发挥着重要的作用，让我们一起来探索比例的世界吧！

所需数学知识或技能：比、比例、比例尺等相关知识；测量、估算等技能．

所需跨学科知识：方位、地形等地理知识；电脑制图等信息技术知识；手工制作等美术知识．

所需材料：硬纸板、卷尺、直尺、彩色笔、剪刀等．

活动形式：实地或实物测量、按比例绘制图纸、手工制作成品等．

成果形式：自制的地图、自制的建筑物模型、数学说明书等．

任务一　绘制校园平面图

你充分了解自己的学校吗？比如，学校的占地面积、大门朝向、教学楼到操场的距离等．请以小组合作的形式到校园中进行实地测量，并绘制出一张含有比例尺的校园平面图，看看谁的成果更加准确且美观．

活动流程建议

（1）测量校园．请选择合适的长度测量工具（如卷尺等）进行测量．若没有精确测量的工具，也可以使用合适的估算工具（比如臂长或

步长等）．除了测量长度，你是否还需要测量一些角度呢？可以使用指南针或一些自制的简易工具辅助测量．

（2）绘制校园草图．在已有数据的基础上，结合纸张大小，确定合适的比例尺，并开始画图．如果你使用计算机绘图，那么打印纸张的大小比例也应该计算清楚．

（3）完成作品．初步形成校园平面图后，不要忘记回到校园内观察、比对，检查有哪些数据误差过大，有哪些地点位置有所偏差．请精益求精地修改你的作品吧！

任务二　自制建筑物模型

世界上有许多知名建筑物，它们的文化底蕴与精美设计一直被人们津津乐道．像东方明珠、布达拉宫、埃菲尔铁塔、比萨斜塔等建筑物还常被制成精致的模型或者手工艺品．这些小小的模型看似简单，但是要做到精确并不容易，严格按照比例制成的模型才能最大限度地保留建筑物本身的美感．请你选择一处知名建筑物，查询相关资料或进行实地考察，在真实数据的基础上，选择合适的比例，选用方便的工具，制作尽可能与实物相似的模型．

活动流程建议

（1）获取数据．如果你选择的建筑物就在你所在的学校内或者城市里，那么请通过小组合作探寻其真实数据．你可以带上相机或者测量工具进行实地拍摄和测量．你也可以到图书馆或者网上查找资料，以此增加对建筑物相关数据和信息的了解．

（2）制作模型．你身边是否有方便易得的材料呢？比如易拉罐、一次性筷子、塑料废品等．针对你所选择的建筑物特点，设计并制作模型吧！其间要格外关注建筑物本身各部分之间的比例关系，以及实物与模型之间的比例关系．

（3）附上介绍．请制作一份简要的模型说明书，其中可以介绍模型的缩小比例、相关数据、历史背景、制作材料等．

项目学习 2

包装中的智慧

走进商场，各种各样的商品琳琅满目，其中很多商品有着形形色色的包装盒．作为吸引顾客的第一道惊喜，厂家对包装盒的设计与制作可谓煞费苦心．包装盒上同样蕴涵着丰富的数学知识，而设计师与企业家们都是“数学能手”，对包装盒的设计在更优、更省、更美的目标上精益求精．让我们好好探究一番包装盒的秘密吧！

所需数学知识或技能：表面积、体积、表面展开图等几何知识；统计的相关知识；单位换算、测量绘图等基本技能．

所需跨学科知识：环境保护等化工和生态学知识；手工制作等美术知识．

所需材料：各种包装盒、硬纸板、直尺、剪刀、胶水等．

活动形式：收集、拆解、分析、自制包装盒等．

成果形式：研究报告、包装盒的设计成品及其说明书等．

任务一　包装盒中的几何

包装盒的几何外形可谓纷繁复杂，这些形状的选择究竟有何意图或者作用呢？请你收集生活中的包装盒，分析它们的不同形状，尝试提出相关的研究问题并回答．例如：为何有些几何体被商家广泛使用？为何有些商家偏爱特立独行的外观？展开后的包装盒有哪些特点？

活动流程建议

（1）包装盒分类．收集身边的包装盒，并对其几何外形进行分类．你能从分类中发现什么规律吗？可以尝试运用统计知识，比如用数据或者图表描述现象（例如不同形状的占比等）．

（2）包装盒拆解．对部分不同形状的包装盒进行拆解，注意观察其表面展开图的差异．你可以将同一形状包装盒的不同表面展开图画在纸上进行比较，你也可以比较不同形状包装盒表面展开图的差异．你得到了哪些结论？

（3）包装盒分析．结合以上两个环节，你能对包装盒的几何信息进行分析与归纳吗？例如：为何有些形状的包装盒市场占比多而有些形状的则占比少呢？你可以尝试从结构稳定性、设计简洁性、组装便利性等方面入手分析．

任务二　包装垃圾的反思

包装盒如此常见，所产生的包装垃圾也不容小觑．请你展开调查，了解身边的包装盒都是什么材质；按照垃圾分类标准，看看它们分别属于什么垃圾；每天家中或学校所产生的包装垃圾量有多少；等等．你也可以提出更多可探究的问题，并尝试回答，最后基于你的研究提出一些有针对性的意见或建议．

活动流程建议

（1）包装垃圾分类．收集身边的包装盒，并对其材质进行分类．你可以从垃圾分类的角度对其材质选择进行分析．结合查阅的资料，利用一定的数据，尝试分析商家为何选择这些包装材料．

（2）包装垃圾统计．基于以上分类，请你选择一处固定场所，计算其单位时间内的包装垃圾产生量．你可以从多方面定义“垃圾量”，例如几何体体积、表面展开图的面积、包装盒的质量等．请你结合几何知识与统计知识，利用数据或者图表描述现象．

（3）研究报告撰写．从数据中能得到哪些信息呢？从环境保护、垃圾处理等角度，你能否基于研究结果提出一些意见或建议？尝试撰写一份研究报告解读你的数据，并借此为厂家、商场或者消费者提出一些有针对性的建议．

任务三　包装盒的设计与制作

包装盒中的秘密可真多，经过多方探究，相信你也有不少想法吧！如果你是设计师，你会为产品设计什么样的包装盒呢？请你选择合适的商品，充分考虑产品的存储与运输、包装盒的大小与美感、材料的安全与环保等因素，设计和制作一款独特的包装盒吧！

活动流程建议

（1）选定产品．根据任务一或任务二的研究或自身的生活经验，你是否发现了某些产品包装上存在的问题？你能否根据所发现的问题对其包装盒进行重新设计？请确定好产品，充分了解其形态、大小、特性等，明确包装盒的规格．

（2）设计包装盒．你的设计理念是什么？你主要关注的是包装盒的外观吗？或者你更加希望包装盒用料更少，以节约预算？你还需要考虑包装盒是否易于存储、运输等．基于此，设计包装盒的几何图形及表面展开图．

（3）制作成品．请选择合适的包装材料，并基于你的设计制作成品．注意材料的选择不仅需要考虑环保问题，还需要考虑产品属性、制作难度、成本高低等因素．

后　记

本套教材于2001年初获教育部批准立项，并于当年3月依据《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》正式开始编写. 七年级上册于2001年6月通过教育部审查，并于当年秋季在全国七个国家级实验区投入使用.《义务教育数学课程标准(2011年版)》于2011年12月由教育部正式颁布，根据教育部的统一安排，本套教材进行了修订送审，并在顺利通过教育部审查后继续在相关省市使用至今. 在首届全国教材建设奖评选中，本套教材(七年级上册、七年级下册)荣获“全国优秀教材二等奖”.

2022年4月，《义务教育数学课程标准(2022年版)》正式颁布，根据教育部的统一部署，义务教育教材新一轮修订工作正式启动. 为了确保本套教材修订工作的顺利进行，我们提前于2018年初至2020年底，在本套教材使用地区进行了大规模的抽样问卷调查和测试，获得了改进教材质量的第一手材料. 广大师生反馈的许多共性问题，为我们进行新一轮教材修订提供了明确的思路和启示.

按照教育部的要求，本套教材修订稿于2023年11月25日至12月15日在全国九个省市开展了试教试用和一线教师审读工作. 在此期间，几十位一线教师为我们进一步完善修订教材提出了数百条意见和建议.

在此，我们对20多年来给予本套教材关心的广大教材使用地区师生表示衷心的感谢.

本册教材的撰稿人除已经列出的编写人员外，黄健撰写了项目学习初稿.

尽管我们对修订工作倾注了大量心血，但是现在呈现在广大师生面前的修订教材肯定还存在有待进一步完善的地方. 我们真诚希望广大师生继续关心我们的教材，对我们的教材不断提出新的宝贵意见.

联系电话：(021)60821761，60821770.

电子邮箱：pingping@ ecnupress. com. cn.

数学

七年级　上册

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5760-4932-9

定价：15.00元